CONFERENCIAS PLENARIAS

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

El Fracaso Escolar; la Motivación en Matemáticas; la Destransposición de Conocimientos Escolares.

André Antibi
IREM de Toulouse, Université P. Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex
France

La conferencia estará constituida de tres partes distintas, conteniendo temas que me parecen muy importantes en la enseñanza de las matemáticas. Un estudio más profundo de los puntos abordados en la conferencia ha sido realizado en artículos ya publicados.

la. parte: El fracaso escolar: ¿Es una fatalidad? [1]

En nuestra enseñanza, los alumnos son las principales víctimas de la "constante macabra". ¿De qué se trata exactamente? Cuando un profesor prepara control de conocimientos y cuando escoge un baremo, lo hace de tal suerte, más o menos conciente, que las notas sean escalonadas convenientemente: es necesario que haya todo tipo de notas, buenas, medias, malas y esto no importando cual sea el contenido que se esté controlando, la calidad del profesor, el nivel de clase. A aquellos que se sorprendan con tal afirmación, pido simplemente imaginar por un instante el caso de un profesor de matemáticas de una clase de segundo (alumnos de 15 años), por ejemplo, que no pusiera a ningún alumno una nota inferior a 12 sobre 20. ¿Qué pasaría? La primera vez, se podría pensar, en el mejor de los casos, que se trata de un accidente, una coincidencia, la segunda vez, que el tema era verdaderamente muy simple y algunos colegas intrigados comenzarían a hacerse muchas preguntas. Si esta situación se reproduce en todos los controles, nuestro desafortunado colega probablemente pasaría en su establecimiento, como un profesor demasiado gentil, inclusive un poco demagogo, que no enfoca el programa convenientemente. Habría inclusive inquietudes respecto a los alumnos, que, en tal contexto, serían orientados, al final de año, hacia las secciones científicas. Pero prácticamente nadie pensaría que el nivel de notas pueda ser producto, por ejemplo, de la competencia del profesor, de su actitud para motivar a sus alumnos.

Así, en todos los niveles, se puede decir que hay en nuestra manera de evaluar a los alumnos, una especie de constante: la proporción de malas notas. Está claro que, en tanto no nos deshagamos de esta constante, profundamente arraigada en nuestro espíritu, siempre habrá alumnos en situación de fracaso. Las modificaciones al programa, por ejemplo, no contribuirían en nada. Se debe reconocer que la existencia de una tal constante "macabra" (para muchos alumnos en todo caso), traduce una forma de injusticia en nuestro sistema de evaluación que tiende a clasificar a los alumnos, en vez de evaluar realmente sus conocimientos.

¿Cómo tratar de cambiar esta situación? Serán propuestas algunas sugerencias apoyadas sobre experimentos efectuados en el marco del IREM de Toulouse.

2a. parte: La Motivación en Matemáticas: ¿la del profesor? ¿la del alumno? [2]

En la enseñanza de las matemáticas, desde hace varios años, parece que el problema de la motivación de los alumnos ocupa un lugar importante: búsqueda de situaciones, de aplicaciones a la vida cotidiana o a otras disciplinas, de ejercicios de tipo «Rally».

Nosotros nos proponemos en este artículo resaltar el problema importante siguiente: ¿Los profesores no tienen tendencia, inconscientemente, a confundir su propia motivación y la de los alumnos? Esta confusión es aún más lamentable que, a priori, los gustos de los profesores, profesionales de las matemáticas, no tienen ninguna razón de ser los mismos que los de los alumnos.

En tanto que nosotros damos una gran importancia a la evaluación de los conocimientos de los alumnos ¿nos preocupamos suficientemente de la evaluación, incluso somera, de su motivación? Tal parece que hay un enorme desfase entre la importancia dada a la motivación de nuestros estudiantes, y el hecho de que esta motivación es raramente sometida a prueba.

Algunos ejemplos del «desfase motivacional» serán presentados en este artículo, de los cuales uno de ellos fue el objeto de, un experimento con profesores y estudiantes.

3a. parte: La destransposición de conocimientos escolares. [3]

En nuestra enseñanza, las nociones son presentadas en general de manera simplificada, transpuesta. Esta "transposición" puede a veces originar ideas "erróneas" en los estudiantes. En el seguimiento de sus estudios, es conveniente tener conciencia de ello y no olvidar, cuando llegue el momento, rectificar estas ideas falsas; se puede igualmente decir que es conveniente "destransponer".

En la conferencia se mostrará que, muy a menudo, este fenómeno de destransposición no es tomado en cuenta por el sistema educativo. Serán propuestos varios ejemplos fundamentales: demostración partiendo de la conclusión, demostración de una igualdad, utilización de una gráfica, demostración por análisis y síntesis.

Esta conferencia presentada de manera accesible a todo docente, no supone ningún prerrequisito de didáctica.

Referencias bibliográficas

[1] A. ANTIBI (1988), Tesis de Estado, IREM de Toulouse. Anexo 1 "La constante Macabra".

[2] A. ANTIBI (2000) La Motivación en Matemáticas: ¿la del profesor? ¿la del alumno? Actas de las 9as JAEM. Lugo, Septiembre de 1999.

[3] A. ANTIBI, G. BROUSSEAU (2000) "La détransposition de connaissances scolaires", RDM (Recherche en Didactique des Mathematiques). Vol 201, No 1.

"Los Recursos Didácticos y la Formación Docente. Un Punto de Vista Histórico- Cultural"[1]

Dra. Eréndira Valdez Coiro
ervaldez@prodigy.net.mx
Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco D.F.
México

Problemática

La actividad magisterial es una forma institucionalmente validada para divulgar y fomentar el pensamiento científico. Como su campo de acción se ve permeado por la cotidianeidad, hace falta que el maestro se detenga a reflexionar en las acciones que instrumenta, y sus motivos para realizarlas, todo esto en el marco de un enfoque didáctico que lógicamente debe trascender el nivel de empiria que es contrario a lo que desde la teoría crítica se postula como deseable (Carr y Keminns; 1988).

En la Matemática Educativa, nuestro campo de desarrollo, se han dado buenos avances y a la fecha aportaciones que son retomadas en otros aspectos de la enseñanza de las ciencias. Son considerables las aportaciones que desde la investigación educativa han hecho innumerables académicos. Mucho de este trabajo se va recuperando para replantear la actividad de enseñanza, sin embargo, desde las aulas nos damos cuenta que la comunidad educativa no ha incluido totalmente a los maestros de grupo. Los investigadores, los diseñadores de currículo, los asesores pedagógicos en las escuelas parecen estar en contacto con una propuesta alternativa y prometedora, y se regocijan con los acercamientos que tienen al saber docto, mejor planteado,... pero a los maestros parece que no ha llegado del todo la noticia de que estamos en una nueva era de la Matemática Educativa.
El sustento de actualización que podría salvar la aparente estatificación, no ha logrado movilizar a los maestros. Los cambios que son incorporados a la diaria tarea son mínimos, a pesar de los apoyos y los recursos que oficialmente se les hacen llegar.

Si en condiciones regulares la actualización se considera necesaria para mantener el plano profesional del maestro, y de alguna manera proteger el envejecimiento de los saberes (Chevallard; 1992), en esta etapa de puesta en marcha de nuevos programas de Matemáticas en nuestros países, tal actualización se torna indispensable. Ocurre así porque las currícula ha sido poco comprendidas por los maestros que deben ponerlas en marcha en los salones de clase, y de ello resulta que el impacto de su establecimiento ha sido negativo. Para los docentes, resulta más seguro simular y trabajar con lo que ya se conoce y se controla, que experimentar y replantear la actividad de enseñanza.

Los cambios que se han planteado con algunas reformas – caso de México en especial- han sido demasiado violentos para ser abordado por los mentores, y en muchos casos ha surtido lo que hemos llamado el "efecto calamar": la inmovilización por un exceso de estímulos sobre el sujeto, que como única acción defensiva se paraliza. Así, la avalancha de información inmoviliza al maestro y no le da oportunidad de iniciar el cambio, por lo que se manifiesta una resistencia que encuentra como salida la negación del problema (Valdez; 1998b). Los maestros continúan con las prácticas que prevalecían antes de los nuevos programas, porque con ello al menos se garantizan un cumplimiento profesional que les mantenga una imagen respetable ante alumnos y padres de familia, aunque no se cumplan cabalmente los propósitos que plantea cada programa escolar vigente. Hay una visión individualista que se justifica a partir de la dualidad entre lo real y lo aparente (Heller; 1985), con esta visión con la que el maestro se margina como sujeto activo de la comunidad académica, y rechaza incorporarse al avance didáctico que le propone la nueva currícula.

---

[1] Conferencia Magistral presentada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa # 14, Panamá, 21 de julio del 2000

Aspectos de la Formación Magisterial que destacamos

El modelo didáctico en el que los maestros se han formado no es el mismo que el que actualmente se propone en las nuevas currícula. Generalmente su modelo de formación inicial corresponde al de una enseñanza tradicional y en el mejor de los casos al de una perspectiva tecnológica (Porlán; 1993). Hacer los cambios sobre la práctica misma ha sido sumamente difícil, y tiene poco en cuenta la demanda de que la actividad vaya sustentada por una teoría explícita. Los maestros reciben las propuestas curriculares innovadoras como prescripciones, pero poco de esa información pueden recuperar en su práctica docente, porque no están en condiciones de hacer interpretaciones pertinentes que transformen los principios en acciones.

En Matemáticas resulta interesante que se presenten nuevas propuestas curriculares, y en la práctica se acompañen de los “viejos materiales de apoyo”, de los textos tradicionales, y con escasos cambios en la actividad del maestro y de los alumnos. Hay planes de estudio que se proponen una integración de contenidos y una actividad intensa por parte del estudiante en la construcción de sus saberes,... y para los cursos de cada materia se equipan con los antiguos textos, pero no sólo para consultar ejercicios y problemas, sino para asignar las páginas de ellos en las tareas o deberes rutinarios, haciendo caso omiso de los laboratorios y talleres que tanto se pregonan en los Congresos.

La información que reciben, al no confrontarse y ser guía de las acciones cotidianas queda en un nivel subordinado, que escasamente alcanza la diferenciación progresiva (Ausubel, 1988). Sus aprendizajes quedan reducidos a discursos y no a rutas de acción. Como no alcanzan a ser realmente confrontados con los conocimientos previos que los maestros tienen, raramente se producen las rupturas que podrían dar lugar a un nuevo desempeño de la docencia.

Hemos detectado y hecho seguimientos de varios programas educativos en los que por ejemplo, los maestros del nivel básico, han tomado diplomados, especializaciones y maestrías sin que las actividades en sus salones se vean perturbadas por cambio alguno. La consigna de aprender a desaprender, para aprender de una nueva forma, como afirma Barabtarlo (Barabtarlo; 1998), es un principio que difícilmente se atiende desde la práctica escolar.

El acervo teórico no logra ocupar un lugar de privilegio en la formación de la cultura magisterial y la rutinización de la actividad docente se ve continuamente orientada y alimentada sólo por el sentido común, las creencias populares, y las tradiciones, sin lograr que este tipo de saberes lleguen a confrontarse con los planteamientos teóricos vigentes, y menos aún que ellos logren modificarlos de forma alguna.

La formación de los maestros de Matemáticas no es todo lo completa que se necesita, y las dificultades que tienen otros aprendices también agobian a los maestros cuando reciclan sus propios saberes. Continuar estudiando para ser mejor maestro es una preocupación latente en muchos colegas, pero las formas de llevarlo a cabo no es algo tan claro como para pensarlo como propósito compartido, y menos aún, algo tan simple que con sólo la voluntad pueda llegar al buen logro.

Recordemos brevemente los fundamentos del enfoque vigotskyano:

i) Por el principio genético, reconocemos que la actividad mental del sujeto se da en diferentes dominios de referencia que para ubicar algunas de las características de este trabajo, resulta útil mencionar: el dominio filogenético, el dominio ontogenético que consideramos que es el que nos permitirá analizar a los maestros “dentro de la cultura de su tiempo...”, el histórico que en el caso de la formación magisterial consideramos fundamental pues da cuenta de los elementos de identidad y tradición, y el dominio microgenético, que da lugar al establecimiento de los encuentros para el aprendizaje y el intercambio de experiencias en los talleres de actualización magisterial.

ii) Respecto al origen social de las funciones mentales superiores, baste con mencionar que el aprendizaje es la plena expresión de las funciones mentales superiores, y que desde esta teoría se considera que se da en un primer plano durante la interacción entre los sujetos, y posteriormente en un plano intrapsicológico. Este principio es d elemental para la puesta en marcha de una propuesta pues dicho en lenguaje cotidiano, establece que el aprendizaje se dará en el ámbito colectivo y de ahí pasará al individual,... lo cual genera rutas claras de acción durante el proceso.

iii) Finalmente comentaremos el concepto de mediación, a partir de la idea de que estamos pensando en un proceso de cognición situada, ... y socialmente distribuida. Por ello resulta importante reconocer que hay medios que intervienen para que se dé el proceso comunicativo, y a partir de él el aprendizaje. Estos medios a los que nos referimos van desde el propio discurso matemático (desde el científico, hasta el escolar), pasando por las formas de interacción y dinámicas de trabajos, hasta los ejercicios, problemas y medios concretos que se utilizan para desarrollar el encuentro aúlico.

Algunos de los conceptos considerados desde este trabajo:

Sobre el concepto de acción mediada con carácter situado.

Considerando la acción que despliega el maestro cuando atiende sus tareas docentes, hemos puesto la atención en los instrumentos mediadores que le permiten a él lograr sus aprendizajes, para posteriormente disponer los modelos más pertinentes hacia el logro de los aprendizajes de sus alumnos.

Nuestro interés está puesto en los maestros en primer plano. Ellos interactúan con materiales, textos, y formas organizativas. Una vez que los han apropiado, los ponen a funcionar en la escuela, con lo que concretan su trabajo. Nos interesa indagar sobre los sistemas de signos que los docentes priorizan durante las etapas de la actualización. En particular ponemos nuestra atención sobre el uso de los materiales didácticos y apoyos en general, porque los consideramos instrumentos mediadores que son utilizados por los maestros cuando se desarrollan acciones orientadas hacia el aprendizaje (en las aulas fundamentalmente).

Explicarse la acción encaminada para el logro del aprendizaje del docente en servicio, implica una transición genética desde el plano ***interpsicológico*** en el que se ve sometido a programas de actualización de sus saberes, hacia el plano ***intrapsicológico,*** en el que se conforman las formas de representación de los profesores respecto a las matemáticas, y respecto a su docencia,… y es a partir de ellas que los maestros interactúan en terreno profesional. Cuando se forman representaciones sobre cómo quisieran ejercer su docencia si tuvieran posibilidad de elección, se abre una primer posibilidad, que no garantiza aún un cambio, aunque da lugar sin embargo, a la idea de su factibilidad (de lo real, a lo posible). El diálogo con otros docentes y con los textos, es la acción que permite el paso entre uno y otro planos.

El profesor es el ***agente irreductible*** del diseño y de la ejecución de la acción didáctica. Considero que el material didáctico con el que interactúa puede ser pensado como de los instrumentos mediadores en la acción y que las circunstancias de la práctica que desarrolla nos dan los elementos para encuadrar ***el carácter situado de sus aprendizajes***. Tal acción corresponde a un tiempo y a un espacio determinado con las características propias del escenario en que se produce. Este escenario la impulsa o la limita,… la reconoce o la subyuga de acuerdo con las condiciones sociales y más fuertemente, las condiciones institucionales prevalecientes.

Pensar el problema de la formación del maestro de matemáticas no nos lleva a casos de superación profesional como problemas individuales, sino un conjunto de acciones del colectivo en el que ellos se reconocen y buscan superarse en los contextos científico, académico, y laboral. Nos lleva a pensar en profesionistas que intentan responder a los requerimientos eficientistas actuales, en una práctica del servicio comunitario tan compleja que los rebasa, y los desconcierta. Este es un problema que curiosamente no ha tenido una buena canalización, pues múltiples esfuerzos se han desplegado, pero los resultados no son tan buenos como se esperaba.

Lo que puede ser paliativo de tal problema, no es el individuo en sí mismo desplazado de la acción, ni el paquete curricular y/o de apoyos, trabajado lejos de quien ha de instrumentarlo. Considero que en consecuencia con los planteamientos de este enfoque, es la forma de acción sobre el sistema de signos (de la comunicación, del lenguaje matemático, del ambiente cultural,...), las formas de operar y apropiarse de las herramientas, los sentidos que en el contexto del colectivo logren atribuirle al trabajo lo que dará mayores posibilidades de comprensión y rumbo de la tarea, para ponerse a trabajar en la realización a una forma de docencia alternativa.

En particular, los maestros de Matemáticas se ven fuertemente presionados por las condiciones institucionales porque el problema de bajo rendimiento en la materia es un problema generalizado (Valdez; 1998). Esto determina que de entrada la tarea del docente de Matemáticas tenga el estigma del bajo rendimiento, en los términos en que oficialmente éste se evalúa. Por esta razón se hace necesaria una delimitación de la problemática, para poder hacer con ella también una delimitación de posibilidades de trabajo, que ayuden a delinear acciones más claras, hacia metas específicas y consecuentes con los principios didácticos actuales.

La docencia concebida tradicionalmente, plantea de entrada un problema generalizado en el que se infiltran relaciones de poder y de permanencia. El discurso pedagógico actual se contrapone evidentemente con esa concepción. Las prescripciones curriculares, proponen cambios, pero parece que contra la propuesta didáctica vigente, en la realidad de nuestros planteles se concreta más la permanencia, que el cambio, en un alarde de incongruencia entre la prescripción curricular y la práctica realizada.

Retomando la idea de que el trabajo en el aula requiere por principio de cuentas de una voluntad de comunicación, habría que replantear la tarea docente en términos de las ideas, los modos, las formas de enlace que tal comunicación requeriría. ***La acción docente se lleva a cabo de la mejor manera posible***, como el maestro mejor puede realizarla ***en ese momento***. La pregunta que nos inquieta es, ¿cómo puede el maestro tener un mejor repertorio de ideas para que en el momento justo sean utilizadas?

Es en la acción misma donde han de surgir estos nuevos elementos, y de la experiencia surgida durante su construcción podrá iniciar la posibilidad de ajustes posteriores para ser llevadas a la práctica, en ejecuciones complejas que incorporen los nuevos aprendizajes y las nuevas herramientas, modificando paulatinamente las prácticas ya dominadas.

Uno de los principios que debe vivenciar el maestro durante las interacciones es que la amplitud de acciones y reorganizaciones, de papeles se produce durante la tarea, y son producto de la interacción espontánea y voluntaria de los participantes.

La transformación es gradual, tiene lugares comunes con la experiencia, para poder llevar a cabo los ajustes en la base conceptual, y hacer así los ajustes para formar la plataforma en la que se fundamente cada nuevo intento, y desde donde pueda hacerse la evaluación de cada puesta en marcha.

¿Qué voces se manifiestan en la voz magisterial?

Está presente sin lugar a dudas, y pese a las resistencias explícitas, la voz de un currículo oficial que está normando la tarea. Este currículo representa el marco institucional en el que quedan expresadas las demandas de la sociedad, mismas que han sido puestas en un documento por los expertos que diseñaron los programas y el plan de estudios en su conjunto.

En otro lugar está la voz de los ***habitus***, de las experiencias, en los que se ha formado el propio maestro. Sus experiencias como aprendiz… lejanas o cercanas. De permanencia o de cambio, de continuidad o de ruptura, pero reclamando su lugar como esencia misma de la formación docente.

También está la voz de la sociedad representada, la voz de la sociedad ideal, el porvenir que reclama ser tomado en cuenta en cada paso que se da, para garantizar que se construye racionalmente el futuro.

Por otra parte, un tanto encubiertas, están presentes las voces de la tradición, de las creencias populares que en lo más íntimo de la conciencia magisterial se manifiestan bajo la denominación del "sentido común". Éste parece no impregnarse de los conocimientos científicos a los que tanto acude el profesor y que son su objeto de estudio. Y valga aquí la nota especial respecto a la naturaleza científica del trabajo docente,... y esa gran dosis de cotidianeidad que hace que en un solo espacio- momento confluyan dos tipos de saberes: el común y el científico. Esta dualidad aqueja al maestro y llega a formar verdaderas barreras que requieren ser analizadas, y que en propuestas como esta, emergen "naturalmente" durante los procesos de actualización de los mentores.

La voz de la comunidad se manifiesta en la práctica magisterial determinado las más triviales acciones, y los cotidianos protocolos que hacen la vida diaria, en especial al interior del salón de clases. " El medio es el mensaje", postula Postman, la forma nutre el contenido, y los rituales de la escuela son en parte marco y en parte la imagen misma de la realidad. En la escuela se aprenden también los sentidos del aprendizaje, sus usos, su valor.

Al analizar las producciones escritas y verbales de los maestros suelen emerger estas voces que dan cuenta de la dinámica compleja y continuamente modificada en que se desarrolla el pensamiento magisterial. En el paradigma tradicional el aprendizaje es acumulativo, cada nuevo aprendizaje aumenta el capital cultural, la bonanza académica y con ello la seguridad en el ejercicio docente. En las nuevas propuestas hay novedad, pero también hay incertidumbre por su propia naturaleza innovadora (pues los saberes no se conciben en un modelo lineal), y porque no corresponden al paradigma educativo en el que se formaron los profesores.

Sobre el concepto de privilegiación

En el paradigma educativo actual, cada etapa de formación modifica el acervo y su propia estructura, pero hace surgir nuevas demandas de conocimiento. Idealmente se espera que cada nuevo aprendizaje recomponga el paquete cultural y alimente la sensibilidad para detectar nuevas necesidades, problematiza, y por ello el proceso no tiene fin, y es preciso reconocer que una vez iniciado, no llega a buen puerto necesariamente, puede llevar a la angustia en tanto las actividades que se emprendan parezcan inabordables desde la modesta posición del maestro de grupo en una escuela elemental.

Se hace necesario que las rupturas que deban superarse puedan ser organizadas en programas de actualización que lleven a rutas de acción bien definidas bajo criterios de viabilidad y pertinencia, con los que se pueda aumentar la posibilidad de logro.

En la tradición magisterial se ha privilegiado el discurso retórico, por encima del cambio procedimental. Hoy día prevalece un saber estático que no impacta el trabajo en aula, se hace necesario modificar las formas de interlocución para impulsar el desplazamiento hacia los saberes dinámicos (Blanco; 1998), que vinculen las teorías con las formas efectivas de ponerlas en práctica, muy especialmente en lo que toca a la enseñanza. En un primer plano queda el maestro como aprendiz de ambos tipos de saberes, y en un plano más profundo e importante, como organizador de actividades estudiantiles que promuevan saberes aprovechables y movilizadores de la actividad de sus estudiantes. Es aquí donde los saberes han de ser transformados en acciones, pues la esencia misma de la docencia está en la puesta en práctica a partir de una teoría iluminadora.

Los instrumentos mediadores

En primer retomemos lo anteriormente dicho, respecto al propio discurso matemático escolar. Tomado como un género discursivo, entendido entre especialistas, entre iniciados,... Consideramos una adaptación de una idea de Freudenthal en el sentido de que la aspiración no sería que el conocimiento común se transforme hasta convertirse en conocimiento matemático, sino que el conocimiento matemático –al menos el del nivel básico- llegue a ser del dominio común.

Apreciamos una gran coincidencia entre el concepto de instrumento mediador y la idea que tenemos de lo que debiera ser un apoyo didáctico. Consideramos que **la forma que toma el conocimiento matemático en las representaciones del profesor se ve puesta en concreto y se hace explícita, en los recursos didácticos que emplea**. A final de cuentas lo que hace al elegir los apoyos para su clase, da cuenta de sus concepciones y conceptos, pues tales recursos son el instrumento mediador con el que el maestro comunicará sus ideas a los alumnos durante la clase[2].

En estos instrumentos mediadores (los recursos didácticos), el maestro expone las voces que su discurso incluye: el contenido escueto sacado de un texto especializado sin contexto alguno, la situación cotidiana que puede dar lugar a un problema al matematizarla, las formas de interpretación de los componentes de su temática, el espíritu problematizador, o el dogma, … etc.

Los apoyos didácticos son los recursos con los que el profesor diseña el texto de su clase,... o al menos con los que hace un plan, a manera de trazador didáctico (Newman, Griffin y Cole; 1985). En ellos se concretan las formas de representación que tienen los profesores, de sus nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas.

Cuando la formación magisterial es limitada estos recursos se ven restringidos y difícilmente se puede pedir que la clase sea dada mediante un planteamiento activo en el que los estudiantes sean participativos. La voz prevaleciente suele ser la que representa la formalización del conocimiento matemático, sin que para su comunicación haya fases intermedias que den lugar a su construcción. El supuesto que subyace en esta forma comunicativa es el de **la transparencia del contenido**, por lo que parece que la comunicación desde el plano del maestro bastará para que el proceso realmente se dé con plenitud. Bajo esta perspectiva, no se consideran ni las diferentes necesidades que puedan determinar una comunicación exitosa a partir de las dificultades que el conocimiento mismo presenta, ni las posibilidades del alumno para recibir los mensajes, pues éstos son emitidos universalmente para un alumno etéreo, y menos aún, se consideran las posibilidades personales del maestro para comunicar el discurso matemático a sus alumnos, dentro del mundo de contingencias en el que ocurre la clase.

En tanto se pueda pensar que cada acción pueda ser desarrollada “en formas nuevas, inesperadas o creativas…” tiene sentido buscar respuestas a interrogantes como las siguientes:

¿Cuáles son los instrumentos mediadores que privilegia el maestro en su proceso de aprendizaje?
¿Qué herramientas conceptuales son las que con más eficiencia utiliza?
¿En qué tipo de materiales didácticos concreta su docencia cuando se comunica con sus alumnos?

---

[2] Estamos trabajando en las acciones que en los grupos de trabajo podrían aportarnos información sobre distinción entre signos y herramientas, desde los contextos específicos de trabajo, para caracterizar los aprendizajes de los maestros desde el contacto con los materiales, hasta la reformulación de los conceptos, y luego en la etapa de transferencia, hacia la elaboración de nuevas formas de representación.

¿De qué manera recupera su experiencia como aprendiz, cuando toma el papel de docente?

En un proceso de formación de docentes, la idea de "un cambio autogenerado", a partir de la reflexión consciente puede ser la estrategia que permita el acceso a los modelos de privilegiación de los recursos didácticos utilizados por el maestro, y quizá a la génesis de estos modelos, y al reconocimiento de sus características, para luego someter este conocimiento de manera explícita al análisis, y de ahí a su confirmación dentro de los bancos que podrían formar el repertorio magisterial, o a su revaloración a la luz de otras alternativas.

Retomar el análisis comparativo sobre el discurso magisterial en el tema del uso y las posibilidades de los materiales didácticos, y compartir tal análisis con maestros, puede aportar no sólo el conocimiento de recursos didácticos novedosos y/o funcionales, sino la comprensión de una alternativa de trabajo diferente.

Durante los debates, las formas de interacción en las que las voces de los otros sean escuchadas en "un juego de espejos," es un recurso en el que la práctica que cada quien ejerce, puede ser analizada por los colegas y los recursos didácticos puedan ser vistos como un bien común, utilizable no en la medida en la que existe, sino en la medida en la que manda mensajes al interlocutor, en la medida en la que invita a la actividad. Su lugar será redefinido por los agentes de la acción a partir de un juicio crítico y constructivo.

Los escenarios de trabajo

Con la emoción de enfrentarse con lo inesperado en cada puesta en escena, iniciamos la aplicación de una serie de talleres cortos confrontando el reto de compartir un mesa-banco en un salón de clase con personas que asisten al curso con la expectativa de aprender algo que mejore su tarea docente. Reprodujimos experimentos didácticos con la ambición de promover aprendizajes escolares, tarea que pudiera parecer rutinaria. Sin embargo, los que somos maestros sabemos de la increíble variedad de experiencias nuevas que se producen cada vez que entramos en contacto con un nuevo grupo de trabajo.

El objeto de estudio de la investigación que desarrollamos es el aprendizaje magisterial, así que el encuentro durante tales cursos nos pareció que era el mejor ambiente para conocer las posibilidades de acción de los maestros y para confrontar con ellos ***los desplazamientos que hacen de su pasado como guías, a su presente como aprendices, y nuevamente al papel de guías a futuro***. Esa ambivalencia que vive el maestro- aprendiz es muy interesante y difícil de controlar en el ambiente del taller, porque el presente que los invita a participar, a dudar y a superar los obstáculos,... también es su pasado- futuro que los limita porque pareciera que tienen que aprender para otros,... como si sólo se tratara de nutrir su acervo para convertirse en transmisores de la experiencia...

A partir de las experiencias desarrolladas en los cursos de actualización que hemos trabajado con maestros de educación básica encontramos que cuando los escenarios están ubicados fuera de su entorno cotidiano hay una buena disponibilidad de los maestros para entrar en contacto con nuevas experiencias. Siempre surge la petición de trabajar los cursos dentro de las instituciones en las que ellos laboran, pero hemos tenido oportunidad de contrastar las participaciones de los colegas en variados escenarios, y encontramos que ***el contexto laboral resulta limitante para el desenvolvimiento pleno de los maestros en el papel de aprendices.***

Los maestros se presentaban decididos a aprender un poco más, para enseñar mejor. En los talleres los invitábamos a que aprendieran para aprender, para disfrutar del hallazgo, de la satisfacción de vencer un reto, y confirmamos que éstas son libertades que no siempre se permiten los estimados colegas. Hace falta salir de la tarea docente, indagar, conocer, acaso reconocerse, y regresar nuevamente con un aire limpio que vivifique la acción.

Las tareas didácticas para la enseñanza, se planean y se ejecutan con una lógica diferente a la que existe en la contraparte, cuando se aprende. El reconocimiento del papel que tiene esa otra figura que está presente en la actividad del aula es necesario. La vivencia de este rol con toda la complejidad que lo define es uno de los aprendizajes más significativos que podemos tener los maestros en una sesión de Didáctica.

Los cursos que impartimos estaban organizados en dos sesiones de hora y media o dos horas cada uno, según se presentara la oportunidad. Se desarrollaron como parte de las actividades contempladas en congresos nacionales sobre enseñanza de las Matemáticas3. A ellos acudieron maestros que se permitían participar en este tipo de actividades, con las que tenían acceso a nueva información, a materiales y publicaciones que sabían que tenían relación con su trabajo cotidiano. Además que acudían a estos eventos a sabiendas de que no les reportan sobresueldo alguno, ni privilegios laborales. A algunos de ellos, tal asistencia inclusive les ocasionó algún inconveniente de tipo administrativo.

En estos ambientes las resistencias fueron mínimas, pues no hubo presiones que obligaran a quienes allí asistían. Lejos de tal situación nos encontramos entre sujetos que estaban orgullosos de haber logrado llegar a cada evento. En uno de los escenarios, tuvimos un alto porcentaje de maestros “becados”[4]. Cosa que los comprometía y que realmente surtió el efecto Pigmalión, pues fue el grupo más participativo que se atendió en esta etapa.

En estos escenarios la constante fue la absoluta entrega hacia las actividades planteadas por la conductora, y en la última parte de cada jornada, el intercambio de experiencias y opiniones sobre las actividades desarrolladas. *Para los maestros es altamente satisfactorio compartir prácticas exitosas*, ...l es gratifica compartir una problemática común en un espacio que los reconoce como especialistas, con tareas profesionales y científicas que son comunes.

Esto fue explícitamente reconocido como una experiencia alentadora. Sin embargo en las participaciones durante las plenarias se pudo apreciar una actitud de recelo y cautela, cuando había que describir cómo se podría retomar el material elaborado y las experiencias comentadas. En los diferentes grupos experimentales se manifestaron dudas respecto a la legitimidad que tenía el retomar las ideas que habían sugerido otros colegas[5]. Esto es, no parecía permitida la posibilidad de retomar como propias las participaciones y experiencias de sus compañeros que habían sido trabajadas en el grupo como producto de la interacción. La idea de la construcción social del conocimiento es un hecho que aún no se retoma en su justa dimensión, aunque sí se viven experiencias que lo ilustran.

El escenario del salón de clases nos ha parecido el mejor laboratorio para llevar a cabo este trabajo. La tensión que se genera durante la interacción en el aula es un ambiente que no puede simularse en un laboratorio. En un taller de Matemáticas los antecedentes se ponen en juego, no hay ambigüedades, se sabe o no. El aprendizaje escolar se produce ***in situ,*** y consideramos que de esta manera es posible valorarlo, analizarlo y mejorarlo en condiciones idóneas. Hay una redefinición del acervo y de las habilidades matemáticas, por cuanto permiten el movimiento, y por cuanto se manifiestan como una restricción del participante que desea entrar en las problemáticas y se da cuenta de que le faltan elementos para captarlas en su totalidad, o para ejecutar operaciones o transformaciones en su información que permitan llegar a las soluciones.

Los factores que intervienen en la definición del contexto son muchos, y de índole muy diversa, pero podemos pensar que idealmente se parean de un escenario a otro, permitiendo

3 Fueron cuatro eventos: A) XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (México, oct 99), B) Congreso Nacional de Matemática Educativa (Guatemala, nov 99), C) Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas (México, dic 99), y Reunión Dominicana de Matemática Educativa (Santo Domingo, abr 2000).

4 En uno de los cursos, una parte de los profesores consideraban su asistencia como un premio al esfuerzo puesto al presentar un brillante examen en el Programa de Carrera Magisterial, hecho que les había merecido una invitación con apoyo económico por parte de la SEP.

5 Documentado en los registros de una jornada de trabajo, durante el CSMM, oct 1999.

tomar poco a poco aquellos que van aportando más claridad para reproducir las experiencias, y para leer cada vez de manera más completa la realidad escolar que pretendemos comprender. Las discontinuidades de la parcelización del proceso en el entramado del contexto se entrejen y adquieren nuevo sentido al ser tomadas en su compleja totalidad, y pueden inclusive ser entendidas como los elementos que han de analizarse en el total del contexto. La amplitud de acciones y reorganizaciones de papeles se produce ***durante*** la tarea, este es uno de los principios que debe vivenciar el maestro durante las interacciones.

Durante las sesiones de talleres, el encuentro de las mentes inducía a la puesta en común de metas, se dio la negociación de significados para expresar las ideas surgidas en las actividades, e inclusive para destacar las controversias que surgían como producto de la comunicación de ideas previas. Conforme la tarea se realizaba, había una clarificación progresiva, que se producía mediante la interacción al ir concretando avances en el desarrollo de la tarea.

Pudimos observar que en el contexto del taller, los aprendices pueden desplazar liderazgos, y ejercer responsabilidades diferenciadas a partir de la pericia que creen tener y que confirman al desplegar su capacidad personal durante las actividades. Concebimos esa estructura conjunta que se produjo en cada puesta en escena como una ***zona de construcción del conocimiento*** (ZCC), a la manera de Cole (Cole; 1985). Evocando a Vigotsky puede afirmarse que da lugar a una zona de desarrollo próximo (ZDP), en tanto que la actividad permite poner en juego capacidades y voluntades para superar los propios logros a partir de la intervención de un experto, que ha organizado la tarea para que cada participante avance en la medida que sus posibilidades personales se lo permitan, a la luz de la interacción generada durante la actividad.

El taller de Matemáticas que se planeó se concibió como un ámbito en donde se producía una ZDP o ZCC en tanto que plantea experiencias de aprendizaje que podían ser resueltas con poca ayuda, por parte de la coordinadora del taller, y con la expectativa de que posteriormente los maestros participantes transitarían por un proceso de transferencia que aún estamos tratando de caracterizar, para recuperar la aplicación del taller en los propios escenarios de trabajo de los maestros participantes.

Esta primer fase del trabajo deja abiertas las posibilidades de recuperación de la experiencia, en tanto que constituye la invitación a la acción personal por parte del maestro en su campo laboral, bajo el matiz que le imponga ese pasaje que constituye ***la transferencia***. Sabemos que al cambiar las condiciones de aplicación, al cambiar los escenarios, e inclusive en el replanteamiento de un nuevo nivel, (con maestros también,... o con alumnos,...) la actividad desplegada por el maestro estará convertida en una nueva experimentación. Tan solo pensar esta posibilidad a futuro le otorga ya un sentido a la tarea cuando se trabaja en el taller. Los maestros conciben la posibilidad de experimentar, aventuran la idea y aproximan su expectativa de innovación al trabajo diario, pero llevando a cabo acciones orientadas en el contexto de un aprendizaje específico, no como mera especulación, ni como “acto de redención”[6] .

El mejoramiento de su enseñanza es el mejor móvil que manifiestan los maestros para llevar a cabo su aprendizaje personal. Las ZCC o ZDP están pensadas como procesos de apropiación instrumental, en la medida que concretan una parte de la experiencia en los materiales didácticos cuyos prototipos se elaboraban durante la sesión. Los materiales didácticos se han concebido como herramientas mediadoras, que facilitan la formación de los conceptos. Con fines analíticos se destacan dos vías de elaboración: una primer vía sensorial, a manera de invitación, en la que el contacto con los materiales y su manipulación induce a la emergencia de ciertas propiedades y relaciones, que a su vez se van a entrelazar en un entramado complejo de conexiones de orden superior para dar lugar a una explicitación de significados que tendrían su referente en tales materiales (plano matemático), y que mediante

[6] En el sentido en el que T. Popkewitz plantea que podrían ser tomados los cambios que se ofrecen a los maestros para alcanzar ideales de ejecución en el ejercicio de la docencia.

la discusión y la puesta en común de proyectos didácticos tomarían lugar en una segunda vía de tipo intelectual en la que se aborda el problema de la construcción de significados, para con ello dar ***concresiones de corte didáctico que son "la punta del iceberg" del problema de la formación magisterial.*** Durante el proceso mismo se da la oportunidad de elaboración conceptual al maestro- aprendiz, no sólo sobre la organización didáctica, pues la tarea los lleva a ampliar, supraordenar y a veces reconceptualizar inclusive, la información matemática insuficiente.

Los talleres representaron un espacio para "hacer con ayuda",... y vislumbrar la posibilidad de "hacer solos..." fueron un lugar de encuentro entre pares, donde se socializaron experiencias, y se resconstruyeron elementos de la cultura magisterial. Los inventarios de saberes y de ignorancias fueron puestos al servicio del trabajo de cada equipo, y los participantes pudieron hacerlos explícitos sin presiones, y como parte de un acervo funcional.

CONCLUSIONES

A partir de los saberes que se producen

A partir de estas interacciones hemos destacado dos tipos de conclusiones. Estas, que se producen a partir de los saberes que se produjeron durante las actividades de actualización de los maestros del nivel básico, en Educación Matemática:
Son dos niveles al menos los que detectamos en los aprendizajes:

1. en el primero, se centran en los contenidos matemáticos, tienen inseguridad en su formación matemática,...
2. el segundo, suele darse cuando parece salvado el primero, y se da hacia el contenido didáctico.

Este tránsito podría significar el paso del manejo de la herramienta como objeto externo, hacia la construcción y el uso del signo, en donde la actividad desplegada carga positivamente, posibilitando el dominio de la propia acción.

La hipótesis que sostenemos, es que este tipo de trabajo permite la construcción de andamiajes que contribuirán a reformular el conocimiento matemático y didáctico del maestro. Considero que se pone la atención en las posibilidades individuales, a partir del trabajo colectivo, en tanto se acentúa el logro en los procesos de construcción más que en los contenidos mismos, que en casos extremos quedaron identificados como necesidades explícitas de conocimiento, y fueron –en varios casos- compartidamente declarados como temáticas que requerían de un tratamiento más profundo.

A partir de las formas de aproximación

1. En los grupos de discusión, los maestros manifiestan una prevalencia de la vivencia personal, la experiencia empírica por encima de lo conceptual y el manejo de la información que se intercambia. El problema de la formulación conceptual es fuerte, y además, hay una falta de asociación con los modelos cotidianos para recuperar en ellos un modelo matemático y hacer emerger la estructura común de ambos.

2. Se divaga, hay poca concentración en el objeto de estudio, al menos desde una tarea nueva. El discurso escrito y/o hablado no se traduce en acción transformadora o fuente de análisis. La construcción social se acepta en el discurso, pero cuando se trata de recuperar el aprendizaje colectivo, se duda al retomar las partes elaboradas a partir de las propuestas de otros compañeros, como si el aprendizaje colectivo no hubiera sido realmente compartido.

3. Hay una centración en aspectos específicos, que llega a ser tan predominante, que hace que se pierda el esquema general. El mundo de los objetos los aprisiona y hay dificultad para pasar del conocimiento de un objeto específico a las relaciones que ese objeto tiene con otros, y más aún a las propiedades que regulan esas relaciones.

No se pretende el aprendizaje de las actividades globales, sino la apertura de procesos profundos de cambio, el uso funcional de los contextos en los que la colaboración social adquiere sentido y emancipa al participante para buscar los sentidos del saber. Las mediaciones semióticas que llegan a producirse, podrían significar nuevas formas de pensar su actividad, y pensarse a sí mismos como aprendices,... ser sujetos y objetos del proceso en un mismo momento, desde las dos perspectivas conceptuales – la del rol del maestro y la del sol del alumno.

EL PROCESO DE METACOGNICIÓN que analiza el proceso abandonando el objeto mismo de la actividad, para indagar y cuestionarse sobre la actividad en sí misma, no se da con frecuencia. Consideramos que la DIDÁCTICA es para el maestro en servicio, un proceso METACOGNITIVO necesario.

Referencias bibliográficas

Newman, Griffin y Cole (1985). ***La zona de construcción del conocimiento***. Madrid: Morata.

Vigotsky, L. (1986). ***Pensamiento y lenguaje***. México: Ediciones Quinto Sol.

Moll, Luis (1993). ***Vigotsky y la educación***. Buenos Aires: Aique.

Wertsch, J (1993). ***Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada***. Madrid: Visor.

Algunas tendencias de la Matemática Educativa en Latinoamérica.

Germán Luis Beitía
Universidad de Panamá
gbeitia@usa.net

Resulta sumamente importante identificar hacia donde tiende la Matemática Educativa en Latinoamérica, con el fin de detectar algunos focos de atención que se pueden desarrollar a corto, mediano y largo plazo. Para ello, analizaremos las dificultades que giran en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y como esto conduce de manera natural a una actitud de cambio de los actores principales del proceso.

Según Miguel De Guzmán (Guzmán, M. De, 1989), algunas de las tendencias de contenido tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, el estudio de las matemáticas discretas, el pensamiento discreto y pensamiento aleatorio. Por otro lado, entre las tendencias metodológicas tenemos el uso de los métodos activos, el trabajo en grupo, la resolución de problemas, el papel del juego en las aulas de clases, el rol de la modelización y el crear condiciones que promuevan el gusto por la matemática.

Por otro lado, nos atrevemos a presentar algunas tendencias de la Investigación en Matemática Educativa, sin intentar clasificarla como un medio o un fin. Más bien lo hacemos en aras de tener un acercamiento al comportamiento de los investigadores en la comunidad de Matemáticos Educativos en Latinoamérica. De igual forma presentamos, a través de una selección aleatoria, algunos proponentes sin pretender creer que son los únicos, ni que se muevan de forma única en esta clasificación.

La metodología que seguiremos será la de presentar la tendencia y luego algunos de sus proponentes, destacando su nacionalidad, el evento donde presentó el trabajo de investigación, además del título del mismo. Las tendencias planteadas son: Pensamiento Matemático, Uso de la Tecnología, La Intuición y vínculo con la realidad, El Papel de la Motivación, Las Innovaciones Educativas, La Formación de Profesores y La Etnomatemática.

Pensamiento Matemático

- Luis Campistrous (Cuba), RELME 13. (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Santo Domingo, República Dominicana); ¿Qué enseñan los problemas?.
- Jesús Grijalva Ayala (México), RELME 10.(Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Ponce, Puerto Rico). Desarrollo del pensamiento numérico.
- Minerva Aguirre Tapia y otros, (México), RELME 13. La dependencia en geometría dinámica. Taller de Calculadoras.
- Analida Ardila (Panamá) , III CIBEM. De la Aritmética al Álgebra.
- Ciro Garavito Puentes, (Colombia), RELME 13. Acciones de plegado geométrico para el desarrollo de habilidades básicas en el aprendizaje de la matemáticas.
- Isabel Santiesteban Pérez y otros, (Cuba), RELME 13. La Modelación de problemas extramatemáticos.
- Joaquín Palacio Peña, (Cuba), RELME 13. Cómo estimular el pensamiento matemático en la escuela.
- César Augusto Pérez Gamboa, (México), RELME 13. Laboratorio de Matemática para la Educación básica.

Uso de la Tecnología

- Vera W. de Spinadel (Argentina), II CIBEM La enseñanza de la Geometría.
- Alicia Buquet (Uruguay), II CIBEM. Una Red Telemática y la Educación Matemática.
- Patricia González y otros (Argentina), III CIBEM. Una Experiencia pedagógica universitaria en una perspectiva de globalidad.
- Luisa Andrade (Colombia), III CIBEM. Servidor de Educación Matemática.
- Carlos Guerrero (Venezuela), III CIBEM. Un paquete de cálculo en el aula.
- Thomas Nathaniel Hibbard y otros (Argentina) III CIBEM. Resultado sobre una Experiencia Innovadora en el Secundario: Un Soft Educativo sobre Geometría Fractal.
- María de las Mercedes Moya y otros (Argentina), III CIBEM. Enseñando y Aprendiendo Matemática con Computadoras.
- Armando Zabert (Argentina), III CIBEM. Internet y Educación Matemática.
- Socorro Sánchez, Waldo Torres (Puerto Rico), RELME 10. El laboratorio como técnica de enseñanza.
- Silvina Cafferata Ferri y otros. (Argentina), RELME 13. Desde el lápiz y el papel hasta la computadora, trabajando con teselados.
- A. Homero Flores. (México), RELME 13. El Concepto de Función Lineal con la T1-92.
- María Oxiria Beltrán. (Puerto Rico), RELME 13. Uso y Manejo de la calculadora en el nivel elemental.
- Rubén Preiss. (Chile), RELME 13. La Calculadora gráfica como tecnología Docente.
- Martín Eduardo Acosta. (Colombia), RELME 13. Geometría Dinámica interactiva. Uso de Cabrí geometre.
- Dora Odstril. (Argentina), RELME 13. Enseñando Matemática en la Universidad con computadora.
- Marta Fernández Casuso. (Cuba), RELME 13. El Uso de Derive como apoyo a la enseñanza de las Matemáticas.
- Lisset Cruz Pupo. (Cuba), RELME 13. Sistemas Computarizados para la enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas.
- Yolanda De J. O'Farril Dinza, (Cuba), RELME 13. Álgebra lineal, Informática y Resolución de Problemas.
- Maritza I. Pérez Dumeg, (Puerto Rico), RELME 13. La Solución de Problemas a través de la Tecnología.
- Luis Moreno Armella y otros, (México), RELME 13. La Naturaleza del Razonamiento Geométrico mediado Por CABRI-GÉOMÉTRE. La Intuición y vínculo con la realidad.
- Miguel Ángel Riggio, (Brazil), III CIBEM. Mejoramiento en la percepción espacial en profesores.

- Blanca Alicia Rodríguez De Escontrela, (Venezuela), III CIBEM. ¿Cómo crear una disposición favorable del niño hacia la Matemática?.
- Eduardo Mancera Martínez, (Mexico), III CIBEM. Propuesta para la enseñanza de la Matemática a partir de la resolución de problemas.
- Analia Quezada Solano, (Costa Rica), RELME 13. Las figuras geométricas utilizadas para visualizar conceptos matemáticos.
- Guadalupe Tejada de Castillo, (Panamá), RELME 13. Actividades en contextos: Perímetro y Superficie.

Papel de la Motivación

- Nelli A. León Gómez, (Venezuela), II CIBEM. El lenguaje matemático en la enseñanza Matemática.
- Elena F. De Carrera y otros (Argentina), II CIBEM. ¿Una Matemática para cada carrera?.
- David Marrón (Cuba), III CIBEM. Una aplicación de los Métodos y Técnicas Participantes en la asignatura Matemática Numérica.
- Germán Luis Beitía, (Panamá), RELME 13. Geometría modelada en la formación de habilidades y destrezas.
- Cecilia Crespo Crespo y José Villella, (Argentina), RELME 13. Entre alambres, hilos y pompas de jabón.
- Alicia Villar Icasuriaga (Uruguay), II CIBEM. Las Matemáticas al alcance de todos
- Alicia Villar (Uruguay), III CIBEM. Un Paseo Original.
- María Eugenia Torres Moreno. (Colombia), RELME 13. Taller de Matemáticas para maestros de primaria.
- María E. Higa y otros. (Argentina), RELME 13. Enseñando en forma participativa a aplicar el concepto de derivada de una función.

Innovaciones Educativas

- Fredefinda Nava y María Escalona, (Venezuela), II CIBEM. Resultado de una propuesta didáctica en Matemáticas (preescolar).
- Juan José Salazar (Venezuela), III CIBEM. Adivinable: una innovación Educativa.
- Lina Oviedo y otros (Argentina), III CIBEM. Aprender Matemática en la Universidad. Un desafío de actualidad.
- Pedro Gómez (Colombia), III CIBEM. La cultura de la escritura en los profesores de Matemáticas. Su papel en la innovación y en la formación de profesores.
- Alicia Villar y otros (Uruguay), III CIBEM. Las Matemáticas al alcance de todos. Didáctica de matemáticas para maestros.

- Ricardo Dreyfous y otros (Puerto Rico), RELME 10. Algeblocks y la politabla Dreufous: Herramientas Innovadoras para la enseñanza de Algebra.
- F.M. Francisco Alarcón Ahumada, (México), RELME 13. Construcción del Heptágono Regular con doblado de papel.
- Arturo Hernández Ramírez. (México), RELME 13. El Tangram en sus aplicaciones en las horas de matemáticas.
- Elsa A. Rodríguez Areal de Torino. (Argentina) RELME 13. Métodos Participativos. La enseñanza del Límite de funciones de una variable real en el nivel superior.
- Miledys Teresa Tavárez Marzán. (República Dominicana), RELME 13. Estrategias Didácticas que favorecen la construcción del pensamiento matemático en la educación media.
- María Eugenia Torres Moreno. (Colombia), RELME 13. Taller de Matemáticas para maestros de primaria.
- María E. Higa y otros. (Argentina), RELME 13. Enseñando en forma participativa, a aplicar el concepto de derivada de una función.

Formación de Profesores

- Eréndida Valdez Coiro, (México), RELME 13. El uso de apoyos Didácticos en matemáticas. Posibilidades y limitaciones del profesor.
- Miguel Cruz Ramírez, (Cuba), RELME 13. Sobre la formación de problemas matemáticos.

Etnomatemática

- Isabel Soto Cornejo (Chile), II CIBEM. Etnomatemática – didáctica fenomenológica – escuela
- Martha Villavicencio, (Perú), II CIBEM. La educación matemática a partir del contexto Sociocultural.
- Omar E. Cordero (Venezuela), III CIBEM. La ProtoMatemática de los Yanomani.
- Oscar Pacheco Ríos, (Bolivia) , III CIBEM. La ethnogeometría.

Referencias Bibliográficas

- Beitía, G.L. (1998). Evolución de la Matemática Educativa en Panamá. Libro de Resúmenes de la Decimosegunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Bogotá, Colombia.
- Boyer, C. B. (1968). A History of Mathematics. J Wiley, New York.
- Guzmán, M de (1989). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Studia Pedagógica. Revista de Ciencias de la Educación. España.

- Santaló L. A. (1981). Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media. Docencia, Buenos Aires, Argentina.

Otras Fuentes Bibliográficas

- Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Ponce, Puerto Rico, 1996.
- Libro de Resúmenes de la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana, 1999.
- Actas del II CIBEM, Brasil.
- Actas del III CIBEM, Venezuela.

CONFERENCIAS ESPECIALES

Los Números Irracionales en la Geometría Elemental

Fausto A. Toranzos
fautor@dm.uba.ar
Depto. de Matemática, Universidad de Buenos Aires
Argentina

Habitualmente el concepto de ***número irracional*** se estudia en el nivel medio en conexión con otros contenidos de Aritmética, de Teoría de Números o de Álgebra, pero no relacionado con la Geometría. Es propósito de esta conferencia mostrar, por el contrario, que los números irracionales están estrechamente imbricados en los primeros resultados de la Geometría Euclidiana elemental. Tal vez sería oportuno observar acá que el adjetivo ***irracional*** en este contexto no significa "absurdo" u "opuesto a la razón". Su significado deviene de la forma negativa aplicada a la palabra latina ***ratio***, es decir ***cociente***. Por lo tanto, ***irracional*** denota *"no expresable como cociente de números enteros".*

1.- La pesadilla de Buffalo Bill.

Problema 1: Buffalo Bill sueña una pesadilla geométrica. En un plano cartesiano él está ubicado en el origen de coordenadas. En cada punto de coordenadas enteras hay un búfalo virtual (un punto). ***"Como hay infinitos búfalos, en cualquier dirección en la que dispare mi rifle mataré un búfalo"*** es la reflexión de Buffalo Bill, buen cazador pero mal geómetra. ¿Es correcta esta reflexión?

Este es un problema geométrico. Puede plantearse a alumnos que conozcan las primeras nociones de plano cartesiano y la ecuación de la recta. Deberá aclararse que un disparo de Buffalo Bill es una semirrecta que parte del origen de coordenadas. Sin embargo, los destinatarios del problema no podrán resolverlo a menos de que tengan una idea clara del concepto de número irracional. Por supuesto, la respuesta correcta es negativa. Cualquier disparo con pendiente irracional no sirve para matar búfalos.

Un poco al margen de la cuestión central, observemos que éste es un verdadero ***problema*** y no un simple ***ejercicio*** que se resuelve mediante la aplicación rutinaria de algún algoritmo o fórmula antes adquirida. Como tal, este problema admite generalizaciones y variaciones muy interesantes. Veamos algunas:

Problema 1': Sea ε un número muy pequeño pero positivo. Supongamos ahora que los búfalos no son puntos sino círculos de radio ε centrados en los puntos de coordenadas enteras. La pregunta es la misma que la del Problema 1.

En este caso la respuesta es afirmativa, pero su obtención dista de ser trivial. El alumno deberá emplear una buena combinación de argumentos geométricos y topológicos. Una vez más, la idea de número irracional estará en el centro de esos argumentos.

Problema 2: Estamos en el plano cartesiano. ¿Existe algún triángulo equilátero T tal que todas las coordenadas de sus 3 vértices sean números enteros? En otras palabras, en las condiciones del Problema 1, ¿existen 3 búfalos que sean equidistantes entre sí?

Razonamientos muy similares a los utilizados en los dos problemas anteriores permiten verificar que aquí la respuesta es negativa. Esto está conectado con la irracionalidad de algunas funciones trigonométricas del ángulo $\pi/3$. Por fin, una generalización casi inmediata de este problema sería:

Problema 2': Estamos en el plano cartesiano. ¿Existe algún triángulo equilátero T tal que todas las coordenadas de sus 3 vértices sean números racionales?

Observemos que una respuesta afirmativa del Problema 2' proporcionaría rápidamente una respuesta afirmativa del Problema 2 mediante una oportuna homotecia. Por lo tanto, aquí también corresponde una respuesta negativa.

Por otra parte, observemos que el conjunto de todos los puntos del plano con coordenadas racionales, es decir el conjunto Q2, también es un espacio vectorial aunque esta vez sobre el cuerpo Q de los números racionales. Podríamos entonces intentar construir una geometría análoga a la Geometría Euclidiana en dicho espacio vectorial. Sin embargo, la respuesta negativa al Problema 2' nos dice que tal geometría sería muy pobre, por ejemplo no tendría triángulos equiláteros. Muchas de las primeras construcciones con regla y compás de los Elementos de Euclides fracasarían en dicha geometría.

2.- Tales de Mileto.

Tales fue un filósofo, astrónomo y matemático griego que vivió en un entorno del año 600 a.C.. Dentro de la Matemática es recordado particularmente por el teorema que lleva su nombre, aquél que afirmaba que la proporcionalidad de segmentos en dos rectas transversales se mantiene cuando dichos segmentos son producidos por intersección con una familia de rectas paralelas. Este importante resultado es el punto de partida para los criterios de semejanza de triángulos, y por ende, también para la aparición de las funciones trigonométricas que se basan, precisamente, en la constancia de los cocientes entre lados homólogos de triángulos semejantes u homotéticos.

¿Cómo demostró Tales este famoso teorema? No han llegado a nuestros días documentos escritos por este autor, pero podemos decir casi con seguridad que **Tales no demostró el teorema que lleva su nombre**. La razón es muy simple, la idea de ***"demostración matemática"*** no existía aún en tiempos de Tales, sino que apareció mucho más tarde con Euclides. ¿Entonces cómo conoció Tales este resultado tan importante? Posiblemente por la observación inteligente de una gran cantidad de mediciones. La justificación teórica de sus observaciones llegó mucho más tarde.

¿Cómo se enseña en la actualidad este teorema? Lamentablemente debo decir que en muchos libros de texto para la enseñanza media este resultado se *"demuestra"* erróneamente. Aparece en estas falsas demostraciones una afirmación de este tipo:

«Determinemos *un segmento U suficientemente pequeño para que quepa un número exacto de veces en* $\overline{A}\overline{B}$ y *otra cantidad exacta de veces en* $\overline{B}\overline{C}$ »

Este enunciado presupone que el cociente entre las longitudes de los dos segmentos indicados es un número racional. Si no lo fuera, el pequeño segmento **U** no podría existir. Por lo tanto, tal demostración resulta ser falaz, en el contexto del plano R^2. Es claro que los alumnos, a esta altura, no han desarrollado suficiente capacidad crítica como para detectar la falacia y admiten esta demostración como buena. Por lo tanto, el docente que enseñe esta demostración está mintiendo a sabiendas a sus alumnos. Eso me sucedió a mí personalmente cuando aprendí este teorema por primera vez, casi medio siglo atrás. Unos años después, cuando adquirí suficiente madurez matemática para advertir la falacia, me sentí muy defraudado por esta mentira. El contraargumento de los autores de dichos libros es que una demostración correcta es muy engorrosa y exige una sofistificación matemática superior a la esperable en los alumnos. En tal caso me pregunto si no sería más juicioso (y más ético) suprimir la falsa demostración. Simplemente introducir el enunciado, apoyándolo en un intenso trabajo de mediciones y comprobaciones experimentales por parte de los alumnos. ¿Es tan importante en nuestra enseñanza la demostración de un teorema? ¿Cuánto aprenden nuestros alumnos de una falsa demostración? ¿Podemos pretender que sea ***formativa*** la enseñanza de un argumento falaz?

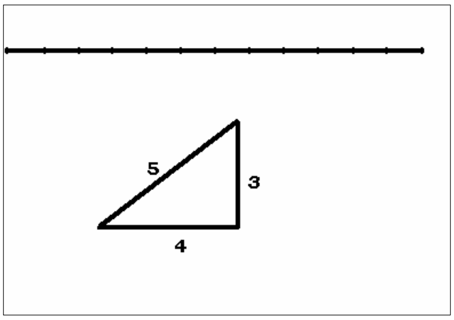
Sin embargo, no quiero dejar la impresión de que el Teorema de Tales es indemostrable. Para citar una referencia en castellano, sugiero consultar el libro **Geometría Elemental** de A.

V. Pogorélov (Editorial Mir, Moscú, 1974) que en su página 85 y siguientes contiene una excelente demostración, elemental y rigurosa, de este teorema. Por supuesto, muchos docentes podrán sostener que el tiempo y la energía dedicados a la adquisición de tal demostración excede las posibilidades de un curso elemental de Geometría Euclidiana. Queda en el criterio docente de cada profesor la elección de la vía de enseñanza de estos contenidos. Mi posición consiste en afirmar que la enseñanza de una demostración falsa no debe ser una vía aceptable.

3.- Pitágoras de Samos.

El trazado de ángulos rectos resultaba ser muy importante para la reconstrucción de la ***geo-metría*** de las parcelas del valle del Nilo, cuyos límites habían sido borrados por las periódicas inundaciones del gran río. Desde tiempo inmemorial se empleaba una herramienta simple:

Cuerda de 12 tramos,



una cuerda anudada para marcar doce tramos iguales. Alguien en la profundidad de la Historia había observado que formando un triángulo con ella de manera que los lados comprendieran respectivamente 3, 4, y 5 tramos, el ángulo opuesto al lado mayor resultaba ser recto. ¡Mucho más simple que usando regla y compás! Pero esto no podía ser producto de la casualidad. Alguna relación matemática debía existir entre estos números para asegurar que el triángulo fuera rectángulo. En la segunda mitad del Siglo VI a.C. Pitágoras, un discípulo indirecto de Tales que vivía en Samos, había formado un grupo filosófico-religioso que tomó el nombre de su líder, *los pitagóricos*. Comenzaron a detectar experimentalmente nuevas ternas de números enteros que podían realizarse como lados de triángulos rectángulos. La inducción y la posterior deducción llevó a Pitágoras a demostrar su famoso teorema geométrico. Este y otros descubrimientos ligados a propiedades de los números enteros (P. ej. la *música de las esferas celestiales*) hicieron que Pitágoras enunciara los fundamentos de una cosmología fundada en los números enteros y sus cocientes, los números racionales. Pero pronto descubrieron los pitagóricos que precisamente el famoso teorema brindaba un contraejemplo de primera mano a esta cosmología. Si dibujamos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan la unidad, la medida de la hipotenusa (es decir, $\sqrt{2}$) no es un número racional. Para salvar esta contradicción crearon la idea de *"magnitudes inconmensurables"*, es decir longitudes que no se pueden medir, o números que no existen. Un siglo después, las paradojas de Zenón de Elea terminaron de destrozar el atomismo aritmético de los pitagóricos. Al mismo tiempo, estas paradojas sembraron las ideas de *"sucesión infinita"* y *"límite"*, que muchos siglos más tarde darían origen al Cálculo Diferencial. Pero en el terreno de la Geometría otra vez la irrupción de los números irracionales hizo estremecer sus cimientos. Esta crisis solamente pudo resolverse gracias a la Teoría de las Proporciones de Eudoxo, discípulo y maestro de Geometría de Platón.

4.- Sócrates de Atenas.

Un siglo después, en la segunda mitad del siglo V a.C. aparece en Atenas Sócrates, hijo de un escultor y una partera, y una de las pocas cumbres intelectuales de la Humanidad. En toda su vida no escribió una línea, pero sus ideas perviven en los Diálogos, obra cumbre de su principal discípulo, Platón. Los Diálogos son conversaciones entre dos o más personas que discuten sobre un tema de interés filosófico. En uno de estos diálogos, el ***Menón***, Sócrates habla con un esclavo o sirviente, es decir una persona humilde aunque lúcida y sagaz. Le muestra una baldosa cuadrada y le pregunta si sería capaz de fabricar otra baldosa que tuviera la misma forma y el doble de la superficie de la que tienen. - *Es fácil* - dice el esclavo -

fabricaré una baldosa que tenga el doble de lado que esa. - Sócrates le observa que tal baldosa tendría una superficie cuádruplo de la original. Luego comienzan a razonar sobre la posibilidad de dividir diagonalmente la baldosa y agrupar esos triángulos para formar un nuevo cuadrado más grande. Finalmente el esclavo deduce que la solución consiste en construir una baldosa cuadrada cuyo lado sea la longitud de la diagonal de la baldosa original. Este diálogo nos deja dos enseñanzas, muy importantes:

- ✓ La figura básica de la discusión geométrica es esencialmente la misma que destruyó la cosmología pitagórica, un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario. Sócrates (o Platón) no siente ningún remordimiento por considerar un segmento de longitud $\sqrt{2}$. Es decir que los números irracionales son entidades aritméticas completamente aceptables. Recordemos que Platón convivía e intercambiaba enseñanzas con Eudoxo de Cnido que resolvió la crisis de la inconmensurabilidad.
- ✓ En este diálogo, tal vez mantenido hace veinticinco siglos, Sócrates nos enseña una metodología maravillosa para enseñar a pensar matemáticamente. La ***Mayéutica*** socrática es esa asombrosa secuencia de preguntas, respuestas y nuevas preguntas que logran extraer de la mente del alumno el conocimiento escondido y permiten que lo reconozca y se lo apropie. Este procedimiento convierte al docente en ***"partero de ideas"***. Recordemos que la madre de Sócrates era partera de niños. El filósofo trata de emular el noble trabajo de su madre, ayudando a sus discípulos en la difícil tarea de alumbrar nuevas ideas. Es mi opinión que el verdadero fundamento de la tan actual metodología de enseñanza mediante problemas debe buscarse en las ideas de Sócrates.

En los portales de su Academia, Platón hizo escribir: ***"No entre quién no sepa Geometría"***. Esto significa que el gran filósofo y educador reconocía que el buen aprendizaje de la Matemática dota al espíritu de una sutileza y profundidad que lo hacen apto para el estudio de la Filosofía. ¡Recordemos esto cuando enseñamos nuestros cursos!

5.- Borges de Buenos Aires.

Hemos observado a Buffalo Bill matando búfalos virtuales en sus sueños geométricos. Nos encontramos luego con un espacio vectorial sobre el cuerpo de los racionales y verificamos su paupérrima geometría. Tropezamos con una falsa demostración del Teorema de Tales que tal vez se enseñe todavía en nuestras escuelas. Saltamos junto a un eximio geómetra que intentó extrapolar su matemática para construir una cosmología ideal, pero fracasó ante la aparición del monstruo inconmensurable. Visitamos luego a dos cumbres de la filosofía que nos enseñaron cómo enseñar Matemática y nos mostraron que la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no es un pecado. En todos estos episodios irrumpen los números irracionales en medio de problemas esencialmente geométricos. Desde un punto de vista epistemológico esto confirma, una vez más, la profunda unidad ontológica y metodológica de la Matemática (escrita en singular), y nos pone de manifiesto que sus compartimentaciones son divisiones arbitrarias y tal vez innecesarias.

Reconozco que en mi personalidad siempre han estado presentes la faceta de investigador matemático y la del docente. Dejemos por un momento al matemático de lado y retomemos nuestra identidad de docentes. A modo de epílogo de este periplo, evoquemos a un poeta argentino, maestro de la palabra y amante de la Matemática, que nació hace un siglo y falleció hace poco más de una década. Jorge Luis Borges, en un hermoso poema en prosa llamado ***"Una oración"***, reflexiona sobre la condición del hombre y nos dice:

La libertad de mi albedrío es tal vez ilusoria, pero puedo dar o soñar que doy. Puedo dar el coraje que no tengo; puedo dar la esperanza que no está en mí; puedo enseñar la voluntad de aprender lo que sé apenas o entreveo."

No conozco una definición mejor de la tarea docente que la última línea de esta cita del poeta. Nada más. Gracias.

Reflexión sobre la Calidad de la Actividad Matemática en el Aula

Ismenia Guzmán R.
dimat@ucv.cl
Universidad Católica de Valparaíso
Chile

Resumen

Agradezco en primer lugar a la Comisión Organizadora de RELME-14 por la invitación que me ha hecho para dictar esta Conferencia y la oportunidad de compartir con tantos colegas latinoamericanos la problemática de la actividad matemática en el aula.

En esta Conferencia abordaremos el problema de la calidad de la actividad matemática propuesta en el aula. Nos referimos a la enseñanza elemental, media y primeros años de la enseñanza superior.

Este problema de la cantidad de la actividad matemática es un problema abierto y complejo, tiene que ver con la estructura misma de la actividad propuesta, sus consecuencias en el sujeto que aprende y con los criterios que se adopten para el análisis de la Actividad y de su Calidad.

Como este problema es un problema abierto, no pretendemos tener la última palabra, sino más bien se trata de plantearlo para invitar a una reflexión. Propondremos algunos puntos de vista para abordarlo y seguramente se podrían encontrar otros enfoques, plantearemos algunas interrogantes que pueden inspirar líneas de trabajo y finalmente ilustraremos parte de esta temática con una secuencia de actividades.

Calidad de la Actividad Matemática Escolar.

Desde nuestro particular punto de vista una actividad matemática propuesta en el aula es de calidad si permite al sujeto a quién se la propone "hacer matemáticas" y "alcanzar niveles de comprensión cada vez más complejos". Surgen entonces dos preguntas ¿que significa que el alumno haga matemáticas? y ¿logre niveles de comprensión cada vez más complejos? Para responder a estas interrogantes nos apoyaremos en la teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau y en la Teoría Cognitiva de Registros de Representación Semiótica de R. Duval. También consideraremos para el análisis la perspectiva del aprendizaje. Para que un alumno "haga matemáticas" y "logre niveles de comprensión cada vez más complejos se necesita de un escenario apropiado que permita que el trabajo del alumno simule el "trabajo de un matemático", ponga en juego sus potencialidades cognitivas y haga evolucionar su razonamiento. Desde la Teoría de Situaciones, simular el trabajo de un matemático significa enfrentar al alumno a un problema o a una pregunta o a una tarea, adecuada a su nivel es decir, que los objetos matemáticos involucrados estén a su alcance y tengan sentido y significado para él. Cuando la tarea que se plantea está al alcance del sujeto, él comprende de qué se trata y se sentirá desafiado. Entonces tratará de abordarla para responder, recurrirá a su experiencia, a sus conocimientos anteriores ya apropiados, a sus saberes hacer, a sus saberes culturales. La búsqueda de una respuesta implica ACCIONES del alumno auto interrogaciones, interrogaciones a sus pares, cuestionamientos, confrontaciones, toma de decisiones con el fin de producir o elaborar una respuesta. Cuando el alumno produce o elabora una respuesta él puede defenderla, puede hacerse responsable de ella, es decir la puede controlar y fundamentar. No necesariamente se trata aquí del aspecto formal, sino más bien del discursivo. En el aspecto discursivo consideramos la comunicación oral primero y luego escrita. El alumno explicará, describirá, argumentará de acuerdo a sus posibilidades y nivel de estudio, la tarea puede aumentar en exigencia e ir hacia una demostración matemática. La Teoría de Situaciones de G. Brousseau, modela en el ámbito escolar el "hacer matemáticas". Con la conocida situación de juego llamada "la carrera a 20", Brousseau ilustra su teoría y muestra cómo se puede lograr hacer "hacer matemáticas a niños". En su teoría el propone enfrentar a los alumnos sucesivamente a situaciones de Acción, Formulación, Validación. Es decir hacerlo seguir un proceso que tiene en cada fase nuevas tareas y exigencias. En la situación de Acción que se propone al alumno, no sólo hay preguntas que lo desafían a buscar respuestas a través de la acción, sino que además el alumno debe entrar en el juego de tal modo que se sienta comprometido a aceptar la responsabilidad de controlar la respuesta que produce. El profesor además de proponer una actividad que lo haga reaccionar le hace la devolución de una responsabilidad. Este juego entre en el alumno y el profesor es el proceso de devolución. Frente a las tareas que se propone al alumno este produce respuestas, las cuales el profesor no sanciona con el veredicto correcto o incorrecto sino que con preguntas pertinentes el profesor logra que el alumno mismo controle su respuesta.

En las fases siguientes de Formulación y Validación cuando corresponden, la elaboración de una respuesta tiene exigencias cada vez más complejas para el sujeto, pues necesita recurrir a sus posibilidades matemáticas, cognitivas y socioculturales. El proceso de enseñanza - aprendizaje se concibe en esta teoría como un juego de preguntas y respuestas en la perspectiva de una pedagogía heurística: Plantear buenas preguntas que motiven búsqueda de respuestas pertinentes (auto controladas) a distintos niveles de exigencia, dependiendo de la situación de que se trate. Se pone así en juego el proceso de devolución ya mencionado. El profesor devuelve una responsabilidad al alumno sobre el control de su respuesta. Lo correcto e incorrecto no pertenece solamente al ámbito del profesor sino también pertenece al del alumno. El sujeto que aprende no se contenta con esperar el veredicto del profesor. Surge la pregunta ¿cómo se puede devolver una responsabilidad? El proceso de devolución Brousseau lo operacionaliza en 5 tareas. Tarea 1: Lúdica. En la cual el alumno fácilmente tenga éxito. Tarea 2: Tomar una decisión. Esta tarea exige manifestar una preferencia, así el alumno tomará una decisión. Tarea 3: Exige una responsabilidad y una causalidad. Tarea 4: Se pide ahora una anticipación, la relación entre la decisión y el resultado debe vislumbrarse antes de tomar la decisión. El alumno realiza anticipaciones aunque no las domine, ellas se consideran de la responsabilidad cognitiva del jugador. Tarea 5: Se plantea una situación adidáctica, es decir una tarea que no es una tarea de aplicación de conocimiento específico, sino una tarea de búsqueda de un conocimiento nuevo el cual aparecerá como una necesidad.

Ejemplificaremos parte de este proceso con una secuencia de actividades al final de nuestra charla. Desde un enfoque cognitivo. Retomemos el problema de la calidad de la actividad y el logro de niveles de comprensión cada vez más complejos desde el enfoque cognitivo de R. Duval. Para ello es necesario distinguir las tareas matemáticas de las tareas cognitivas. Muchas veces en una tarea matemática hay superpuesta una tarea cognitiva, que dificulta a la primera, y por ende, el nivel de comprensión de los objetos matemáticos en juego. Esta situación se dificulta aún más en razón de que los objetos matemáticos no son accesibles por los sentidos, como los son los objetos de otras disciplinas. Es por esto que la Matemática recurre a diferentes formas de representación semiótica para presentar, exhibir y expresar sus objetos. Se hace necesario entonces en el proceso de enseñanza tomar en cuenta los diferentes registros de representación semiótica de uso frecuente en matemáticas. La actividad cognitiva señala R. Duval implicada en las estrategias matemáticas tiene dos características fundamentales. Primera, el hecho que los objetos matemáticos no existan en el mundo real no permite que sean accesibles por percepción. Segunda, la necesidad de una representación semiótica. Esto es, se necesitan representaciones de los objetos matemáticos para acercarse a ellos y aún más, un objeto matemático necesita de varias representaciones de sí mismo para dejar ver su potencia y alcance. Cada representación pertenece a un sistema de signos propios que R. Duval llama registro de representación simiótica. La Matemática recurre a ellos en forma natural y sobre todo hace funcionar la coordinación entre ellos. Por ello una tarea cognitiva importante y esencial para la comprensión de los objetos matemáticos es el pasaje entre diferentes registros de representación es decir, coordinar dos registros diferentes. Lo que significa poner en correspondencia dos representaciones de un mismo objeto, identificando índices pertinentes en cada una de las representaciones que se corresponden. En la proposición de una actividad matemática en el aula debe tenerse en cuenta este aspecto para enfatizar la distinción entre la representación de un objeto y el objeto mismo. De aquí la importancia en el tratamiento de las materias a la hora de proponer actividades, del trabajo con al menos dos registros de representación incluida o no la lengua natural.

El trabajo con códigos, diagramas, gráficos, notaciones, símbolos; la traducción en el lenguaje materno de los significados de estas expresiones son fundamentales para la comprensión. Sobre todo los pasajes de una representación a otra, que implica la distinción de los signos utilizados en una representación y la coordinación de ellos, con los pertinentes de la representación en correspondencia. Por ejemplo, ante una situación de Formulación (que sigue a una situación de acción) la tarea es de comunicación escrita, se trata de proponer al alumno la tarea de expresar por escrito o utilizar alguna representación (de las acordadas en clase) lo que antes ya ha expresado y explicado oralmente. La formulación necesita de códigos, de símbolos, de frases que deben respetar reglas relativas al registro de la lengua natural o formal o del registro de representación que se está utilizando. Si se recurre a figuras o esquemas hay otras reglas que respetar. Este respeto a reglas es una exigencia mayor para los alumnos. Pues, si se pide a los alumnos explicar cómo han realizado una determinada tarea, ellos pueden explicar espontánea y fácilmente en forma oral los pasos seguidos, pueden describir acciones. Pero si se les pide formular o escribir el procedimiento realizado para resolver tal tarea, se trata de una tarea más compleja, pues es mucho más difícil escribir que hablar. Es necesario en el lenguaje natural elegir las palabras adecuadas coordinarlas en frases, entendibles. De modo que la formulación resulte coherente, sea comprendida y además sea socialmente aceptada por sus pares. Si la formulación se pide en lenguaje formal, entonces hay otras condiciones que respetar.

Falta todavía otra etapa del proceso, la Validación. Aquí la situación es más compleja aún, porque hay que pronunciarse sobre la validez de lo formulado. La tarea que se pide en situaciones de validación consiste en probar la veracidad de las proposiciones formuladas en escritura natural, formal u otra. Aparece aquí la necesidad de prueba. Tarea esencial en Matemáticas. Los distintos tipos de situaciones de Acción, Formulación y Validación constituyen un proceso que favorece el aprendizaje y también el desarrollo de líneas de pensamiento cada vez más complejas. Puede abarcarse una amplia gama de posibilidades, desde lo pragmático hasta el razonamiento deductivo sobretodo en la enseñanza media y superior.

Punto de vista del Aprendizaje. La actividad matemática en el aula se puede enfocar también desde la perspectiva del aprendizaje ¿Qué aprende el alumno con la actividad propuesta? ¿Qué conocimientos (antiguos) ya adquiridos está poniendo en juego?¿Qué conocimientos surgen de esta actividad? ¿Qué formas de comportamientos está poniendo en juego? ¿Qué formas de pensamiento está poniendo en juego? ¿Se podría describir el grado de comprensión que alcanza? ¿Cómo?¿Con qué señales?. Cada una de estas preguntas podría permitir plantear criterios para clasificar actividades. Pero notar que estas preguntas están del lado del aprendizaje de lo matemático. Planteemos otras preguntas desde la perspectiva del aprendizaje pero del lado de lo cognitivo implicado en la actividad matemática. ¿Cómo aprender a no confundir un objeto (matemático) con una representación que se hace de él? ¿Están los objetos matemáticos en juego representados en dos registros diferentes? ¿Qué pasajes de registros se privilegian? ¿Qué tareas de pasajes entre dos representaciones favorecen la comprensión?. El pasar de un registro a otro no es una actividad espontánea entonces ¿Cómo aprender a cambiar de registro?. En las tareas de pasajes entre registros diferentes se presentan los fenómenos de congruencia y de no congruencia entre las representaciones. La no congruencia es una tarea más exigente, y entonces se presta muy bien para elevar los niveles de comprensión. ¿Se tienen en cuenta los fenómenos de no congruencia en las actividades propuestas?.

Todas estas interrogantes son una ayuda para clasificar la actividad matemática según el criterio de calidad que hemos tratado aquí. No podemos ilustrar todos estos planteamientos con ejemplos, no obstante presentaremos como ejemplo una secuencia de actividades la cual queda muy por debajo de las ideas que hemos tratado, pero los ejemplos siempre algo ayudan a clarificar ideas. Ejemplo de una secuencia de actividades sobre Potencias. Estas actividades permiten visualizar algunas de las ideas planteadas sobre el proceso de devolución. Actividad 1 (de descubrimiento) Tomar una hoja de papel (espesor aproximado de 0,1 mm). Dóblela en dos,¿cuál es el espesor?. Dóblela nuevamente en dos ¿qué obtiene? Efectúe 7 pliegues, ¿cuál es el espesor ahora?. Actividad 2 Estime el espesor de papel obtenido después de 20 pliegues. Verifique mediante cálculos. Puede apoyarse con una tabla. Actividad 3 Al cabo de cuántos pliegues, el espesor del papel sobrepasaría los 2 m?, los 340 m? (la altura de la torre Eiffel). Actividad 4 Explicitar el concepto que se ha encontrado, con palabras y con símbolos. Escribir una definición. ¿ Para qué sirve este nuevo concepto? ¿Dónde y con quién vive?.

Referencias bibliográficas

Brousseau G. Théorie des Situations didactiques.Pensée Sauvage.1998.

Duval R. Quel cognitif pour la didactiques de mathématiques. RDM. Vol 16. 1996.

Guzmán I. Le rôle de répresentations dans l´appropriation de la notion de fonction. Thése de doctorat. U.L.P. Strasbourg. 1990.

Educación y Nuevas Tecnologías

MSc. Yolanda de Jesús O'Farrill Dinza.
yoly_cu@yahoo.com
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. ISPJAE
La Habana. Cuba

Resumen

El desarrollo acelerado en Tecnologías de la Información y la Comunicación imponen en el ámbito educativo, transformaciones constantes para adecuarlo a las necesidades crecientes. Este desarrollo determina cambios en la educación, no sólo en cuanto a su forma, sino también en su contenido. Ante estos surgen numerosas interrogantes: ¿Transformarán radicalmente las Nuevas Tecnologías la manera en que tiene lugar la educación?. ¿Qué papel corresponde cumplir a la escuela?. ¿Está la escuela suficientemente preparada para asumir este reto tecnológico en la formación de las futuras generaciones?. ¿Sustituirán las Nuevas Tecnologías de Enseñanza al maestro en las aulas o se integrarán a la actividad del educador en el marco del proceso de enseñanza aprendizaje?

Introducción.

El desarrollo de las Nuevas Tecnologías de la Información y su incidencia en el mundo cultural necesita a la vez que provoca, una reacción que desde el campo de la educación proporcione un reajuste de las funciones que unos y otros han de cubrir en la sociedad.

Uno de los fenómenos más espectaculares de esta sociedad es, sin duda alguna la aplicación generalizada de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación a todos los ámbitos de nuestras vidas. Miremos donde miremos, en todos nuestros espacios, tiempos y actividades, allí están. En muchos casos se encarnan en su objeto por excelencia: el ordenador (ahora ya por supuesto conectado a Internet) y la aparición de este en nuestro puesto de trabajo, en las tiendas donde compramos, en nuestras casas y por todas partes tiene más implicaciones de las que a primera vista parece. Están cambiando nuestra manera de hacer las cosas, de trabajar, de aprender y, de modo sutil, también nuestra forma de pensar.

La relación del ser humano con la tecnología es menos simple de lo que parece. Por un lado, la utilizamos para transformar nuestro entorno, para adaptarlo a nuestras necesidades, pero acaba transformándonos a nosotros mismos y a la sociedad.

Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El paradigma de las nuevas tecnologías son las redes informáticas. Los ordenadores aislados ofrecen una gran cantidad de posibilidades, pero conectados incrementan su funcionalidad. Formando redes, los ordenadores no sólo procesan información almacenada en los soportes electrónicos en cualquier formato digital, sino también como herramienta para acceder a recursos y servicios prestados por ordenadores remotos y como sistema de publicación y difusión de la información. Y el paradigma de las redes informáticas es Internet. Una única red que conecta millones de personas, instituciones, empresas, centros educativos, etc. de todo el mundo. Internet es una maqueta a escala de la futura infraestructura de comunicaciones, una red que integrará todos los sistemas separados de los que hoy disponemos (TV, radio, teléfono, etc.) ampliando sus posibilidades y creando nuevos sistemas que hoy ya se utilizan en Internet como es por ejemplo la videoconferencia.

Jamás el ser humano ha dispuesto de tanta información y tan diversa como ahora. Uno de los fenómenos más interesantes a los que está asistiendo nuestra generación, por sus enormes implicaciones, es un cambio radical en los códigos que utilizamos para almacenar, procesar, trasmitir y acceder a la información. El término clave es "digitalización". Este cambio en la manera de codificar la información nos permite almacenarla en grandes cantidades en objetos de tamaño reducido o, lo que es más revolucionario, liberarla de los objetos y hacerla residir en espacios no topológicos (el ciberespacio), como las redes informáticas accesibles desde cualquier lugar del mundo. También podemos reproducirla sin merma de calidad de modo indefinido, enviarla instantáneamente a cualquier lugar de la tierra y manipularla en modos que nuestros antepasados ni siquiera soñaron. La digitalización de la información está cambiando el soporte primordial del saber y el conocimiento y con ello no sólo cambiará nuestros hábitos y costumbres sino también nuestra forma de pensar, de hecho ya está sucediendo.

Algunas consecuencias y repercusiones de las nuevas tecnologías.

Las consecuencias de todos estos avances las estamos viviendo día a día. Sólo destacaremos brevemente algunas, para centrarnos, a continuación en sus repercusiones educativas.

La primera y, tal vez la más evidente, es una explosión en la cantidad de información. Un fenómeno que no es nuevo, pero que en las últimas décadas está tornándose más fuerte. Se calcula que, al principio de la historia humana costaba de 10 000 a 100 000 años doblar el conocimiento. Hoy cuesta menos de 15 años. En algunos campos del saber, cada 5 años se hace necesario revisar las acreditaciones académicas: una persona que no haya estudiado lo producido en los últimos 5 años no está ya capacitada para desempeñar su profesión. Cualquier profesional que quiera mantenerse al día sobre el desarrollo de su profesión sabe las horas que debe dedicar al estudio.

Un efecto asociado a esta explosión, es el aumento de ruido en la comunicación.

Hoy tenemos mucha información, pero, ¿estamos mejor informado? El problema ya no es conseguir información sino seleccionar la relevante entre la inmensa cantidad existente.

Por otro lado las nuevos lenguajes audiovisuales han dado lugar a una cultura de la imagen en movimiento para la que, por ejemplo, la escuela, una institución primordialmente oral-libresca no nos prepara.

La educación debe dar una respuesta a estos problemas.

La segunda consecuencia de la ampliación de nuestra capacidad para codificar, almacenar, procesar y trasmitir todo tipo de información es la transformación radical de dos condicionantes fundamentales en la comunicación: el espacio y el tiempo. Ambas están muy relacionadas. No en vano nuestros abuelos utilizaban unidades de tiempo para expresar distancias. Las nuevas tecnologías han “desmaterializado”, deslocalizado y globalizado la información al situarla en el ciberespacio (alucinación consensual formada por todos los bancos de datos de todos los ordenadores del mundo conectados entre si) y han eliminado los largos tiempos de espera para que el mensaje llegue del emisor al receptor. Hemos pasado de una cultura basada en el átomo a una basada en el bit. Mover un átomo es caro y lento, mover bits es rápido y barato.

Basta pensar en el tiempo y costo de enviar un libro por correo aéreo a enviarlo por correo electrónico. Las implicaciones de este cambio son enormes ya que las coordenadas espacio-temporales son el marco de toda actividad humana. Las redes informáticas rompen con la necesidad para los participantes en una actividad de coincidir en el espacio y en el tiempo; este hecho desafía la manera en que hacemos la mayor parte de las cosas.

Una Empresa, una Universidad, un Parlamento, etc. se basan en la necesidad de unir a un grupo de personas en un tiempo y espacio comunes para realizar actividades en los que interactúan entre sí. Esto no significa que todo lo que hacen las personas en estos entornos pueda realizarse a distancia, pero muchas de nuestras actuales formas de hacer las cosas datan de cuando la manera más rápida de llegar la información de un lugar a otro era llevarla galopando a caballo.

Una tercera característica de las nuevas tecnologías de la información que tiene enorme importancia en educación es la interactividad, es decir, la posibilidad de que emisor y receptor intercambien sus respectivos roles. Los medios de comunicación de masas tradicionales, especialmente los periódicos la radio y la televisión, definen los papeles de los participantes de modo estático: por un lado el productor/distribuidor de la información y por el otro el cliente/consumidor de la información. Unos pocos emisores centralizados, que precisan recursos costosos, difunden mensajes estandarizados a una masa de receptores/consumidores pasivos y dispersos (¿es eso comunicación?, para mi es sólo información).

Los nuevos medios se caracterizan por todo lo contrario. La inteligencia de las redes está distribuida entre los nodos y pasar de la comunicación persona a persona a la comunicación de masas es sumamente sencillo. De hecho, la masa indiferenciada creada por los medios de "comunicación" tradicionales desaparece para dar paso a grupos de interés e individuos que interactúan entre sí formando comunidades virtuales, y que sólo consumen información, sino que también la producen y distribuyen.

Estos avances tecnológicos tienen lugar dentro de un determinado marco socioeconómico que hacen posible el desarrollo en universidades.

Desde hace aproximadamente veinte años, y en varias oleadas, la sociedad de la información ha sido un tema recurrente en disciplinas diversas que van desde la sociología, la política y la economía. En los últimos tiempos comienza a hablarse del tema en ámbitos educativos.

La educación en la sociedad de la información.

La educación es un sector tradicionalmente poco dado a novedades y cambios. En el primer informe del Foro de la Sociedad de la Información a la Comisión Europea se afirma "El cambio hacia la sociedad de la información se produce a una velocidad que la persona sólo podrá adaptarse si la sociedad de la información se convierte en la sociedad del aprendizaje permanente"

El sistema educativo no es precisamente un ambiente en que la tecnología tenga un papel relevante para las tareas que allí se realizan. Es más sus participantes y salvo honrosas excepciones se han mostrado bastante reacios a incorporar novedades en su estilo de hacer las cosas. Tuvieron que pasar 35 años desde que comenzaron a utilizarse retroproyectores en las boleras para que los centros educativos los emplearan de modo generalizado. Sin embargo, la actual revolución tecnológica afectará a la educación de múltiples formas. Por el momento un ejemplo cercano a nuestro contexto son los diversos documentos, estudios, congresos, etc. auspiciados por la Unión Europea. En casi todos ellos se destaca un hecho importante: la sociedad de la información, afirman los expertos, será la sociedad del conocimiento y del aprendizaje.

Hay varias ideas fundamentales sobre el papel de las nuevas tecnologías en la educación de la sociedad de la información que es necesario destacar.

El ritmo de cambio: aprendizaje a lo largo de toda la vida.

En primer lugar, el ritmo de cambio es tan rápido que los sistemas de formación inicial no pueden dar respuesta a todas las necesidades presentes y futuras de la sociedad. Hace años que lo sabemos y que somos conscientes de que la formación debe prolongarse durante toda la vida, que el reciclaje y la formación continuada son elementos clave en una sociedad que cambia tan rápidamente. Sin embargo, ahora es, tal vez, mucho más evidente que antes. Por eso en la sociedad de la información deberán crearse los mecanismos necesarios para que dicha formación continuada alcance a la gran cantidad de personas que van a necesitar nuevos conocimientos, habilidades y destrezas. En este punto, las nuevas tecnologías tiene un papel relevante, no sólo como contenido, sino como medio para la formación.

Nuevos entornos de enseñanza.

Un segundo aspecto relacionado con el anterior hace referencia a la ampliación de los escenarios educativos. La formación y el reciclaje, en tanto que elementos estratégicos para la competitividad, estarán cada vez más presentes en la vida laboral de los trabajadores. La formación en el puesto de trabajo o en el hogar (que será también el puesto de trabajo de muchos) se combinarán con la recibida en las instituciones tradicionales. Estos escenarios plantean desafíos técnicos y pedagógicos a los que los profesionales debemos responder. En primer lugar, los roles de los profesores, alumnos y personal de apoyo deben adaptarse a los nuevos entornos.

Las nuevas tecnologías no sólo van a incorporarse a la formación como contenidos a aprender o como destrezas a adquirir. Serán utilizados de modo creciente como medio de comunicación al servicio de la formación, es decir, como entornos a través de los cuales tendrán lugar procesos de enseñanza-aprendizaje. Las aulas virtuales, la educación en línea a través de redes informáticas, es una forma emergente de propiciar conocimientos y habilidades a amplios sectores de la población. Los sistemas asíncronos de comunicación mediada por ordenador proporcionarán la flexibilidad temporal necesaria a las actividades para que puedan acceder a la formación aquellas personas con dificultades para asistir regularmente a las instituciones educativas presenciales debido a sus obligaciones laborales, familiares o personales. La desaparición del espacio físico en estas nuevas modalidades de formación creará un mercado global en los que las instituciones educativas tradicionales competirán entre sí y con nuevas iniciativas.

El desafío es utilizar la tecnología de la información para crear en nuestras escuelas un entorno que propicie el desarrollo de individuos que tengan la capacidad y la inclinación para utilizar los vastos recursos de la tecnología de la información en su propio y continuado crecimiento intelectual y expansión de habilidades. Las escuelas deben convertirse en lugares donde sea normal ver a los estudiantes comprometidos en su propio aprendizaje.

Esta transformación choca frontalmente con una serie de concepciones y creencias fuertemente establecidas sobre la escuela, la escolarización y la nueva visión del conocimiento y del aprendizaje promovida por las nuevas tecnologías. Incluidos en este cambio están, sin duda, los roles desempeñados por los participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la dinámica de creación y diseminación del conocimiento y muchas de nuestras prioridades actuales.

Nuevos roles para las instituciones educativas.

La deslocalización de la información y la disponibilidad de nuevos canales de comunicación tendrá efectos notables en las instituciones educativas tradicionales. El más evidente es la globalización de algunos mercados educativos. Es posible que en breve, muchas instituciones compitan en un renovado mercado de formación a distancia través de las redes telemáticas. La perspectiva tradicional de la educación a distancia está cambiando a pasos agigantados. Las redes no sólo sirven como vehículo para hacer llegar a los estudiantes materiales de auto estudio (sustituyendo al cartero), sino para crear un entorno fluido multimedia de comunicación entre profesores y alumnos y, tal vez lo más necesario en la actualidad, entre los propios alumnos. Clases a través de videoconferencias, entorno de trabajo en grupo, distribución por línea de los materiales multimedia, etc. son habituales en la educación a distancia. Aplicaciones de este tipo ya funcionan. Ahora sólo es necesario que las infraestructuras de comunicaciones lo permitan de modo generalizado.

Existen instituciones que ofrecen formación presencial las cuales están comenzando a utilizar las nuevas tecnologías como recurso didáctico y como herramienta para flexibilizar los entornos de enseñanza-aprendizaje. No es descabellado pensar en programas mixtos, en los que los estudiantes asisten a unas pocas clases y siguen formándose en sus casas o puestos de trabajo a través de los recursos por línea de la institución accediendo al equipo de profesores cuando lo necesite. Este grado de flexibilidad permitirá que muchas personas con obligaciones diversas puedan seguir formándose.

Las instituciones que no tomen medidas inmediatamente van a verse relegadas a un segundo plano. Las instituciones dinámicas con experiencias en las nuevas tecnologías serán las más competitivas en breve plazo.

Nuevos roles para profesores y estudiantes.

Los nuevos entornos de enseñanza-aprendizaje exigen nuevos roles en profesores y estudiantes. La perspectiva tradicional en educación superior, por ejemplo, del profesor como única fuente de información y sabiduría de los estudiantes como receptores pasivos debe dar paso a papeles bastantes diferentes. Cualquier estudiante universitario, utilizando Internet, puede conseguir información de la que su profesor tardará meses en disponer por los canales tradicionales. La misión del profesor en entornos ricos en información es la de facilitar, la de guía y consejero sobre fuentes apropiadas de información, la de creador de hábitos y destrezas en la búsqueda, selección y tratamiento de la información. Los estudiantes, por su parte, deben adoptar un papel más activo en su formación, no como meros receptores pasivos de lo generado por el profesor, sino como agentes activos de la búsqueda, selección y procesamiento de la información.

Por otra parte, los nuevos canales abren un frente en los conocimientos y destrezas del profesor. Debe utilizarlos y ayudar a sus a estudiantes a utilizarlos, como una herramienta más. De hecho, en muchas universidades, los profesores atienden sus tutorías también por correo electrónico, tienen páginas web con los programas de sus asignaturas y las lecturas recomendadas (si están disponibles en formato electrónico) y utilizan los nuevos canales como medio de comunicación y para reforzar la interacción del grupo de estudiantes entre sí. Las telecomunicaciones abren grandes posibilidades. Los estudiantes de una institución pueden acceder a través de las redes a publicaciones, actas de congresos y simposios, etc., pero también a profesores y expertos de otras instituciones, con los que intercambian ideas y opiniones.

Nuevos materiales de enseñanza-aprendizaje.

La digitalización y los nuevos soportes electrónicos están dando lugar a nuevas formas de almacenar y presentar la información. Los tutoriales multimedia, las bases de datos en línea, las bibliotecas electrónicas, los hipertextos distribuidos, etc., son nuevas maneras de presentar y acceder al conocimiento que superan en determinados contextos las formas tradicionales de la explicación oral, la pizarra, los apuntes y el manual. No es necesario explicar las bondades de las simulaciones de procesos, la representación gráfica, la integración de texto, imagen y sonido o de la navegación hipertextual. En el futuro estos tipos de soportes serán utilizados de forma creciente en todos los niveles educativos. Las herramientas de autor permitirán que los profesores desarrollen sus propias aplicaciones para la enseñanza.

Un ejemplo del proceso que estamos viviendo es cómo se están transformando las bibliotecas universitarias, de simples depósitos de libros y revistas con salas de lectura anexas, están a ofrecer múltiples fuentes de información electrónica. El primer paso fue la adquisición de bases de datos en CD ROM. Ahora, el paradigma de la biblioteca electrónica, en la que las fuentes de información están en formato electrónico y almacenadas en dispositivos accesibles desde cualquier lugar de la red, se ha impuesto.

“Si no formas parte del futuro eres historia”

Las redes informáticas nos ofrecen una perspectiva muy diferente de la del ordenador solitario. En principio rompen el aislamiento tradicional de las aulas, abriéndolas al mundo. Permiten la comunicación entre las personas, eliminando las barreras del espacio y el tiempo, de identidad y de estatus. Pero, el mayor potencial de las nuevas tecnologías de la información en la educación reside no sólo en lo que aportará a los métodos de enseñanza-aprendizaje actuales, como en el hecho de que están transformando radicalmente lo que rodea a las escuelas, es decir, el mundo. Están cambiando cómo trabajamos cómo nos relacionamos, cómo pasamos nuestro tiempo libre, nuestros modos de percibir y relacionarnos con la realidad. La disociación entre una escuela oral-librezca y la realidad externa es un hecho.

Todas las instituciones sociales son producto de su evolución histórica y de su adaptación sucesiva las demandas del medio. Surgieron para cubrir alguna necesidad histórica y han cambiado con el, adaptándose a las transformaciones sociales. Las que no lo han hecho han acabado desapareciendo.

La “utopía informativa” de la sociedad de la información es que toda la información esté al alcance de cualquiera, en cualquier momento y lugar. Esto es lo que se denomina deslocalización o globalización de la información. Acceder pues no será problema, puede que el verdadero problema de la sociedad de la información sea la saturación, la sobrecarga cognitiva que implica escoger lo importante. Pero educación es mucho más que poseer información: es también conocimiento y sabiduría, hábitos y valores, y esto no viaja por las redes informáticas. Los profesores tendremos que redefinir nuestros papeles, sobre todo si seguimos viéndonos a nosotros mismos sólo como “proveedores de información”. Y lo haremos en instituciones que asumirán los nuevos canales como medios para proporcionar, también, los servicios que ahora prestan “presencialmente”.

Referencias bibliográficas

ADELL, J. (1995): "Educación en la Internet"**. Universitas Tarraconensis**, Serie IV, Vol. Extraordinari XX Setmana Pedagógica (ISSN 0211-3368), pp. 207-214.

ADELL, J. y GISBERT, M. (1997): "Educación en INTERNET: el aula virtual". **Temps d'Educació**. (En prensa).

BUSH, V. (1945). **As We May Think**, Atlantic Montly, 176/1, July, pp. 101-108.

COMISION EUROPEA (1996): **Building the European Information Society for Us All**. First Reflections of the High Level Group of Experts. Interim Report. January.(http://www.ispo.cec.be:81/files/)

COTTON, B. y OLIVER, R. (1993). **Understanding Hypermedia**. London. Phaidon Press.

DWYER, D., BARBIERI, K. y DOERR, H.M. (1995). "Creating a Virtual Classroom for Interactive Education on the Web". **Proceedings of the Third International World-Wide Web Conference**. Darmstadt, Germany, April 1995.

EC Report (1994): **Europe and the Global Information Society: Recommendations to the European Council**. Brussels.

GISBERT, M. (1996): Recursos Educativos distribuidos: INTERNET. **Power Science.** Pp. 19. Nº 5.

GISBERT, M. et. al. (1996): Training Teachers with Hypertext: using HTML and INTERNET tools as didactic resources. **The Internet: Transforming Our Society Now**. INET'96. Pp.73 (book of Abstracts). Editat en CD-ROM. Montreal. Canadá.

GONZALEZ, A-P.; GISBERT, M. I alt. (1996): Las Nuevas Tecnologías en la educación. **Redes de comunicación, redes de aprendizaje**. Pp. 409-423.

MAYES, T., et al. (1990): **Learning about learning from hypertext**. (Designing Hypermedia for Learning). NATO ASI Series, Vol. F67. Springer Verlag.

NIELSEN, J. (1990). **Hypertext and Hypermedia**. Academic Press: San Diego, CA.

SIMPSON A. y MCKNIHT, C. (1990): "Navigation in hypertext: structural cues and mental maps". In McAleese, R. y Green, C. (Eds.). **Hypertext: State of the Art**. Oxford, England: Intellect.

Una Ojeada a la Educación Matemática con un enfoque Historicista, Dialéctico y Humanista

Carlos Sánchez Fernández
Universidad de la Habana
Cuba

La educación enseña un camino a seguir, pero no puede vender dogmas.
***Fernando Savater** (2000)*

Las últimas cuatro décadas han significado mucho para la Educación Matemática. Los que durante este tiempo hemos profesado el Arte y la Ciencia de la Matemática hemos desarrollado una singular experiencia. La apropiación del legado de esta experiencia tiene que revestirse de una fuerza y expresión crítica renovadora para enfrentar los retos de la necesaria utilización racional de la innovación tecnológica.

El nuevo milenio esta urgido de personalidades desarrolladas de manera multiforme y armoniosa, con una especial capacidad de adaptación necesaria para enfrentar un panorama de cambios perennes. La nueva economía valora sobre todo a los talentos que combinan las competencias que demanda el puesto, su imbricación en la cultura de la empresa y la calidad humana que se mide con la llamada ***inteligencia emocional***[1]. Ahora, mas que nunca antes, los encargados de formar al nuevo tipo de profesional de la sociedad digital, tenemos que comprender no sólo la función instrumental de la Educación Matemática, sino especialmente, en toda su amplitud y profundidad, su ***función cultural y social***.[2] Para responder a estas nuevas exigencias se han expuesto diversos modelos epistemológicos y didácticos no tradicionales[3]

Nuestro objetivo es conformar alternativas que nos permitan, a partir de nuestras propias concepciones, realizar el entrenamiento intelectual con los contenidos, incidir en el desarrollo de la personalidad y la creatividad de los educandos, sin descuidar la preparación de estos para su feliz inserción en la sociedad del próximo milenio. El marco referencial pedagógico que buscamos tendrá un grado tal de amplitud y generalidad que pueda ser aplicado a cualquier nivel académico, y su novedad no puede impedir el uso efectivo del tradicional entrenamiento intelectual que permite acometer, con eficacia y competencia, los disímiles problemas que aparecen en las condiciones de la revolución informática. Nuestra propuesta nos debe facilitar, además, hacer hincapié en la formación de una actitud crítica y axiológica. ***Friedrich Nietzsche,*** filósofo del siglo XIX, dijo: *El que tiene un por qué para vivir puede soportar casi cualquier cómo;* nosotros parafraseamos a Nietzsche diciendo: *El que tiene un por qué para enseñar y es consciente de para quién enseña, puede utilizar casi cualquier cómo.* Lo que nos falta esencialmente para conseguir el ***cómo*** adecuado, es el impulso que nos daría comprender mejor las preguntas primordiales de ***¿por qué? y ¿para quién?***

En nuestra exposición pretendemos estimular reflexiones que favorezcan el cambio metodológico que necesitamos. Hemos distinguido tres elementos fundamentales, concebidos no como independientes, sino en interacción sinérgica: ***la perspectiva historicista, la concepción humanista y la metodología dialéctica.***

---

[1] El texto mas completo es el de Goleman (1996). Ver también la exposición muy documentada de Gómez Chacón (2000)
[2] Una muestra del interes por los aspectos culturales y sociales en la Educación Matemática es el desarrollo de las ideas sobre etnomatemática del Profesor Ubiratam D'Ambrosio (ver p.e. D'Ambrosio 1996). También reconforta leer la conferencia plenaria que el Presidente del ICMI brindara en el Congreso Internacional de Ed. Mat. (De Guzmán 1998)
[3] ver p.e. una resumida valoración de las tendencias de las ultimas décadas en Colectivo de autores (1991) y Sierpinska, A.; Lerman, S (1996).

De la perspectiva historicista

Durante una gran parte de este siglo imperó en el pensamiento científico un cierto **paradigma positivista** que nos alejaba consciente o ingenuamente del enfoque histórico de la Educación Científica. Creo que en la Matemática esto fue aún mas grave. El desarrollo de las llamadas escuelas de pensamiento matemático, entiéndase logicismo, intuicionismo y formalismo, que dieron paso al estructuralismo bourbakista a comienzos de la década de los años 40, reflejaron una nociva tendencia a subvalorar el análisis crítico de los factores históricos y socioculturales, factores que eran concebidos como *impurezas* del saber erudito. Cuando aquellas tesis comenzaron a tambalearse arremetidas por el mismo progreso de la Matemática, y se hizo necesaria una actitud mas crítica, surgieron corrientes dentro del propio neopositivismo que pusieron en solfa aquella *asepsia* por insostenible e inconsecuente. Poco a poco, comenzó a comprenderse que *muchas veces la impureza suele ser más fértil que la asepsia*. Así fue que en la Filosofía y la Sociología de la posguerra se fue haciendo más necesario traspasar el corsé del *contexto de justificación* para reconocer que el conocimiento científico es producido, aceptado y, también, justificado, por seres humanos y que el proceso de producción de tal conocimiento y las condiciones de posibilidad del mismo son algo mas que un mero escenario. Así se produce una suerte de *giro cognitivo* y los estudios sobre la naturaleza de la Matemática dejan de respetar la ilusoria división del trabajo impuesta por los contextos de justificación y descubrimiento... comenzaron los intentos de establecer relaciones causales entre los enunciados matemáticos y las condiciones históricas y sociales de su producción. Esta necesidad que comenzara en los estudios teóricos de la Matemática, poco a poco fueron encontrando eco en la labor educativa y el paradigma *bourbakista* dogmático y formalista, dio paso a una concepción más crítica en la conformación de ideas sobre la producción del conocimiento matemático y, a la vez, más flexible en la formulación de las teorías.

Los mas de 30 años de enseñanza tradicional formalista, muchas veces han inducido a profesores de diferentes niveles, a decir que con el enfoque historicista se pierde el rigor y el tiempo necesario para profundizar en los contenidos. Ni se puede olvidar que el rigor posee una historicidad implícita, ni que el nuevo estilo de pensamiento en la era digital nos exige enseñar menos con mas calidad. El enfoque historicista si es aplicado sin ***abusos***[4] no impide el tratamiento riguroso y profundo que amerite un asunto, sino que su uso crítico y adecuado facilita la eliminación de la nefasta y popularizada idea de que las matemáticas son formales y aburridas. Y como he oído muchas veces decir al Profesor Ubiratam D'Ambrosio: *Las Matemáticas no fueron hechas para aburrir a nadie*[5]

Vamos a ilustrar con el tema de ***Medidas*** que aparece en todos los niveles escolares. A nivel primario y secundario se enfoca operativa y formalmente en la enseñanza de fórmulas de áreas y volúmenes, no se plantea la raíz histórica en los problemas de cuadraturas y curvaturas de la antigüedad greco-latina, llena de ingeniosos razonamientos, originales herramientas y situaciones paradójicas; ni se refiere la articulada relación con antiguos y sabrosos problemas "irresolubles racionalmente" como la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo. Los textos, que en este nivel son definitorios, no han incorporado el historicismo de manera orgánica y consecuente, y solo pocos, en el mejor de los casos, presentan anécdotas y citas biográficas, sin explotar el valor heurístico y ético de los sucesos relatados, en fin se convierte realmente en un parche que atenta con la consecución de los objetivos en el reducido tiempo asignado.[6]. Si vamos al nivel universitario, entonces vemos que se explica primero el concepto de integral, como operación inversa de la derivación y, a posteriori, sin ninguna sustentación metodológica, obviando las enseñanzas de la historia, se

[4] ver p.e.nuestra ponencia en el HPM que se realizara en Blumenau (94) Sánchez Fernández, C. 1995)

[5] me gusta como suena, de manera mas enfática, en portugués: *As Matemáticas nao foram feitas para chatear ninguém*

[6] ver p.e. los resultados de una investigación que orientamos en Recife, Pernambuco, desarrollada por el profesor de enseñanza secundaria De Barros Oliveira, M. (1999). Según se pudo confirmar la casi totalidad de los textos bajan en paracaídas las fórmulas y recetas operativas. Si los textos estan cuidadosamente elaborados para chatear a la gente, que pueden hacer los pobres profesores que no tienen ni tiempo para sobrevivir con el raro reconocimiento social y la escasa retribución material.

habla de las *"asombrosas"* aplicaciones de este poderoso instrumento para el cálculo de áreas, volúmenes y otras magnitudes físicas, como momentos y trabajo.[7]

La perspectiva historicista, presente hoy en día en muchas de las tendencias pedagógicas mas promisorias, se inspira sobre todo en la concepción de la Historia como conjunto de procesos que condicionan de alguna manera y en algún grado, la situación en la cual se expresan los problemas generadores del conocimiento matemático significativo. Aprovecharse, sin abusos, de esta valiosa oportunidad, quiere decir explotar no sólo sus importantes funciones de **motivación y comunicación**, sino también sus funciones **heurística y humanizadora** en el proceso de aprendizaje. (**Sánchez Fernández, C**. 1995)

De la Concepción Humanista

José Martí, el héroe nacional cubano y uno de los grandes humanistas panamericanos, decía: *Es criminal el divorcio entre la educación que se recibe en una época y la época,* imponiéndonos de la necesidad de adaptar nuestros marcos referenciales pedagógicos a las exigencias socioculturales históricas. Luego, en otro contexto agregó con énfasis: *El fin de la educación no es hacer al hombre nulo, por el desdén o el acomodo imposible al país en que ha de vivir, sino prepararlo para vivir bien y útil en él.* Si somos conscientes que nuestra profesión nos exige dar una educación para enfrentar el mundo de mañana, no sólo como investigadores, técnicos o artesanos marginados del entorno sociocultural, sino como agentes directos del desarrollo humano, comprendemos porqué tenemos que adoptar una ***concepción humanista*** del proceso de enseñanza-aprendizaje. Tratamos de expresar con esta designación, aquellos rasgos de la educación que se han hecho indispensables para el enfrentamiento de las lacras ideológicas que el llamado ***pensamiento único*** hegemónico en el mundo globalizado posmoderno nos trasmite sin pedir permiso.

Entendemos por ***concepción humanista*** en la Educación Matemática la consideración de, al menos, tres elementos primordiales: la **contextualización**, la **alfabetización emocional** y la **formación de valores**

La consideración del contexto sociocultural como parte tanto del contexto de descubrimiento como del contexto de justificación de los objetos de estudio es despreciada por algunos enfoques historicistas llamados *internalistas* o *psicogenéticos*, que pretenden fundamentar el desarrollo matemático con visiones positivistas o psicologistas. La escuela soviética que crearan Vigotsky y sus seguidores Leontiev y Galperin, vino a hacerse popular precisamente cuando en el occidente entraron en crisis los paradigmas positivistas y psicologistas. Por otra parte, muchos de los que admiramos el llamado ***enfoque histórico-cultural,*** hemos sido obnubilados por la idea de *actividad* como punto nodal del proceso de desarrollo social y humano, asi como por la concepción de la *zona de desarrollo próximo o potencial* y no nos hemos percatado del énfasis que los padres de esta escuela soviética, al igual que la escuela epistemológica de Piaget, pusieron en el *nivel afectivo*.

Con la concepción humanista, pretendemos viabilizar la consideración de las influencias afectivas en el conocimiento de la matemática y así mejorar la comunicación del carácter tan abstracto e idealizado de las actuales disciplinas matemáticas.

La introducción de la *alfabetización emocional* en la discusión de la Educación matemática, permite hacer valer el derecho que tienen las emociones a jugar un papel significativo facilitador del aprendizaje y a que la calidad emocional de las interacciones en clase ejerza una influencia significativa en lo que se aprende (**Gómez-Chacón**, 1996)

La alfabetización emocional engloba habilidades tales como el control de los impulsos y fobias en relación con la asignatura, que permite desarrollar la necesaria atención para que se logre el aprendizaje, la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, la agilidad mental, etc. (**Goleman**, 1996)

[7] Vea un análisis de esta situación en Sánchez Fernández, C;Valdés Castro, C. (1999)

Un problema medular para la Educación resulta el hecho de que para lograr, o mas exactamente llegar paulatinamente al mejoramiento moral y humano, que permitan al decir de José Martí, *la movilización de todas las riquezas del alma*, no solo vale que el individuo se centre en su oficio estricto o su especialidad-esto es, que posea la técnica de punta e información de primera mano, así como una excelencia imprescindible. Si bien profesionalismo, excelencia y experticidad son valores determinantes, no basta con formar al ser humano pensando en los marcos estrechos de su actividad profesional. Por el contrario este debe tener una formación cultural íntegra. Un acentuado profesionalismo reviste hoy para la América Latina una importancia decisiva, pero sólo puede entenderse en un sentido dual: por un lado poseer conocimientos a la altura de la actual época histórica; y por otro, trabajar y educar en los sujetos la necesaria implicación que tiene que asumir como consecuencia de los grandes problemas que hoy aquejan al Tercer Mundo en su conjunto. De aquí que el desarrollo del pensamiento matemático, junto con la formación de los sentimientos y valores, deben entenderse como una unidad, integrarse y no contraponerse.[8]

No creo equivocarme cuando aseguro que muchos de los profesores de Matemática del nivel secundario y la mayoría del nivel universitario, sienten que la consideración de estos elementos sociológicos, psicológicos y axiológicos, son ajenos a la Educación Matemática... y, tal vez, tengan razón. Si enfocamos el proceso de enseñanza aprendizaje desde una óptica positivista o estructuralista (***bourbakista***, es una manera común, no objetivamente justa, de señalar esta aberración), esto sería muy consecuente y correcto. Sin embargo, si hechamos una ojeada a la literatura más reciente sobre Educación Matemática comprobamos que existe una corriente autorizada que promueve un objetivo de alfabetización emocional y la investigación en la formación de valores en didáctica de las matemáticas. (ver p.e. **Kilpatrick, J.** (1992), **Gómez Chacón, I.** (1996) y (2000), asi como las ***Actas del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática*** (1998) Sevilla).

Lograr la competencia específica y la idoneidad profesional de los educandos, son dos tareas primordiales en la enseñanza, pero hoy en día difícil de conciliar. La Educación Matemática tiene que fusionar la Ciencia y la Tecnología con una profunda renovación de los valores que configuran la evolución armónica e inteligente del educando. Esta fusión sólo es posible a través de la búsqueda de una competencia más genérica y más humanista. *Toda educación que se centre principalmente en la utilidad y la competencia económica, resultará demasiado limitada como para ser útil y competente en el nuevo milenio.*

De la Metodología Dialéctica

La palabra dialéctica procede del griego antiguo y está formada por dos vocablos, la proposición **diá** que quiere decir a través de, o mediante a, y el nombre **logos** que significa razón, pensamiento, palabra, intelección. La semántica, o sea el significado originario de **dialéctica**, es la confrontación de ideas a través de la razón, o razonamiento, o mediante las palabras; el **diálogo**. El filósofo griego de siglo VI a.C. **Heráclito** fue el primero en utilizar el término *logos* en una dimensión metafísica. En su concepción Heráclito defiende la "multilateralidad de relaciones" implicadas en cualquier proceso real (frente a la restricción esquemática de un proceso cualquiera a una «única línea» de relaciones, restricción en la que se haría consistir el modo de pensar metafísico) El término **dialéctica** significa que todo está interconectado y que hay un proceso continuo de cambio en esta interrelación. Esta idea de dialéctica es la que subordina la concepción dialéctica a la *totalidad* (G. Lukács)[9].

Platón fue uno de los primeros filósofos que empleó la palabra **dialéctica** y la usó en sus famosos ***Diálogos***, para expresar la confrontación de ideas, el choque de ideas. En su concepción se propone definirla en función de las contradicciones implicadas en los procesos analizados (si bien los papeles que se atribuyen a estas contradicciones pueden ser muy distintos). Esta concepción es la que tiene más antigua tradición académica y escolástica y la encontramos también en Aristóteles, Kant y Hegel.

---

8 Hemos utilizado en estas reflexiones el contundente artículo del profesor cubano López Bombino (1998)

9 Diferentes concepciones actuales sobre la Dialéctica pueden confrontarse en García Sierra (1999)

De la filosofía dialéctica de los clásicos griegos extraigamos el fuego o ***lo dinámico,*** la confrontación de ideas o ***lo dialógico*** y la cosmovisión sistémica o ***lo holístico***[10], para incorporarlo a nuestro marco referencial teórico

Para nosotros la Dialéctica es, sobre todo, una **metodología** para comprender el desarrollo del conocimiento, y como tal, entendemos que encontró su mas rigurosa y completa formulación en la obra de **Georg Wilhelm Friedrich Hegel** (1770-1831). Para Hegel todo hecho, toda situación, es una afirmación o ***tesis.*** En el seno de esta afirmación o tesis hay elementos contrapuestos que generan, necesariamente una lucha, una negación de la tesis, que él llama ***antítesis***. Y la lucha entre lo que existía y lo que lo negaba da origen a una ***síntesis*** o negación de la negación. La síntesis, al afirmarse, constituye una nueva tesis y de este modo, continúa el proceso, ascendente como una espiral. De ese modo concebía Hegel el desarrollo. En su concepción están presentes las tres leyes principales: la ***ley de la unidad y lucha de contrarios***, que explica la fuerza motriz del desarrollo, es decir, la causa del desarrollo, la ***ley del tránsito de los cambios cuantitativos a cualitativos y viceversa***, que explica cómo se produce el desarrollo, de qué modo, y la ***ley de la negación de la negación***, que nos explica el carácter progresivo del desarrollo, es decir su carácter ascendente. Estas tres leyes son vistas todas en una integración; no aisladamente.[11]

Evitar el exceso de fragmentación en disciplinas y la exagerada especialización en los sistemas educativos, es parte de la visión holística en la Didáctica. La teoría dialéctica del conocimiento es como una argamasa que posibilita darle coherencia y solidez intelectiva a nuestras propuestas didácticas.

Existe, es transparente, una voluntad actual de superar cierta imagen de la Matemática, artificiosamente restrictiva y especializante, en beneficio de una visión integradora, sensible al amplio abanico de experiencias en las que se manifiesta la creatividad humana. Consideramos que la guía metodológica de la Dialéctica favorece asumir con eficacia esa visión.

<u>En resumen</u>: ***la perspectiva histórica, la concepción humanista y la metodología dialéctica***, en unidad indisoluble, en correlación sinérgica, potenciándose mutuamente, expresan el legado de nuestra experiencia en la labor educativa en las últimas cuatro décadas. Quizás este referencial no nos sea útil para satisfacer todas nuestras expectativas pedagógicas, pero seguro nos ayudará a comprender mejor lo primordial de las preguntas **¿por qué?** y **¿para quién?.**

Referencias bibliográficas

Actas del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (1998) S.A.E.M. Thales, Doble Cero, Sevilla. España

Colectivo de autores (1991), ***Tendencias Pedagógicas Contemporáneas***, CEPES, C. Habana. Cuba

D'Ambrosio, U. (1996) ***Educaçao Matemática. Da Teoria à Prática***. Papirus Editora. Sao Paulo. Brasil

De Guzmán, M. (1998), Sobre el papel del matemático en la Educación Matemática, en ***Actas del 8º Congreso internacional de Educación Matemática*** S.A.E.M. Thales, Doble Cero, Sevilla. España

[10] Holístico deriva del griego holos, que significa todo; el holismo es una concepción que motiva el tratamiento del conocimiento como un todo, una unidad. En este sentido, intenta llevar las dimensiones emocionales, sociales, históricas y espirituales en armonía y realza el papel de la terapia o tratamiento propedéutico, que estimula el propio proceso de aprendizaje.

[11] García Galló (1985); recomendamos leer a los maestros clásicos de la dialéctica como Platón, Hegel, Engels y Luckács.

García Galló, G.J. (1985) ***Leyes de la Dialéctica Materialista***, Ed. Gente Nueva, Habana. Cuba

García Sierra, P. (1999) *Diccionario Filosófico*. Biblioteca Filosofía en español. www.filosofía.org/filomat. Oviedo. España.

Goleman, D. (1996) ***Inteligencia Emocional***. Kairós. Barcelona. España.

Gómez Chacón, I.M. (1996) *La alfabetización emocional en Educación matemática: actitudes, emociones y creencias.* Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO, Nº 13, 7-22 España.

Gómez Chacón, I.M. (2000) ***Matemática Emocional***. Narcea, S. A. de Ediciones. Madrid. España

Kilpatrick, J. (1992) *Historia de la investigación en Educación Matemática* en **Kilpatrick,J. , Rico, L. y Sierra, M.** ***Educación matemática e Investigación***. Ed. Síntesis. Madrid. España.

López Bombino, L.R. (1998) *El diálogo y la cultura del error en la formación de valores*. Revista TEMAS Nº 15, 11-15. Cuba

Oliveira, M. de Barros (1999) ***Ensino de Matemática: Medida e Historia da Matemática***. Tesis de Maestría, Universidad Federal de Pernambuco. Brasil

Sánchez Fernández, C. (1992) *Glosas de una concepción humanista, dialéctica y materialista de la historia de la matemática.* Bol. Educaçao Matemática. N. 2 (especial). Brasil

Sánchez Fernández, C (1995) *Usos y abusos de la historia de la matemática en el proceso de aprendizaje* PROCEEDINGS INTERNATIONAL MEETING HPM. Blumenau. Brasil.

Sánchez Fernández, C; Valdés Castro, C. (1997) *Ilustración del uso de la Historia de la Matemática en una enseñanza centrada en problemas.* Educación Matemática. Vol.9 N3. México.

Sánchez Fernández, C*; *Valdés Castro, C. (1999) *Por un enfoque histórico-problémico en la Educación Matemática*, Ciencias Matemáticas*,* vol 17 nº. 2. Cuba

Savater, F. (2000) ***El valor de educar***. Duodécima edición. Ed. Ariel. Barcelona.

Sierpinska, A.; Lerman, S. (1996) *Epistemologies of mathematics and of mathematics education* en A.J. Bishop et al. (eds.) ***International Handbook of Mathematics Education, pp 827-876,*** Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Swetz, F. et al. (1995) ***Learn from the masters,*** The Mathematical Association of America USA.

El Papel de la Investigación en la Enseñanza de la Ciencia y Matemática

Fernando Cajas
fcajas@aaas.org
Asociación Americana para el Avance de la Ciencia
American Association for the Advancement of Science
Washington D.C., USA

En esta presentación reflexiono sobre la investigación en educación científica y matemática en el contexto de la educación general. Me centro en la didáctica de la ciencia haciendo referencias a la didáctica de la matemática la que en el ambiente latinoamericano es más conocida como matemática educativa. Discuto como los trabajos de laboratorio realizados por científicos cognitivos a finales del siglo pasado -los cuales se desarrollaron paralela pero casi independientemente del trabajo de investigadores educativos sobre concepciones erradas ("misconceptions") en ciencia y matemática- dieron nacimiento a la didáctica anglosajona de la ciencia y matemática. Esta investigación acompañada por una percepción social - real o imaginaria- sobre la necesidad de incrementar el nivel científico y matemático de la población general sentaron las bases de una revolución educativa en ciencia y matemática. Esta revolución puede verse en términos de cambios fundamentales en tres paradigmas de enseñanza, aprendizaje e investigación de las ciencias y las matemáticas: Tradicional, Conceptual y Constructivista. En esta presentación discuto la transición de lo tradicional a lo conceptual.

Que nos alejamos de un paradigma tradicional donde enseñar es "hablar" y aprender es "repetir" parece ser claro. Sin embargo es importante clarificar cuales son las bases espitemologicas de los paradigmas tradicionales de enseñanza y aprendizaje, cuales son las concepciones de conocimiento que endorsan y los problemas de investigación que plantean. De una manera breve reviso parte de la las suposiciones que soportan los paradigmas tradicionales de aprendizaje y enseñanza de la ciencia y matemática los que no pudieron superar datos empíricos provenientes de investigaciones de los años 80 que dramáticamente revelaron que los estudiantes no aprenden la ciencia y la matemática que se les enseña. Esta investigación cubrió una gama de conceptos científicos (fuerzas, energía, fotosíntesis, células, etc.) asociados a fenómenos naturales (movimiento de objetos, el clima Terrestre, circuitos eléctricos, producción de alimento, crecimiento de las plantas, etc.) y conceptos matemáticos (fracciones, proporciones, funciones, álgebra, cálculo, etc.).

La falta de aprendizaje de ciencia y matemática de los estudiantes es parte de un fenómeno más amplio llamado bajo nivel de alfabetización científica. En los años de la década entre1980 y 1990 se llevan a cabo en los Estados Unidos de Norte América, Inglaterra y otros países estudios para determinar el nivel de alfabetización científica de la población general (Miller, 1983). Estos estudios sólo corroboraron lo encontrado por los investigadores educativos sobre adquisición de conocimientos científicos. Junto a estos estudios de alguna manera emerge una crisis multinacional que percibe una necesidad de mejorar la educación científica y matemática de todos los ciudadanos.

Como respuesta a la crisis de bajo nivel de alfabetización científica en varios países, pero particularmente en los Estados Unidos de Norte América, emergieron una serie de propuestas que pueden encapsularse como 'paradigmas conceptuales' de enseñanza que han tenido importantes implicaciones en el aprendizaje de la ciencia y matemática (Posner et al., 1985). Aunque la terminología de "cambio conceptual" es más conocida en el ambiente de la didáctica de las ciencias, varias propuestas anglosajonas en matemática educativa siguen las pauta del modelo llamado de cambio conceptual. En principio estas propuestas han reestructurado conceptualmente el contenido del conocimiento científico y matemático escolar. Los ejemplos más clásicos son los estándares de la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) y de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (AAAS, 1997; 1998) que con su Proyecto 2061 ha propuesto una manera de re plantear el conocimiento científico, matemático y tecnológico necesario para alfabetización que va mucho mas allá de la simple especificación de objetivos curriculares. Aunque estas propuestas presentan objetivos curriculares, estos han sido reconstruidos de tal forma que los estudiantes puedan apropiarse de conocimientos relevantes.

En esta presentación reviso paradigmas de *aprendizaje* de cambio conceptual pero me enfoco más en los paradigmas de *enseñanza* donde aparecen nuevos roles para los docentes como lo son: tomar en cuenta lo que los alumnos ya saben; identificar ideas pre-existentes (correctas y erradas); confrontar esas ideas con contradicciones; diseñar contextos donde estas ideas sean plausibles; utilizar estas ideas en diferentes contextos. Este paradigma conceptual cambia la noción de conocimiento, establece nuevas normas sociales dentro del aula a la vez de que plantea nuevos problemas de investigación. Discuto con cierta profundidad algunas características de este paradigma, su estado actual y sus problemas epistemológicos y sociales.

Algunos investigadores han arrojado resultados sobre el paradigma conceptual y sostienen que luego de transformar los contenidos y diseñar materiales curriculares que apoyen el trabajo de los docentes, los porcentajes de estudiantes que se apropian de este conocimiento aumenta de un 15% hasta un 50% aun en situaciones donde existe diversidad social y económica (Ej., Los estudios de E. Smith, T. Blakeslee, y C. Anderson, en Michigan durante 1990; Lee, Eichinger, Anderson, Berkheimer, y Blakeslee, 1993). A pesar de esto, otros investigadores en didáctica de las ciencia y matemática se han movido hacia paradigmas que yo llamo constructivistas "radicales"–por falta de un nombre más adecuado (Ejemplos Michael Roth y Gordon Wells en Canada, Paul Cobb y Deborah Ball en U.S.A.). Con este nombre me refiero a aquellas posiciones espistemologicas y pedagógicas donde el conocimiento no es propiedad de individuos sino el producto de negociaciones sociales afectados por recursos, herramientas, normas, valores y contextos. Desde esta perspectiva aprender no es recordar (paradigma tradicional), ni siquiera es ser capaz de aplicar conocimiento canónico ("oficial") a contextos relevantes (paradigma conceptual), más bien aprender es construir socialmente conocimiento nuevo. Aquí el papel del docente no es guiar la reconstrucción de conocimiento canónico —ya sea científico o matemático— sino guiar la investigación de los estudiantes lo que usualmente están resolviendo problemas "auténticos" (Ej. Roth, 1995).

Me referiré a la relación entre el paradigma tradicional y el conceptual haciendo énfasis en cómo este último representa la primera fase el constructivismo educativo. No se discuten los detalles del constructivismo radical.

Para poder hablar de estos paradigmas, en principio voy a utilizar tres dimensiones: contenido, docente y estudiante. En la medida en que se describe cada paradigma también se irán enriqueciendo las dimensiones de cada uno de ellos mediante el análisis de aspectos más específicos como son acciones del docente, acciones de los estudiantes y particularmente problemas de investigación que plantean los paradigmas. La discusión será llevada en torno a la concepción de conocimiento, enseñanza y aprendizaje que cada paradigma supone. Para los didactas de la ciencia y matemática esta discusión es relevante pues se refiere al progreso que se ha logrado en cada uno de estos paradigmas.

Del Contenido Tradicional al Conceptual

En educación general, esto es, educación primaria y secundaria (obligatoria en muchos países), los paradigmas tradicionales están basado en contenidos curriculares que son incoherentes. Este no es un ataque a la educación tradicional sino mas bien una consecuencia de la forma en que eran diseñados los contenidos científicos y matemáticos escolares hasta hace algunas décadas. Para poder ilustrar lo que significa coherencia de los contenidos curriculares voy a utilizar la experiencia hipotética de cualquier estudiante de escuela primaria y secundaria en los años de 1960 o 1970, justo antes en que emergiera la investigación en didáctica de la ciencias y matemáticas.

De alguna manera aprendimos que la “Tierra es redonda”, que “los triángulos son figuras planas que tienen tres lados” o que “los seres vivos nacen, crecen, se reproducen y mueren”. Conforme progresamos en nuestra educación la lista de cosas por aprender se incrementaba. Aprendimos que el “sistema solar tiene nueve planetas cuyos nombres son Neptuno, Urano, Saturno, etc.” , que “existen triángulos equiláteros, isósceles, obtusos, etc.” o que “la célula esta formada de núcleo, nucleolo, cromosomas, etc.” Nuestros conocimientos de historia eran una lista de nombres de gente famosa y fechas importantes que se incrementaba, también incoherentemente, año tras año.

Hasta hace poco consciente o inconscientemente nos contentábamos con que los niños y niñas repitiera el ‘hecho’ de que la Tierra es redonda o que las plantas producen fotosíntesis o que un triángulo tiene tres lados o que Cristóbal Colon descubrió América en 1492. La pregunta crítica es ¿qué significa para los niños, y a la larga para lo ciudadanos de nuestras sociedades, todas esas cosas? Por ejemplo, ¿qué significa para ellos que la Tierra es redonda?

Hasta hace tres décadas no sabíamos que significaban esas cosas para los estudiantes. Quizás algunos docentes sabían, pero esto era conocimiento que tenían de sus alumnos particulares. No teníamos información de cómo, muestras grandes de estudiantes entendían estas ideas. No teníamos datos empíricos que sustentaran cuál es el significado que los estudiantes le daban a los enunciados mencionados. Fue hasta los años de 1970 en que un grupo de educadores con interés en ciencia, como son Novak en USA, Viennot en Francia y Driver en Inglaterra, se plantearon preguntas tales como ¿qué entienden los niños acerca de que la Tierra es redonda? O ¿en matemática preguntas como cuál es el significado que los estudiantes le dan a las fracciones? ¿Cuáles son los procesos mentales envueltos en la transición de la aritmética al álgebra (Filloi en México y Kieran en Canadá, entre otros). Más que especular sobre las posibles concepciones de los estudiantes, estos pioneros diseñaron experimentos para obtener información de los estudiantes. Gracias a esos trabajos actualmente sabemos que los estudiantes desarrollan modelos mentales de fenómenos y que usualmente estos no corresponden a los modelos científicos que intentamos enseñar. Tome el caso del enunciado de que la “Tierra es redonda”.

Estudios acerca de modelos mentales que tienen los niños y niñas acerca de la forma de la Tierra han mostrado que ellos tienden a pensar que la Tierra es muy grande, que esta extendida, que es plana y que está apoyada en algo abajo (Vosniadou y Brewer, 1992; Vosniadou, 1991). Estos investigadores determinaron un número pequeño de modelos mentales acerca de la forma de la Tierra las cuales son utilizados por los estudiantes para explicar diferentes fenómenos como son el día y la noche y otros más. Algunos niños creen que la Tierra es plana de superficie rectangular. Otros creen que es redonda pero plana. Otros creen que existen dos tierras, una plana donde vivimos y otra esférica arriba en el cielo. Otros creen que la tierra es un sólido pero que nosotros vivimos en su interior. Algunos mas creen que la Tierra es recortada en cuyas superficies viven las personas

Esto trabajos de investigación como el reportado de los modelos mentales sobre la forma de la Tierra, vienen de una comunidad de psicólogos cognitivos interesados en la adquisición de conceptos científicos. Otros investigadores también exploraron aspectos epistemológicos de la construcción del conocimiento científico. Retrospectivamente podemos notar que la investigación en didáctica de las ciencias se desarrolló paralelamente al trabajo de psicólogos cognitivos interesados en la adquisición del concepto científicos (vienen a mi mente los trabajos de Karmiloff-Smith, D., Kuhn, y S. Carey) y la emergente ciencia cognitiva que estudió cómo los expertos resuelven problemas (Ejemplo Simons, Glaser y Chi). Conjuntamente didactas de la ciencia y psicólogos cognitivos mostraron que las personas no aprenden conceptos aislados sino mas bien grupos de conceptos interconectados (Chi, 1992, Vosniadou, 1991). El concepto de la forma de la Tierra, por ejemplo, esta íntimamente relacionada a la idea de gravitación (Nussbaum, 1979; Vosniadou, y Brener, 1992). Es importante entender la idea de la fuerza de gravedad para explicar porque la gente que esta “abajo” de la Tierra no se cae (Vosniadou, 1991). Estas investigaciones se extendieron a otras áreas, particularmente mecánica, óptica, electricidad, fracciones, funciones, álgebra, etc. Durante los últimos veinte años se han cubierto varios conceptos científicos y matemáticos que los niños aprenden y se han reportado una serie de modelos que los individuos tienen acerca de fenómenos naturales y los modelos que los explican así como concepciones acerca de conceptos matemáticos.

La investigación sobre conceptos científicos y matemáticos ha sido el foco de varias comunidades. Dentro los que hoy llamamos didactas de la ciencia y didactas de la matemática existen aquellos que han identificado concepciones erróneas (Ej., Novak en ciencias y Carpenter en matemáticas) en diversas áreas así como los que han desempacado modelos mentales (Vosdianodou, 1991). Los psicólogos cognitivos se han enfocado en cómo ciertas ideas científicas emergen desde la infancia hasta la vida adulta (Ej., D. Kuhn). Estos últimos han sido seguidores del trabajo piagetiano que ahora se ha enfocado en ideas científicas muy particulares (Ej., fuerza, equilibrio, conservación de la materia, óptica, fenómenos astronómicos, etc.) y nociones generales de la evolución del pensamiento científico (Ej., teoría y evidencia). Aunque aún no hemos sintetizado todas estas corrientes en una sola teoría –y posiblemente nunca vamos a poder hacerlo- lo cierto es que dicha investigación ha tenido implicaciones en la creación de un nuevo conocimiento escolar que pretende ser más coherente que sus predecesores (tradicional) así como en un nuevo tipo de instrucción que está centrada alrededor de conocimientos científicos y matemáticos claves y que toma en cuenta lo que los alumnos ya saben.

En resumen, el conocimiento científico y matemático escolar ha sido re inventado parcialmente a la luz de la investigación en didáctica de la ciencias y matemáticas. Este nuevo conocimiento es más coherente que el antiguo (tradicional). Su coherencia puede verse en términos locales y globales.

La coherencia local se refiere a que las ideas científicas o matemáticas que queremos enseñar tienen cierta relevancia intrínseca. Esta relevancia puede ser estudiada desde un punto de vista epistemológico, esto es, si por ejemplo, creemos que las ideas de gravitación son importantes, una reconstrucción histórica y cognitiva de estas ideas va a ser necesaria. Con esta reconstrucción aprenderemos ideas relacionadas a gravitación que no son explícitas en los discursos finales. Parte del trabajo de la científicos cognitivos (Ej., Carey, 1985) ha sido este, esto es, buscar cuales son los conocimientos “perdidos” han la historia de las ideas científicas. La relación entre la gravedad (fuerza) y la naturaleza esférica de la Tierra (forma) es una conexión “epistemológica” en la construcción de la noción de gravitación universal. De allí que la coherencia del contenido a enseñar no sólo debe ser local en el sentido de que lo que queremos enseñar tenga sentido per se a un determinado nivel o edad sino también debe ser coherente en términos de las conexiones de este conocimiento con conocimientos anteriores, posteriores y paralelos (global). Estas conexiones deben ser explícitas y construidas, de ser posible, ayudados por la investigación científica en la adquisición de conceptos. En caso del ejemplo sobre la forma de la Tierra, la pregunta es cómo las ideas sobre la forma de la Tierra y nociones elementales sobre gravitación –como son el hecho de que las cosas cercanas a la Tierra caen al suelo– están relacionadas a ideas mas desarrolladas como son la noción de gravitación universal.

Esto a la vez ilustra que el conocimiento escolar es mucho más que una simplificación del conocimiento del experto. Para un físico, la relación entre la forma de la Tierra y gravitación depende de la función entre fuerza y distancia. Dada que la fuerza depende del cuadrado del inverso de la distancia, no existe otra alternativa sino que la forma de la Tierra venga a ser esférica. Otras formas van a requerir funciones que dependen de la distancia de una manera diferente. El conocimiento del experto encuentra coherencia si la función de la fuerza gravitacional es conectada a leyes generales de movimiento. Para el experto no es necesario re construir la relación (obvia) entre forma de la Tierra y gravitación. Para el docente de educación primaria, en cambio, la noción de forma de la Tierra y gravitación terrestre deben ser conectadas de una forma explícita. Esta conexión requiere la creación de un conocimiento nuevo o la reconstrucción epistemología de un conocimiento que existió en los origines de la teoría. De allí que el conocimiento escolar, como lo presento aquí, no es solo la simplificación del conocimiento del experto (en este caso la ecuación de gravitación universal) sino este involucra la creación de nuevos conocimientos que no existían anteriormente en el conocimiento del experto.

Lo mismo sucede en matemática. Tome el caso del tópico de triángulos. Investigaciones en las aulas escolares Norte Americanas (el estudio de TIMSS, llamado el Tercer Estudio Internacional en Ciencia y Matemática) muestra que existe una tendencia a enfatizar definiciones tales como, “un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos recto” o “la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados” sin elaborar ideas mas profundas. Aunque no hay nada de malo con estas definiciones, el problema es que la práctica educativa se centra en problemas triviales en los cuales los alumnos tiene que “resolver” por el valor de un ángulo dado el valor numérico de un ángulo y el tipo de triángulo. En lugar de construir ideas matemáticas mas profundas como aprender la relación entre forma y área de algunas figuras planas. Esto llevaría a que en la escuela elemental los estudiantes puedan construir ideas claves acerca de la relación entre área y perímetros diferentes figuras tales como que “algunas figuras con el mismo perímetro pueden tener áreas diferentes” o que “ algunas figuras con la misma área pueden tener perímetros diferentes”. La relación entre “forma” y propiedades de figuras es importante para construir ideas acerca del uso de figuras geométricas. Un triángulo tiene algunas propiedades interesantes como rigidez que hace que sea utilizado como elemento básico en varias estructuras.

A pesar de las limitaciones de la investigación en didáctica de la ciencia y matemática, es claro que la investigación existente está ayudando a incrementar la coherencia local y global del contenido científico y matemático escolar por medio de incluir ideas claves que no habían sido introducidas antes. El siguiente paso es diseñar estrategias instruccionales que apoyen el aprendizaje de estas ideas claves.

De la Instrucción Tradicional a la Conceptual

Al mismo tiempo en que los científicos cognitivos estudiaban como niños y adultos aprendían conceptos científicos y que los didactas de la ciencia estudiaban, identificaban y catalogaban ideas erróneas en diferentes campos de la ciencia y matemática, otros investigadores desarrollaron paradigmas ‘conceptuales’ de enseñanza. Uno de los mas influyentes fue el desarrollado por Posner y sus colegas (1982) en el cual se pedía cuatro condiciones para que se diera cambio conceptual: 1) debe existir una contradicción con ideas pre existentes, 2) la nueva idea debe ser entendible, 3) la nueva idea debe parecer plausible, 4) la nueva idea debe ser plausible y fructífera. Este paradigma vino a ser una guía para la construcción de secuencias instruccionales pero desafortunadamente no fue conectado a los paradigmas desarrollados por psicólogos y científicos cognitivos.

A pesar de la falta de un paradigma único de cambio conceptual, en general los estudios empíricos de cómo los estudiantes interpretan fenómenos, mostraron de que para poder cambiar paradigmas mentales llamados “errados” hacia más “científicos” es necesario tomar en cuenta lo que los estudiantes ya saben. Ya sea que se tome el modelo de Ponser como paradigma o que se tomen los resultados de la investigación de los científicos cognitivos los cierto es que se aceptó que para cambiar las ideas previas de los estudiantes (usualmente consideradas como erradas) eran necesarios largos periodos de tiempo y diseñar estrategias instruccionales acordes (Ej. Edward Smith en ciencias, Thomas Carpenter, en matemática). Las implicaciones de estos hallazgos son profundas. En primer lugar es mejor enseñar un menor número de ideas claves que tengan cierta coherencia. Esto significa rediseñar el discurso científico y matemático escolar a la luz de la investigación en didáctica de las ciencias y no solo hacer listas de tópicos y objetivos instruccionales que usualmente son incoherentes.

Considere la dificultad de enseñarle a aquellos alumnos que tienen un modelo plano de la Tierra. Si se les dice que la Tierra es redonda como una esfera, construirán, en el mejor de los casos, una Tierra bi dimensional redonda (disco). Más importante es que aun cuando tuviesen una concepción de una Tierra esférica, varios de ellos van a suponer que las personas en la parte de “arriba” de la Tierra están en la superficie, pero los de “abajo” deben estar en el interior. Para poder colocar a las personas en la superficie de la esfera los niños necesitan manejar la idea de que existe una fuerza que atrae los objetos hacia la superficie de la Tierra. El diseño de la instrucción debe tomar en cuenta estos pre requisitos. El papel del docente ya no es solo conocer lo que quiere enseñar (la Tierra es redonda), sino estar consciente de las conexiones previas y posteriores de dichos conocimientos y la investigación relevante de como los estudiantes adquieren estas ideas.

Esto no es sólo válido para el caso de ciencias. Considere la dificultad de enseñar a los estudiantes de primaria que “algunas figuras con el mismo perímetro pueden tener áreas diferentes” o que “ algunas figuras con la misma área pueden tener perímetros diferentes” si aun no han construido la noción de perímetro. Es preciso clarificar las conexiones de estas ideas, de donde vienen y hacia donde van. Cuales son las ideas claves que queremos que nuestros estudiantes apropien. La investigación en didáctica de la ciencia y matemática ha iluminado parcialmente este proceso.

Pero estar consciente de las conexiones no es suficiente. Al mismo tiempo es necesario proveer fenómenos o problemas relevantes para que los niños y niñas puedan utilizar sus ideas. Los docentes deben proveer largos periodos de tiempo para que los estudiantes se apropien de las ideas. Deben construir preguntas que puedan guiar el razonamiento de los estudiantes. Se deben dar oportunidades para que los estudiantes expresen y defiendan sus ideas. Es en este quehacer científico de defender y tratar de convencer que se reconstruyen ideas científicas. El papel del docente es guiar estas interpretaciones y ayudar a los alumnos a explicar fenómenos o problemas.

El paradigma conceptual, tal como ha sido explicado hasta ahora, es un paradigma basado en un contenido coherente y una instrucción en la que el contenido y las actividades están íntimamente ligadas y viene a responder preguntas tales como, cuáles son los fenómenos que pueden ser relevantes para los estudiantes? Cuales son las mejores representaciones? ¿Cómo sabemos que los estudiantes están aprendiendo (conceptualmente) estas ideas?

Existen elaboraciones de paradigmas conceptuales de enseñanza. Todos ellos tienen en común tomar en cuenta lo que los alumnos ya saben, construir situaciones en las que los estudiantes puedan enfrentar contradicciones con ideas erradas, así como el diseño de ambientes donde puedan utilizar las ideas nuevas. Investigadores de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia han elaborado un paradigma conceptual detallado que supone roles del docente bastante diferentes de los de la enseñanza tradicional (Jo Ellen Roseman; Gerhard Kulm). En este paradigma los docentes no solo tienen que identificar las ideas (o modelos) preexistentes, sino también afrontarlos. Además deben diseñar situaciones didácticas con fenómenos adecuados, introducir términos técnicos de una manera muy limitada y solo cuando sean estrictamente necesarios, y ayudar a los alumnos a representar ideas. Los conocimientos adquiridos deben ser sintetizados lógica y conceptualmente y practicados en diferentes contextos. Debe existir una relación intima entre ideas, fenómenos, problemas y experiencias.

De lo Tradicional a lo Conceptual: Síntesis

La noción de aprendizaje implícita en los paradigmas tradicionales es sencilla: aprender de alguna manera es repetir. Algunas veces es repetir ‘hechos’ importantes tales como que la Tierra es redonda, los triángulos tienen tres lados, las plantas utilizan la fotosíntesis para vivir o América fue descubierta en 1492. Pero este contenido no ha sido pensado globalmente sino más bien adaptado localmente. Aunque pueden existir proposiciones aisladas que tenga mucho sentido y que sean importantes como son “cambios en la velocidad y dirección de objetos son causados por fuerzas” estas no han sido pensadas como sistemas de ideas interconectadas lógica y cognitivamente. Usualmente sólo se ha secuenciado y temporalizado contenidos curriculares sin haber sido reconstruidos cognitiva y epistemológicamente.

Durante los últimos veinte años en el contexto de educación general, la noción de aprendizaje, entendida como la memorización de piezas aisladas de hechos, vino a ser transformada por los paradigmas conceptuales que piden explicar fenómenos y por ende comprender a mayor profundidad ciencia y matemática. Ahora aprender, es conectar ideas nuevas con otras ideas de una manera coherente. Es importante tomar en cuenta lo que los estudiantes ya saben y trabajar con esas ideas.

La concepción de contenido como un sistema (‘network’) de ideas interconectadas, la noción de que aprender es realmente entender profundamente un numero menor de ideas importantes, cambia radicalmente la función de los docentes y tiene efecto en las normas sociales del aula de clase. Los docentes se convierten en elementos que deben organizar de manera coherente cómo presentar fenómenos relevantes a los estudiantes. Aunque ayudados por materiales curriculares que compartan esta filosofía, los docentes tiene características un tanto diferentes que los tradicionales. Los alumnos a su vez deben presentar y representar sus ideas, probar sus predicciones, explicar, refutar, convencer, y discutir. Los modelos que los estudiantes construyen deben ser aplicados en varios contextos.

En resumen, existen un cambio de los paradigmas tradicionales de aprendizaje y enseñanza hacia los paradigmas conceptuales. Estos cambios se pueden observar en el contenido que se enseña, en las acciones del docente y las acciones que se esperan del estudiante. Esta interpretación está basada en paradigmas “ideales” y un tanto extremos que obviamente no pueden dar exacta razón de la realidad. A pesar de ello es posible hacer una síntesis de cómo se puede dar el cambio de lo tradicional a lo conceptual en tres dimensiones contactadas, contenido, docente y estudiante.

De la Investigación Tradicional a la Conceptual

Los problemas de investigación cambian dependiendo del paradigma en que uno esté inmerso. Un investigador tradicional estará mas preocupado de mejorar la ‘transmisión’ de información. Sus preguntas pueden estar mas basadas en mantener una estructura disciplinaria que responda al paradigma de aprendizaje que supone que los estudiantes escuchan mientras el o ella habla. Aún versiones mas progresivas de este paradigma, como son la demostraciones de laboratorio, asumen que los docentes y estudiantes comparten una ontología de las prácticas que son demostradas así como un común entendimiento de los objetivos que se persiguen (Esto ha sido reportado por Michael Roth y Kenneth Tobin utilizando muestras de docentes Australianos y Norte Americanos). Las investigaciones que se dan en torno a estas demostraciones persiguen aclarar qué tipo de actividades llaman más la atención de los estudiantes y cómo estas demostraciones ayudan a entender ciencia. Sus herramientas metodológicas y su noción de evidencia está basada en la suposición de que el conocimiento existe independientemente de las personas que lo producen y que la tarea de la enseñanza es comunicar estos conocimientos con el menor ruido posible. La evidencia de aprendizaje es capturada en términos de la habilidad de los sujetos en superar pruebas escritas de evaluación usualmente de selección múltiple.

Un investigador conceptual, en contraste, tiene una serie de líneas de trabajo como son la construcción de secuencias de aprendizaje que puedan realmente ayudar a los alumnos a construir ideas (a veces paradigmas) científicas y matemáticas coherentes (local y globalmente). Su tarea incluye el estudio de lo que los alumnos saben acerca de los fenómenos o problemas y a la vez su trabajo es construir fenómenos y representaciones que puedan guiar a los estudiantes a construir ideas importantes. Para validar sus hipótesis entrevista a los estudiantes, genera datos, construye contextos escolares donde los estudiantes y docentes tienen oportunidades de construir, esto es, pensar, razonar, representar y defender ideas. Dependiendo de los diferentes contextos sociales su relación con los docentes cambia. Pero en general, existe una conexión fuerte entre los diseños de instrucción conceptual y el trabajo de los docentes en los salones de clases. Muchos investigadores conceptuales son investigadores de sus propias practicas, otros trabajan conjuntamente con docentes.

Comentarios finales

Los paradigmas conceptuales de instrucción usualmente son considerados paradigmas constructivistas por varias razones. Una de ellas es porque toman en cuenta lo que los alumnos saben. Esto es interpretado por el constructivismo educativo como que el conocimiento no es recibido pasivamente sino construido a partir de lo que ya se conoce. Pero bajo el termino “constructivismo” se esconden varias escuelas y tendencias. De alguna manera los modelos conceptuales dieron origen a los modelos constructivistas. Desafortunadamente una discusión sobre modelos constructivitas está fuera del alcance de esta presentación. Pero vale decir que una consolidación del paradigma conceptual parece ser un prerrequisito de movimientos constructivistas efectivos. Esto es, primero tenemos que reconstruir la coherencia conceptual de los discursos científicos y matemáticos escolares. Luego, tendremos que diseñar estrategias instruccionales que puedan ayudar eficientemente a los docentes y estudiantes a reconstruir esas ideas fundamentales en ciencia y matemática. La emergente investigación en didáctica de las ciencias y matemáticas está iluminando este proceso.

Nota

En esta presentación se hace referencias a varios nombres y artículos no detallados. Al lector interesado le pide que contacte al autor para detalles específicos acerca de las referencias.

Referencias bibliográficas

AAAS (1998) Avances en el *Conocimiento Científico*. México Harla. Disponible en http://project2061.aaas.org/español.

AAAS(1997). *Ciencia Conocimiento para Todos*. México: Harla. Disponible en http://project2061.aaas.org/español.

CHI, M. (1992). Conceptual change within and across ontological categories: Examples frog learning and discovery in science. En R. Giere (Ed.) *Cognitive Models of Science: Minnesota studies in philosophy of science* Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 129-186.

DRIVER, R. GUESNE, E. Y TIBERGHIEN, A. (1985), Children's ideas in science. Milton Keynes, UK: Open University Press.

LEE, O., EICHINGER, D.C., ANDERSON, C.W., BERKHEIMER, G.D., & BLAKESLEE, T.S. (1993). Changing middle school students' conceptions of matter and molecules. Journal of Research in Science Teaching, 30(3), 249-270.

MILLER, J. (1983). Scientific literacy: A conceptual and Empirical Review. *Daedalus,* 112(2), 29-48.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1990). On the shoulders of giants: New approaches to numercay. Washington D.C.: Author.

POSNER, G., STRIKE, K., & GERTZONG, W. (1982). Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 77, 211-227.

VIENNOT, L. (1979). Le raisonnment spontane en dynamique elementaire. Paris: Hermann.

VOSNIADOU, S. (1991). Designing curricula for conceptual restructuring; lessons from the study of knowledge acquisition in astronomy. *Journal of Curriculum Studies*, 23, 219-237.

VOSNIADOU, S. Y BREWER, W. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. Cognitive Psychology, 24, 535.

Mejorar la formación en Matemáticas de los Maestros de Primaria: Una dinámica

Jeanne BOLON
jeanne.bolon@wanadoo.fr
maître de conférences
Institut universitaire de formation des maîtres
de l'Académie de Versailles - France
Télécopie : (33) 1 30 24 05 81

En cada uno de nuestros países, nos esforzamos en mejorar la educación matemática con los recursos que tenemos a nuestro alcance: somos educadores, somos investigadores en el campo de la educación matemática, somos ciudadanos de nuestros países.

En muchos países, se considera el constructivismo como una orientación principal de la enseñanza matemática. En Francia, también, varios equipos han hecho propuestas en esa dirección, inclusive en el campo de la formación magisterial. Es obvio que la enseñanza francesa tiene muchos aspectos distintos de los que tiene la enseñanza en los países latinoamericanos, sin embargo las preguntas que nos planteamos en Francia pueden transferirse y servir para facilitar la reflexión en otros países.

En la conferencia, ilustraré el análisis. Quisiera enfatizar la complejidad del tema, la cual supone un análisis sistémico, y también una dinámica sistémica (¿ecológica?) en los avances de cada país.

Plan

1- Describir
2- Recalcar las relaciones
3- Analizar las evoluciones
Conclusión

1- Describir

Primeramente, describamos la educación primaria: número de alumnos, número de docentes, condiciones de preparación del diploma, sueldos, material educativo, estudios hechos en educación matemática.

En Francia, país de 60 millones de habitantes, la educación mayormente es estatal (80 %). La educación particular es controlada por el Ministerio de la Educación Nacional y subvencionada parcialmente por el Estado (sueldos de los maestros).

La educación preescolar tiene 3 años y la primaria 5 años. La educación preescolar no es obligatoria, pero casi la totalidad de los niños de 3, 4 y 5 años entran en las escuelas pre-escolares. En total (pre-escolar y primaria) son 6,4 millones de alumnos (1998).

El material escolar del nivel primario (textos escolares, cuadernos, lápices, láminas, magnetoscopio) está al cargo de las municipalidades cuyos recursos vienen de las zonas administrativas (departamento y región). Los recursos dependen de la riqueza del lugar, es verdad que no es equitativo, sin embargo existen recursos específicos para zonas desfavorecidas. Los textos escolares se reemplazan cada 4 o 5 años y cada escuela escoge sus manuales de acuerdo con su proyecto. Los textos escolares son redactados por grupos de autores contando con supervisores, formadores de los institutos universitarios de formación (IUFM) de maestros y maestros de primaria

Ahora, describamos cuáles son los maestros de primaria y cómo son preparados.

En Francia, tenemos casi 300 000 maestros de primaria en la educación estatal (en 1998, 284 000 maestros de primaria en la educación estatal, 44 000 en la educación particular): 77

% son mujeres (1998). En el ano 2000, se reclutaron 11 000 maestros de primaria, numero que irá aumentando y se ha previsto el máximo se alcanzara en el año 2005 o 2006.

La formación de los maestros de primaria ha cambiado en forma importante a partir de la década 1980-1990, para evitar una posible escasez de maestros para la escuela primaria. En lugar de exigir le bachillerato, el ministerio de educación exige una licenciatura o un diploma de nivel equivalente, tanto para los alumnos de pre-escolar como para los de primaria: eso era une condición necesaria para que el sueldo de un profesor de escuela (nuevo título) sea lo mismo que el de un profesor de secundaria de categoría normal (existe otra categoría - agregation - con sueldo más alto). Parece de justicia que todos los que participan en la educación obligatoria tengan un sueldo semejante.

Actualmente, el concurso de reclutamiento de profesores de primaria se prepara en los institutos universitarios de formación de maestros (IUFM). Después del concurso, los estudiantes tienen pre-sueldos y se confirma su título cuando terminan el año de formación.

Terminemos nuestra descripción con algunos aspectos estadísticos.

El ministerio francés de educación nacional organiza anualmente pruebas de rendimiento de los alumnos de tercer grado de primaria (alumnos de 8 años) y del primer grado de secundaria (alumnos de 11 años), en base a cuadernos de evaluación. La evaluación es obligatoria. Cada maestro de dichos niveles reparte los cuadernos a cada uno de sus alumnos en la segunda o tercera semana del año escolar, siguiendo las recomendaciones de una guía. Recoge el material llenado por los alumnos, los evalúa y manda los resultados al ministerio. A nivel nacional, el ministerio obtiene datos: publica los ejercicios y comenta los resultados.

Esos cuadernos son importantes no solo para el ministerio de educación, sino también para los maestros y los formadores de maestros:

- los maestros saben lo que el ministerio considera como importante en la educación matemática,

- los maestros detectan más fácilmente quién de sus alumnos necesita apoyo especial,

- los formadores tienen una fuente de ejemplos de dificultades en la enseñanza para comentar en sus cursos.

2- Recalcar las relaciones

Tenemos que analizar si existen relaciones entre los aspectos mencionados anteriormente : por ejemplo, ver si la educación matemática del alumnado es coherente con la formación de los maestros, sí los objetivos del ministerio de educación corresponden a la formación de los maestros y a las condiciones de trabajo de los profesores, si los resultados de las investigaciones influyen en la redacción de los currícula, si los padres de familia desean lo mismo que el ministerio para la educación matemática de sus hijos...

2.1- <u>Relación entre matemática de primaria y formación de los maestros</u>

En la tradición francesa, siempre hubo relación entre el currículum de primaria y currículum de la formación de los maestros de primaria. Hoy, en las pruebas de reclutamiento, la parte “matemática pura” (dos quintos del puntaje total) toca a menudo temas que se acercan a los temas de educación primaria: aritmética, numeración, medición. El nivel que mayormente se requiere es el nivel del fin de la enseñanza media. La otra parte de la prueba (tres quintos del puntaje total) está dedicada a temas pedagógicos: análisis de errores cometidos por alumnos, análisis de un documento pedagógico dirigido al maestro. Analizando textos de pruebas de reclutamiento, se notan claramente rasgos de la corriente constructivista, lo que es coherente con la postura de la mayoría de los formadores, en favor de dicha corriente (eso aparece en las actas de los coloquios de formadores).

En cuanto a la metodología de enseñanza de la matemática usada en primaria, tenemos observaciones sueltas. Sabemos que algunos maestros usan un método inspirado por la corriente constructivista (método ERMEL), pero desconocemos su influencia: intuitivamente, diríamos que es lenta en difundirse. Los formadores de maestros de primaria consideran que dicha metodología no es muy fácil de aplicar en las escuelas primarias, pues supone que los conocimientos matemáticos de los maestros les permitan interpretar las propuestas de sus alumnos aunque estén mal expresadas. De otro lado, existen diferencias notables entre lo que se dice y lo que se hace: por ejemplo, algunos maestros se ubican en una metodología muy clásica, a pesar de que usen desde mucho tiempo una enseñanza en base a proyectos; otros maestros, al contrario, dicen que practican un método de descubrimiento, y con frecuencia usan una metodología de tipo adivinanza.

2.2- Relación entre investigaciones y cambios curriculares o evoluciones pedagógicas

El ministerio francés de educación recomendó desde los anos 1980 que los maestros respetaran el ritmo de aprendizaje de sus alumnos, ubicándose así en la corriente constructivista. Los investigadores en didáctica de la matemática se dieron cuenta que esa recomendación iba en contra de otra, dada por el mismo ministerio: exigencia de "competencias" al terminar la educación pre-escolar y la educación primaria. Además, esos mismos investigadores observaron que las metodologías inspiradas en el constructivismo ponen en evidencia a los alumnos que no han logrado alcanzar procedimientos válidos, mucho más que las metodologías de uso común. El profesor sufre con la tensión siguiente: de un lado, le parece imposible organizar tantos cursos como niveles en matemáticas fueran necesario en su grupo-clase y de otro lado, ve que una metodología basada en el grupo-clase entero no corresponde a las recomendaciones del ministerio. Los textos del ministerio hablan de pedagogía diferenciada, pero no se sabe exactamente que es ello o que debería ser.

En cuanto a los contenidos de la educación matemática, tenemos en Francia una institución a cargo de preparar los cambios curriculares, el Consejo nacional de los currícula, que trabaja en forma independiente de los laboratorios de didáctica de la matemática, sin embargo, pide sus opiniones. En los últimos años, ha tomado una posición intermedia entre la tradicional y la inspirada por las investigaciones, pero el balance depende de la atmósfera política. Por ejemplo, salió en los periódicos en 1999 informaciones según las cuales el rendimiento de la escuela primaria estaba bajando: "Fuerte empeoramiento de los resultados de las pruebas de sexto grado". La polémica fue tan fuerte que el ministerio de entonces estaba a punto de suprimir las publicaciones de las pruebas y bajar el nivel exigido al terminar la primaria... Hubo un cambio de ministro de educación y el nuevo mantuvo el sistema anterior de prueba y se comprometió a abrir discusiones de fondo a propósito de los curricula.

2.3- Diversas corrientes de opinión

Tendré que hacer algo de sociología, a pesar que yo no sea especialista...

En Francia, existen corrientes de opinión para separar por un lado los alumnos de clases ubicadas económicamente en el nivel medio y superior, por otro lado los alumnos de clases ubicadas en el nivel bajo; se habla de deficiencias socio-culturales. Para los alumnos de clase alta o media, los conocimientos abstractos y para los alumnos de clase baja los conocimientos prácticos, como se hizo durante siglos. Esas corrientes se manifiestan en forma abierta en el nivel secundario.
Las escuelas primarias tienen características marcadas por el nivel socio-económico de las familias de lugar. Me parece que esto es consecuencia del precio de las viviendas, las familias que tienen recursos económicos parecidos se agrupan en un mismo lugar.

En Francia, sociologicamente, los profesores y maestros se ubican en las clases altas y medias, a pesar que sus recursos económicos les ubiquen en la clase media o media alta. Sus hijos tienen éxito escolar como los hijos de familia de nivel socio-económico alto. En esas familias, los padres apoyan los estudios de sus hijos, pagándoles cursos particulares, acompañándolos a museos o a bibliotecas, ofreciéndoles CD para su computador, visitando con ellos lugares de interés. Los padres de familia de nivel socio-económico alto no quieren directamente modificaciones en la enseñanza de la matemática, quieren para sus hijos escuelas de “buen nivel”, de prestigio... en un “buen barrio”.

Por el lado del profesorado, la gran mayoría de ellos dice que se cansan mucho más en las escuelas difíciles, con alumnos inestables, alumnos que tienen dificultad para concentrarse en el trabajo intelectual.

Investigadores en didáctica de la matemática hicieron estudios sobre las clases de nivel bajo: han observado una tendencia fuerte por disminuir las exigencias, evitar la complejidad de los problemas, proponer ejercicios tipificados (Butlen, Perrin). Lo cual reemplaza las matemáticas por un conjunto de técnicas, eso a su vez conlleva desinterés del profesor lo que resulta un círculo vicioso.

En Francia, constatamos que existen corrientes opuestas. De un lado, se dice que las empresas necesitan empleados capaces de adaptarse a nuevas condiciones de trabajo y capaces de resolver nuevos problemas profesionales. Eso va en favor de la corriente constructivista: la enseñanza de la matemática no puede consistir solamente en ejercicios tipificados o resultados memorizados o cálculos de operaciones aritméticas. Al contrario, la metodología recomendada se base en la resolución de problemas, con ensayos organizados, procedimientos variados, validación de procedimientos, reforzamientos. Existen en Francia grupos de maestros que aplican esos métodos, pero no son la mayoría, a pesar de condiciones bastante favorables:

- Curriculum con ambos aspectos constructivista y conductista (behaviorismo),
- Cursos de perfeccionamiento pagados por el ministerio,
- Resultados de investigaciones sobre aprendizajes numéricos y razonamientos, (faltan en geometría, medición).

3- Analizar las evoluciones

Como lo dije en el título de la conferencia, el mejoramiento deseado no viene como una solución ya redactada en un gran libro que se trataría de destapar: cada país tiene que buscar su dinámica propia, analizando las evoluciones en el pasado y mirando al futuro.

Daré una opinión personal basada en las discusiones que tuve dentro de los grupos de reflexión en le ministerio de educación francés: comisión Picard, comisión de Peretti, comisión Dacunha-Castel, comisión Bancel.

La educación matemática a nivel primario se modificó paulatinamente. Hace 20 años atrás, no se hablaba de resolución de problemas, se hacía poca geometría, los textos escolares proponían ejercicios basados en una metodología monótona. Hoy, todos los textos escolares introducen aunque sea poquísimo, la resolución de problemas, el uso de la calculadora, construcciones geométricas.

En cuanto a la metodología, a mi modo de ver, la presión ideológica es demasiado fuerte, por ejemplo, la memorización de hechos numéricos o geométricos, la práctica de cálculo sin calculadora o el entrenamiento sobre ejercicios-tipos, todo eso se considera como perteneciendo al pasado. Peor aún, en algunos textos escolares, aparece en forma llamativa la mención “Descubrimiento”, inclusive cuando no hay nada para descubrir.

A mi me parece que el constructivismo se nutre de experiencias matemáticas, incluyendo los ejercicios de entrenamiento. En francés, decimos “frecuentar” por ejemplo cuando se les pide a alumnos de 5 años que lean los números de un calendario, apoyándose en la memorización de la lista oral de los números, lo que servirá de apoyo más adelante cuando se estudie el sistema de escritura de los números.

Les digo a menudo a los futuros maestros de primaria a quienes dicto cursos: no existe metodología única para dar solución a todos los problemas pedagógicos que enfrentamos, sino ya se sabría, en consecuencia, nuestra salvación esta en la combinación de varias metodologías de enseñanza.

En la formación de maestros, nos damos cuenta que los futuros maestros necesitan un apoyo distinto de sus colegas que ya tienen varios años de servicio, pero no sabemos todavía cuáles serían los "gestos profesionales" básicos que los futuros maestros tendrían que aprender a usar.

Necesitamos más investigaciones al nivel primario y sobre la formación de maestros. Estamos esperando resultados de investigaciones hechas con clases difíciles (zonas desfavorecidas), o con métodos de apoyo personalizado (Ermel 1999, Julio 2000).

No me he referido a las fuerzas económicas, sociales y políticas que pueden apoyar los cambios en educación matemática. En Francia, tenemos la suerte de que la escuela primaria tenga apoyo de los padres de familia así como de las municipalidades. La respuesta sería distinta hablando de la enseñanza media. Otra suerte: que existan relaciones profesionales entre los investigadores y los formadores de maestros. Otra suerte más: antes de obtener su diploma, los futuros maestros tienen que hacer clases y para ello cuentan con el apoyo de consejeros pedagógicos y de sus formadores.

Conclusión

Volviendo al título de la conferencia Mejorar la formación de los maestros de primaria en matemática: una dinámica.

Para crear o mantener la dinámica que todos aquí queremos, me parece que tendríamos que trabajar en dirección de los tres ejes siguientes:

- tener descripciones de cómo se enseña hoy la matemática, cuáles son las condiciones materiales y intelectuales de los alumnos y de sus maestros,
- permitir que los formadores participen tanto en la elaboración de esas descripciones como en las modificaciones experimentales que realizan organismos de investigación,
- mantener o aumentar la auto-estima tanto de los alumnos como de sus maestros.

Quisiera defender un punto de vista pragmático. Sé que en algunos de sus países, la educación estatal no tiene tanta fama como la educación en los colegios particulares. Las condiciones de trabajo - sueldo, responsabilidad, estabilidad laboral, documentación, número de alumnos - no son las mismas en los colegios estatales que en los particulares.

Un profesor necesita creer en lo que hace, cualquiera que sea su método de aprendizaje: yo misma he observado maestros quienes usaban métodos que a mi modo de ver eran peligrosos, pero lo hacían con tanto entusiasmo, tanto respeto a sus alumnos que al fin y al cabo, me pareció que el peligro no era tan grave. El profesor o la profesora como persona influye muchísimo en el aprendizaje de sus alumnos, por lo que desanimar a un maestro es lo peor: transmite ese desánimo a sus alumnos. ¿Cómo aprenderán?

Al contrario, si el profesor siente una dinámica de apoyo a su tarea, un apoyo que viene de su entorno, de los institutos de formación magisterial o del ministerio, podrá modificar sus métodos, poco a poco. Insisto en el "poco a poco". Enseñar, no es producir un alumnado con tal o cual rendimiento: es un proceso que compromete en su ser mismo tanto a los alumnos como a su profesor. La técnica del profesor sería insuficiente sin el entusiasmo y la ética, en relación a sus alumnos. El profesor, a su vez, necesita la técnica, el entusiasmo y la ética de sus directores y supervisores. Si el constructivismo es recomendable con los alumnos, también se debería recomendar dentro de la comunidad del magisterio. El ministerio de educación mismo está al servicio de los alumnos, y a través de ellos, al servicio del país a corto y largo plazo.

Recordemos que la UNESCO recomendó a todos los países que la educación básica esté a cargo del Estado y no sea motivo de ganancias, que todos los niños aprendan a leer, escribir y contar, que sea respetado el profesorado, también formado y protegido socialmente. Tengo la suerte de vivir en un país que tiene una educación estatal de buen nivel, con profesorado respetado por la sociedad, pero se avanza lentamente en el mejoramiento de la educación matemática.

Según la teoría de Vygostky, escoger recursos de mediación depende del estado del alumno. Aplicando esa teoría al caso de nuestros países, tenemos que analizar cuáles son los recursos disponibles en nuestro entorno. El aprendizaje nunca termina, pues es del aprendizaje de todos nosotros reunidos acá, así como el de los alumnos y el de sus maestros.

Referencias bibliográficas

Braun, J.-P. (Ed) (2000), Notre métier, notre identité*, Cahiers pédagogiques n° 380,* Paris.

Butlen, D. & Masselot, P. (1999), Une approche didactique de la question de la "pédagogie différenciée" en formation continue de professeurs d'école : un scénario de stage, in COPIRELEM, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Tome VI*, pp. 160-173, IREM de l'université Paris VII.

Galkina, T., Samoylenko, E., Bolon, J. & Vergnaud, G. (1998), *Éducation nationale, 7*, L'enseignement mathématique en France et en Russie (en ruso).

Galkina, T., Samoylenko, E., Bolon, J. & Vergnaud, G. (1999), *Les processus d'acquisition des connaissances mathématiques dans des contextes culturels et historiques différents*, Rapport de recherche, Paris : Maison des Sciences de l'Homme.

Unesco. *Lettre de l'éducation* n° 241, 251, 266, 280, Paris : Le Monde.

Notes d'information n° 99-19, 99-40, 99-41. Paris : Ministère de l'éducation nationale, de la recherche et de la technologie.

Perrin-Glorian, M.-J. (1997), Que nous apprennent les élèves en difficulté? , in COPIRELEM, *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Tome V*, pp. 121-143, IREM de l'université Paris VII.

Platone, F. (Ed) (1999) , L'école pour tous : conditions pédagogiques, institutionnelles et sociales, *Revue française de pédagogie n° 129*, Paris: Institut National de la Recherche Pédagogique

INRP (1999), Être et devenir professeur des écoles, *Perspectives documentaires en éducation n° 46/47*, Paris: Institut National de la Recherche Pédagogique.

En particulier, Charnay, R., *Quelques repères pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, pp. 79-86.

Unesco, *Rapport mondial sur l'éducation 2000*, *Le droit à l'éducation, Vers l'éducation pour tous, tout au long de la vie*, Paris : Unesco.

Unesco (1966), *Recomendación relativa a la situación del personal docente*, Paris: Unesco.

Recomendación aprobada por la Conferencia Intergubernamental Especial sobre la Situación del Personal Docente, Paris, 5 de octubre de 1966,

Unesco (1999), *Rapport sur le nouveau métier enseignant*, Paris: Unesco.

La formación y distinción de construcciones en la didáctica del Cálculo y del Análisis: una visión sociocultural

Francisco Cordero Osorio
fcordero@mail.cinvestav.mx
Cinvestav-IPN.
México

Se presenta una aproximación teórica que atiende la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática, la cual consiste en haber identificado una confrontación entre la obra matemática[12] *y la matemática escolar. Ambas son de naturaleza y funciones distintas, sin embargo, la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera. Esta tarea es compleja y dirige la atención a la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. Además, la aproximación teórica plantea que la actividad humana es la fuente principal donde se deberán hallar los elementos que permitan la reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar. Se discuten los avances de la aproximación, a través de un ejemplo que explica cómo la relación entre formación y distinción de la construcción del Cálculo y Análisis, en tanto objeto de conocimiento de la escuela, necesariamente se dan en la actividad humana.*

Introducción

La problemática fundamental de la enseñanza de la matemática que atiende la disciplina matemática educativa consiste en haber identificado una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar: ambas son de naturaleza y funciones distintas. Estas diferencias inevitablemente hacen compleja a la problemática debido a que a priori, en la matemática escolar, no se reconocen los mecanismos de construcción, ni la organización social que sucede en aula, que posibilita tales construcciones. Es decir, al seno de la organización social se reconstruyen significados de la matemática como recursos para aceptar cierto conocimiento matemático. En este sentido, no se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, como tradicionalmente se le había confiado a la psicología y pedagogía, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que compone cada obra matemática con base en las cuestiones que ésta representa.

Esta tarea, de la matemática educativa, no es trivial pues consiste en teorizar acerca de cómo interpretar y reorganizar a la obra matemática. Esto ha llevado a precisar elementos teóricos que ayudan a la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos de los diferentes niveles escolares. Las fuentes han sido las producciones del conocimiento, cuyas explicaciones han llevado a formular epistemologías modelizadas por la actividad matemática. Sin embargo, la reconstrucción de significados compone categorías del conocimiento matemático que no sólo son el resultado de la actividad matemática, sino también de la actividad humana. Es decir, en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención. En la actividad humana se construyen versiones diversas sobre su contenido. Estas versiones se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad y se van definiendo los diversos significados para los humanos[13] . En otras palabras, en la actividad humana se forman y distinguen

[12] La obra matemática es tomada en el mismo sentido de Chevallard, et al (1998), el cual consiste en considerarla como respuesta a un tipo de cuestiones o tareas problemáticas y está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Se puede concebir como una organización estática y determinada de antemano, sin embargo, se prefiere interpretarla en forma dinámica. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones.

[13] Conceptos como la interacción social ayudan a explicar el papel que desempeña la organización social en el aula cuando se construyen significados. Un acercamiento sociológico al respecto se puede encontrar en Candela (19??).

construcciones del conocimiento que se dan en las situaciones de interacción que se viven a diario en el aula por el estudiante y el profesor.

La visión anterior obliga a una reformulación epistemológica, la cual consiste en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. Si ese es el caso, se deben formular epistemologías modelizadas por la actividad humana que ayuden a habilitar esas categorías del conocimiento matemático en la matemática escolar.

La nueva hipótesis consiste entonces en, que es en la actividad humana donde encontraremos la fuente de la reorganización de la obra matemática que implique el rediseño del discurso matemático escolar.

El planteamiento anterior ha llevado a desarrollar una línea de investigación que incorpora cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento: la dimensión epistemológica, la cognitiva, la didáctica y social. A estas componentes en conjunto le llamamos aproximación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998), cuya tarea principal de investigación consiste en dar evidencias a la nueva hipótesis.

El sentido de lo sociocultural en esta aproximación consiste en dar prioridad a la actividad humana en las explicaciones del conocimiento matemático escolar, es decir, los seres humanos concebidos en contacto con su ambiente, creando su ambiente y a sí mismos por medio de las acciones en las que se involucran, reconstruyen significados. Por eso, el foco de atención para la problemática fundamental no esta sólo en los procesos de socialización, sino también en las situaciones que posibilitan la reconstrucción de significados. Esto es, centrar la atención en los procesos de socialización lleva a concebir al aprendizaje como mediado por diferencias de perspectivas entre coparticipantes (Lave y Wenger, 1991) y como consecuencia amplía la perspectiva del desarrollo cognitivo. Sin embargo, la tarea principal de acuerdo con la problemática es reorganizar la obra matemática, entonces se requiere también trazar una epistemología que oriente sobre los marcos de referencia del contenido matemático para hacer la elección de situaciones, para establecer los marcos en donde suceden las situaciones y los obstáculos que distinguen tales marcos.

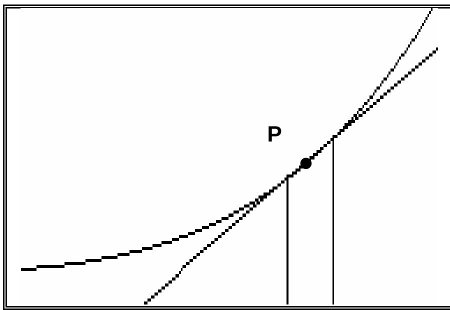
Recapitulando, la aproximación teórica formula que la matemática escolar debe ser una reorganización de la obra matemática. Para entender cómo hacer tal reorganización se requiere plantear una construcción del conocimiento, consistente con las formas de construir conocimiento en la escuela. Estas formas corresponden a la actividad humana que consiste de reconstruir significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas. La parte esencial de la reconstrucción de significados es la formación de construcciones y hacer distinción entre ellas, en otras palabras, es una clase de actividades y acciones que permiten las herramientas. Entonces el humano se somete a usarlas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y con ello hace construcciones de representaciones.

En ese sentido ofrecemos un ejemplo de una categoría que tiene un carácter funcional del conocimiento matemático y su construcción está en relación con la modelación y el uso de las herramientas matemáticas. Los dos aspectos anteriores corresponden a la actividad humana. La categoría ha provisto de una reorganización de cierto contenido del Cálculo.

La aproximación teórica creará una nueva base de entendimientos y construcciones donde la fuente de abstracción se encuentra en el ámbito de la actividad humana. Formula una línea de investigación que amplía la problemática. No sólo considera epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática sino también, modelizadas a través de la actividad humana. Y esto debe componer una nueva base didáctica para que la matemática escolar reorganice la obra matemática.

La reconstrucción de significados como una reorganización de la obra matemática

La epistemología de cálculo y análisis reconoce diferentes construcciones posibles y que cada una de éstas generan argumentos que permiten construir nuevo conocimiento, sin embargo, reconocer que estos argumentos son distintos para seleccionar uno dependiendo de la situación es la parte esencial de la construcción. Por ejemplo, el concepto de derivada comúnmente es representado por ventanas como en la Figura 1.



1. Aproximación

$$\lim_{X \to Xo} \frac{f(X) - f(Xo)}{X - Xo} = f'(Xo)$$

2. Variación

f(Xo+h)=f(Xo)+f´(Xo)h +...

3. Graficación

Y = A f(Bx) + C

Figura 1. Distinción y formación de construcciones

Consiste de una curva, de un punto P sobre la curva y de una recta tangente a la curva en dicho punto. Sin embargo, la ventana puede ser una representación de tres situaciones distintas: la de aproximación, la de variación y la de graficación. En cada una de estas situaciones se desarrollan procedimientos distintos sobre procesos y objetos también distintos para generar argumentos propios de la situación. Una descripción de cada una de las situaciones puede ser como la siguiente, en donde consideramos tres aspectos: la clase de pregunta, los procedimientos y los argumentos.

<u>Situación de aproximación</u>. a) La clase de pregunta: “Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P de la curva y=f(x)”; b) el procedimiento: límite de un cociente cuyos procesos y objetos se reflejan sobre la función, la pendiente y la derivada; c) el argumento: la analiticidad de la función.

<u>Situación de variación</u>. a) La clase de pregunta: “Sea f(xo) y f´(xo) condiciones iniciales de cierta posición de un móvil. Predecir la siguiente posición f(xo+h)”; b) el procedimiento: comparación entre dos estados f(xo+h)-f(xo) cuyos proceso y objetos se reflejan sobre cantidades, variación continua y estados; c)el argumento: la predicción de lo que cambia

<u>Situación de graficación</u>. a) La clase de pregunta: “Determine el valor de los coeficientes A, B, C y D para que la curva y=f(x) se parezca a la recta en un intervalo Io”; b) el procedimiento: variación de los coeficientes de la transformación de unan función cuyos procesos y objetos se reflejan sobre los patrones y comportamientos de las gráficas; c) argumento: el comportamiento tendencial de las funciones.

Las situaciones proveen de tres argumentos: analiticidad, predicción y comportamiento tendencial, y cada uno de ellos son significados del cálculo, sin embargo, los tres argumentos en conjunto componen una reconstrucción de significados reorganizada por la propia actividad humana. En otras palabras, estos argumentos componen una epistemología del cálculo, pero esta epistemología da cuenta de las formas de construcción de la actividad humana: por un lado, se forman construcciones que dependen de la situación, en donde se hacen representaciones y producen procedimientos de acuerdo con las experiencias de los participantes, y por el otro lado, se reconocen distintas las construcciones para efectuar una selección que responda a las nuevas situaciones.

La cuestión, en la perspectiva teórica, es diseñar situaciones basadas en esta epistemología, en donde el foco de atención no sólo debe estar en la adquisición del conocimiento, sino también en el desarrollo de actividades que determina la organización social del humano

Un marco como el anterior ayuda a tratar ciertos fenómenos educativos de la matemática, por ejemplo el privilegio del contexto algebraico. Los temas curriculares, tales como la transformación de funciones, las operaciones de funciones, las asíntotas de funciones y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales, son presentados a través de manipulaciones algebraicas. Los cursos generalmente son enfocados a la solución y simplificación de ecuaciones a través de factorizar, trabajar con identidades trigonométricas y a través de trazar gráficas de las ecuaciones. Esta perspectiva, que privilegia el contexto algebraico, deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha idea del campo de esos temas.

Sin embargo, sabemos, desde un punto de vista epistemológico, que en los últimos 20 años la naturaleza de los conceptos de esos temas ha cambiado. Por un lado, encontramos el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y, por otro, encontramos el desarrollo de la tecnología; particularmente nos referimos a las calculadoras graficadoras. Estos dominios de alguna manera han enfocado la atención no sólo en los métodos cuantitativos, sino también en los cualitativos. Sin embargo, la enseñanza de la matemática no ha sido influenciada por esta evolución. Se podría decir que la enseñanza ha quedado centrada en el contexto algebraico.

Por esto, los elementos didácticos de una nueva perspectiva consisten en poner en juego relaciones entre diferentes contextos. Por ejemplo el algebraico y el gráfico. Precisamente, el lenguaje de las herramientas en la actividad humana ayuda a identificar al comportamiento tendencial de las funciones como una categoría, la cual genera argumentos cualitativos que determinan nuevas acciones, que consisten en un intercambio permanente entre los contextos algebraicos y gráficos, como las siguientes (Cordero, 1998; Cordero y Solís, 1997):

Identificar coeficientes en las funciones, reconocer patrones de comportamiento gráfico y algebraicos, buscar tendencias en los comportamientos y establecer relaciones entre funciones.

Con esta selección de herramientas, el estudiante ha podido reconstruir significados a la variación de parámetros de las transformaciones de funciones y a las ecuaciones diferenciales, los cuales consisten en establecer "instrucciones" que organicen comportamientos. En ese sentido una ecuación diferencial puede significar "una relación entre funciones que determina comportamientos" que ayuda a predecir soluciones sólo leyendo la ecuación, sin tener que acudir necesariamente a los métodos (Cordero y Solís, 1999).

Un ejemplo. La situación de la linealidad del polinomio

Un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a ésta a pesar de conocer que la derivada es la pendiente de una recta. Por ejemplo, en situaciones gráficas se reporta que el estudiante ante relaciones funcionales como $f(x)= Ax^2 +Bx+C$ logra incorporar significados a los coeficientes A y C con relación a la forma de la gráfica pero no para B (Mirón, 2000). La pendiente es un número que ante la gráfica de la relación funcional no se "dibuja" a diferencia de los coeficientes A y B.

En ese sentido, la situación linealidad del polinomio tiene la intencionalidad de relacionar la recta tangente con el comportamiento de la función, es decir, el estudiante reconstruirá un significado a la parte lineal del polinomio a1x+a0 con relación al comportamiento tendencial de la gráfica del polinomio. La reconstrucción del significado consiste de dos aspectos: identificar la propiedad de linealidad y de establecerla como argumento.

La linealidad del polinomio (véase Figura 3), consiste en que la parte lineal de cualquier polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$, es la recta tangente al polinomio que pasa por el punto (0,P(0)).

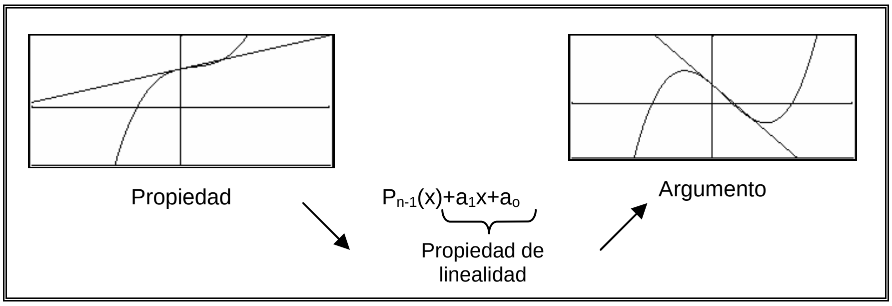


Figura 3.Polinomio + recta

Sin embargo, el aspecto relevante aquí, es el diseño de situación que se ha logrado después de entender las modelizaciones que el estudiante suele hacer para identificar o construir la propiedad de linealidad. Por ejemplo, las modelizaciones que lograron hacer cuando se les formulaba actividades como la siguiente, consistieron en sumar la gráfica de dos funciones a través del comportamiento de éstas como argumento:

Actividad. Explica por qué la gráfica de h tiene el comportamiento como aparece en la Figura 4

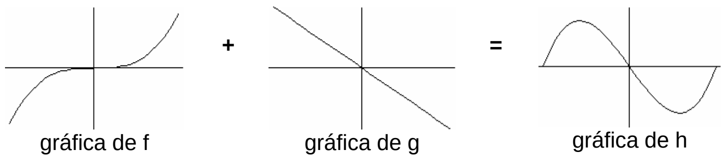


Figura 4

La función h fue reconocida como la suma de dos funciones con relación a su comportamiento tendencial. La suma de las dos funciones, tanto algebraicamente $f(x)+g(x)$ como aritméticamente $f(a)+g(a)$, pasaron a ser una instrucción que organizaba comportamientos de *h*. Las explicaciones de los participantes aludieron siempre al comportamiento tendencial. Parafraseamos a continuación una de ellas:

...la gráficas que aparecen en la figura 4... la gráfica de *g* pasa por el origen pero también la gráfica de *f*. Ahora bien, la gráfica de *h*, en el origen se parece a la gráfica de *g* y después a la gráfica de *f*... creo que las gráficas se persiguen. La gráfica de *f* quiere ser la gráfica de *g*, esto es, *f* se comporta como *g* en esa misma ventana, pero fuera de esa ventana *g* quiere ser como *f* y eso hace la gráfica *h*...

Lograron formular secuencias de gráficas de $f_0+g_k=h_k$ para la suma de funciones. Establecieron relaciones entre un comportamiento dado y la variación de comportamientos. Generaron patrones gráficos de suma de funciones.

Con estas modelizaciones se ha logrado el siguiente diseño de situación(véase Figura 5) que permite que el estudiante construya la propiedad de linealidad del polinomio y genere un argumento que le permite anticipar comportamientos gráficos de los polinomios.

Enunciado de la actividad.

«¿Qué le pasa a una función cuando le sumas una recta?»

El objetivo es explorar las gráficas que surgen cuando a una función conocida f(x) se le suma una recta arbitraria:

$$y(x) = f(x) + recta$$

En esta sesión haremos con detalle la suma de la función $y_1(x)=x^2$ y una recta y la suma de la función $y_1(x)=x^3$ y una recta, para después hacer algunas generalizaciones en los polinomios.

Actividades

1. $y(x) = x^2 + recta$

Analiza esta situación a través de dibujar las gráficas de la recta que sumes y la función resultante en un mismo sistema de ejes coordenados. Hazlo para varios casos.
Organiza tus resultados en una tabla que registe las características de la recta y la función resultante. Escribe un párrafo con tus conclusiones.

2. $y(x) = x^3 + recta$

Analiza esta situación a través de dibujar las gráficas de la recta que sumes y la función resultante en un mismo sistema de ejes coordenados. Hazlo para varios casos.
Organiza tus resultados en una tabla que registe las características de la recta y la función resultante. Escribe un párrafo con tus conclusiones.

3. Establece un criterio, que incluya los dos casos analizados, que describa lo que le pasa a una función cuando le sumas una recta.

4. Formula y demuestra la proposición (teorema) de acuerdo con el criterio establecido.

Figura 5. Enunciado de la actividad

La función f(x) es elegida, espontáneamente, como polinomio por los participantes, es decir, el polinomio es privilegiado. La secuencia x^2+recta y x^3+recta es una selección de acuerdo con las experiencias de los estudiantes que les ayuda a reconocer un patrón de comportamiento de las gráficas, no sugiere algún tratamiento inductivo. El proceso de construcción que aparece en el diseño es como sigue: la pregunta 1 formula una conjetura: la parábola $y=x^2$ se traslada vertical y/o horizontalmente, dependiendo de los coeficientes de la recta, y el traslado no admite cambios de pendiente de la parábola; la pregunta 2 formula una conjetura distinta a la de la pregunta 1, la cual provoca una contradicción debido a que se espera la misma conjetura para la pregunta 2: la gráfica de $y=x^3$ no se traslada, pero sí cambia de pendiente. Los participantes se enfrentan a la contradicción, y para resolverla tienen que reformular la conjetura 1 con base en la conjetura 2. Es decir, los estudiantes forman dos construcciones y las distinguen para seleccionar una. La linealidad es el argumento que satisface ambas preguntas y posibilita la generalidad para cualquier polinomio. Después, se está en posición de formular la proposición que exprese la propiedad de linealidad y de demostrarlo. Hay participantes que logran convertir la propiedad en argumento cuando se plantean bosquejar la gráfica de algún polinomio arbitrario, por ejemplo $P(x) = x^4+5x^2 + x -3$. Trazan la recta y=x-3, después buscan la intersección con el eje y, ahí el polinomio se comporta como la recta y=x-3, fuera de ahí el polinomio deberá perseguir un comportamiento similar a del término de la potencia mayor.

Conclusiones

La aproximación socioepistemológica intenta articular dos grandes componentes: la social y la epistemológica, donde el humano y su actividad, pasen a ser elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa. La reconstrucción de significados, fuente para reorganizar la obra matemática, corresponde a una epistemología cuya tarea principal es modelizar la actividad humana, este es el marco de referencia del contenido matemático; por la importancia del hecho ha convenido en llamársele categorías, las cuales vertebran la reorganización del contenido matemático para su didáctica. En otras palabras, se busca, entre la complejidad de la problemática, la "situación fundamental" que permita el rediseño de las situaciones, la reorganización matemática, o bien, el "rediseño del discurso de la matemática escolar".

La investigación que propicia las categorías mencionada ha ocupado diferentes marcos teóricos dentro de la disciplina; entre los más relevantes está la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997) y la teoría APOE de Dubinsky (Asiala, et al, 1996) ampliada al incorporar la dimensión epistemológica en el sentido que se le ha tratado aquí. Las metodologías han correspondido de manera natural a la ingeniería didáctica y al ciclo ACE.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education. II, 6, 1-32.*

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in Mathematics. Didactque des mathématiques, 197-1990. Kluwer Academic Publishers.

Candela, A. (1999). Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso. Primera edición. Paidós Educador.

Cantoral, R. y Farfán, RM (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon Número monográfico*. Revista de la SAEM (Thales). Num. 42 Vol. 14(3) España (pp. 353-369).

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, 56-74.

Cordero, F. (1999). La matemática educativa en una aproximación sociocultural de la mente. VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger. UNAM-UPN, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V., pp. 106-112.

Cordero, F. y Solís, M. (1997). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo*. Serie Cuadernos de Didáctica, Grupo Editorial Iberoamérica, 2a. edición, 79 pp.

Cordero, F. y Solís, M. (1999). Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales. En R. Farfán (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 12, Tomo 1.* Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición, pp. 29-33

Chevallard, y Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, England: Cambridge University Press

Mirón, H. (2000). Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones f y f´ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN.

El Adulto Resuelve Problemas Aritméticos Elementales

Marta Elena Valdemoros Alvarez
mvaldemo@mail.cinvestav.mx
CINVESTAV-IPN
México

Resumen

Esta comunicación deriva de una investigación en actual desarrollo, la cual es respaldada por el CONACYT. Aquí, se exponen los resultados parciales obtenidos en tercero, cuarto y quinto grados de una escuela nocturna perteneciente al sistema educativo escolarizado, en la Ciudad de México. Los sujetos del estudio son jóvenes y adultos de distintas edades, cuyos perfiles de desempeño aritmético, familiar, ocupacional y comunitario presentan profundas diferencias de uno a otro. Las tareas académicas reportadas son problemas aritméticos en los que se usan números naturales, tanto en un cuestionario exploratorio como en algunas entrevistas llevadas a cabo con personas que exhibieron modos de resolución eficientes. El interés primordial del presente escrito reside en la reflexión en torno a los procesos semánticos de los jóvenes y adultos que les facilitaron la producción de determinadas soluciones, a la par de prestar atención a las características de los problemas aritméticos con números naturales que generan mayor comprensión en dichos sujetos.

Marco Teórico

En la Reunión Internacional de Hamburgo, convocada por la UNESCO (1997), se reconoció que la problemática de la formación de adultos es uno de los mayores desafíos educativos contemporáneos compartidos mundialmente. Aunque en las distintas regiones del planeta, se diferencian las experiencias desarrolladas en este terreno y las necesidades que las sustentan, la UNESCO asume que hay un requerimiento universal de atención a este sector (mediante diversas modalidades de lucha contra el analfabetismo, o bien, de formación básica, especialización en el trabajo, educación permanente o de educación a distancia) y de promoción de investigación especializada en el mismo.

En Latinoamérica, pese a la heterogeneidad existente entre los países que componen la región y la fuerte diversidad interna que caracteriza a cada uno de ellos, las tendencias fundamentales de la educación de adultos se expresan a través de la lucha contra el analfabetismo y la instrucción básica. Esto era destacado años atrás por Solari (1982) y ha sido recientemente ratificado por Medina (1997), a partir de la información reunida por UNESCO.

En ese marco general y como ya lo hemos señalado precedentemente (en Valdemoros, 1997, 1998), la educación matemática elemental de los adultos demanda tanto la actualización de las propuestas de enseñanza destinadas al sector como un amplio reconocimiento de los procesos cognitivos comprometidos en los aprendizajes fundamentales de los adultos, en su pasaje por la primaria. Para poder ofrecer respuestas adecuadas a ambos requerimientos, se torna imprescindible asentar firmemente tal línea de investigación, al interior de la Matemática Educativa, desde donde se pueda indagar profundamente los aspectos que confluyen en este espacio instruccional básico.

Reconociendo que los significados, nociones y conceptos numéricos brindan un soporte fundamental al conocimiento matemático básico y que el punto de partida de tales construcciones lo constituyen las elaboraciones realizadas en torno a los números naturales, por parte del sujeto cognoscente, se retoman en estas páginas las aportaciones realizadas por Fuson y Hall (1983) con respecto a la semántica fundamental de dichos números. Específicamente, se privilegian los significados de cardinal, ordinal y medida derivada del conteo. Asimismo, interesan los significados otorgados a la unidad, y a las operaciones fundamentales que se realizan con números naturales; en ello, se rescatan los planteamientos efectuados por Hiebert (1988), en particular, la reflexión acerca del reconocimiento de unidades simples y compuestas.

En cuanto a la naturaleza de los problemas diseñados para los adultos, se toman en consideración los planteamientos efectuados por Cabello (1997), Catalán y Gallach (1997), Zuasti y López (1989), entre otros autores que promueven criterios análogos. En particular, se resalta la conveniencia de elaborar propuestas e instrumentos de trabajo que recuperen la experiencia antecedente de los adultos, permitiendo que pueda ser contemplada la diversidad de prácticas que ellos mantienen y las necesidades que experimentan.

El problema planteado en este estudio

Los significados, nociones y conceptos construidos por los adultos en torno a los números naturales, los que son susceptibles de reconocimiento cuando éstos resuelven problemas aritméticos que involucran a tales números.

La hipótesis sustentada

El dominio de los significados, nociones y conceptos numéricos referidos a los números naturales favorece la resolución de problemas y mejora el cálculo aritmético ligado a éstos.

El método

Esta investigación es de naturaleza eminentemente cualitativa. El diseño general de la misma otorga un papel exploratorio a la aplicación inicial de un cuestionario, a partir del cual se obtiene información general de los grupos de adultos considerados y se puede realizar una selección más eficaz de las personas que exhiben un perfil destacado, para desarrollar con ellas un estudio de casos. Este último constituye un componente central de la investigación descrita. En particular, los casos serán sometidos a indagación a través de entrevistas individuales de carácter didáctico, en las que –desde un enfoque constructivista– se promueven las reelaboraciones de los entrevistados y se accede a modos muy activos de retroalimentación (conforme a la caracterización que en Valdemoros *et al.*, 1996, se realiza de la "entrevista didáctica").

Los instrumentos han sido diseñados para promover la resolución de problemas que reconstruyen diversos aspectos de la experiencia vital, familiar, ocupacional y comunitaria de los adultos. Toda vez que el tipo de 'reconstrucción de la experiencia' lo permite, se modela con ella una diversidad creciente y eslabonada de situaciones que facilitan un recorrido semántico y conceptual polifacético. Se usan distintas modalidades de representación para la comunicación de los problemas: expresiones lingüísticas escritas, expresiones aritmético-técnicas, los dibujos que favorecen soluciones inspiradas en aproximaciones del adulto marcadamente intuitivas, listados y representaciones tabulares. El cuestionario está compuesto por diez problemas planteados alrededor de los traslados urbanos e interurbanos, la vida del barrio, la compra de artículos diversos, la presentación de actividades laborales básicas, la jardinería, etc. Las entrevistas están estructuradas a partir de uno de los modelos introducidos en el cuestionario: el restaurante. Así, la vida interior de éste es presentada de manera accesible para que los sujetos resuelvan, en ese marco, una gran variedad de situaciones aditivas y multiplicativas asociadas a las labores de la cocina, el servicio de las mesas, la atención de comensales, la compra de los artículos imprescindibles para la preparación del menú y el aseo general.

El escenario natural de la investigación lo proporciona una escuela pública nocturna, integrada al sistema escolarizado de enseñanza. La misma se encuentra en el área conurbana de la Ciudad de México, en una zona industrial. La institución se caracteriza por contar con una planta docente profundamente comprometida con las necesidades e intereses de los adultos a su cargo.

Los sujetos de la investigación son los jóvenes y adultos incorporados a tercero, cuarto y quinto grados de la escuela mencionada. El estudio de casos compromete la selección de cinco personas con diferentes edades y perfiles de desempeño aritmético, ocupacional, familiar.

Los procedimientos de validación adoptados para legitimar la experiencia de campo y los resultados obtenidos, son los 'controles cruzados' entre dos observadores y la 'triangulación de tareas similares', susceptibles de ser comparados y de permitir constatar la persistencia de las respuestas y procesos de resolución observados.

Resolviendo problemas elementales

En esta sección se presentan los resultados globales obtenidos, concentrando la atención en aquellos que concitan las interpretaciones y el análisis fundamental de estos datos de campo.

a) Resultados generales registrados en el cuestionario exploratorio

La mayoría de los miembros de esos grupos pudieron responder adecuadamente a los problemas en los que se demandaba el reconocimiento del cardinal. La pregunta "¿cuántos?" estaba cargada de sentido para casi todos los adultos.

A nivel del ordenamiento de cantidades y del reconocimiento de ordinales, se incrementaron notablemente los errores de los resolutores del cuestionario. Con respecto a lo primero, quienes respondían inadecuadamente tan sólo lo hacían ante los ordenamientos más difíciles; unos pocos adultos incurrieron en errores generalizados en estas tareas de ordenamiento, o bien, invirtieron el sentido del ordenamiento (si se les demandaba hacerlo de mayor a menor, lo hacían de menor a mayor, como seguramente solían utilizar la secuencia numérica de los naturales). El uso de determinados ordinales (por ejemplo, "... el décimo ...") parecía resultar desconocido para una minoría cuya frecuencia era bastante variable.

Los problemas sencillos de tipo aditivo no suscitaron dificultades de comprensión respecto a su naturaleza, en la mayoría de los adultos que resolvieron el cuestionario exploratorio. No obstante, muchos eran los que incurrían en errores de corte algorítmico. En el caso de algunos problemas en los que se requería sumar y restar, un número destacado de adultos optaron por una sola operación, con la consiguiente distorsión de la solución propuesta.

Un número variable de adultos no resolvió los problemas de tipo multiplicativo, situación que se presentó con mayor frecuencia en el caso de los problemas más complejos, en los que debían hacer uso reiterado de la multiplicación. Los problemas en los que la solución más sencilla implicaba el uso de la división, condujo a unos pocos adultos a un uso eficiente de la operación inversa, para obtener un resultado adecuado. En contraste con esto último, dos adultos evidenciaron no poder identificar 'el resto de la división', en situaciones muy concretas.

Nos llamó la atención la circunstancia de que un reducido número de adultos (de reciente incorporación a la escuela) tenía dificultades notacionales cuyo origen podría vincularse a la lectura y escritura de números mayores a los que ellos efectivamente podían manejar, o a conflictos cognitivos importantes con respecto al sistema posicional. Sin embargo, el cuestionario no nos permitió avanzar en la dirección de esclarecer tal duda, dado que –entre otras razones– no fue diseñado para detectar tales dificultades cognitivas.

b) Resultados generales del estudio de casos

Los cinco casos estudiados fueron seleccionados por haber resuelto en su totalidad el cuestionario previo y presentar distintas modalidades de ejecución. Al momento de la realización de las entrevistas, tres de ellos estaban incorporados a quinto grado, uno a cuarto grado y el último, a tercer grado. Desde otro punto de vista, eran tres mujeres y dos hombres, con edades comprendidas entre 15 y 71 años. A nivel ocupacional, se distinguían en el ejercicio de distintas labores (un obrero, un carpintero, dos trabajadoras domésticas y un ama de casa).

En el desarrollo de las entrevistas pudo observarse que para dos de esos casos (las mujeres de quinto grado, dedicadas al servicio doméstico, una de 16 años y la otra de 40 años), al enfrentar las situaciones multiplicativas podían hacer uso del procedimiento canónico o, alternativamente, tendían a apegarse a procedimientos avanzados de conteo, apoyados en el reconocimiento de unidades compuestas, lo cual podía ser luego reducido por ellas mismas a una "suma repetida"; con ello, además de hacer explícita la interpretación otorgada a la multiplicación de naturales en dichas situaciones, también ofrecieron evidencias de un uso espontáneo del natural como 'medida derivada del conteo'. Una de ellas brindó algunos débiles indicios –en algunos momentos de las entrevistas– de apoyarse en el cálculo mental.

Los hombres (un obrero de 15 años incorporado a cuarto grado y un carpintero de 71 años, perteneciente a quinto grado) exhibieron un marcado apego a los procedimientos algorítmicos canónicos, incurriendo ocasionalmente el primero de ellos en algunos errores de cálculo asociados a pequeñas distorsiones de los respectivos procedimientos, además de llegar a una laboriosa rectificación del problema multiplicativo del cuestionario, expresado a través de dos escalas muy sencillas (tres cantidades distintas del mismo tipo de pintura asociadas al precio de una de ellas). El carpintero mostró un manejo impecable de los algoritmos. Para ambos y sin lugar a dudas, los problemas planteados adquirieron un sentido adecuado.

El ama de casa de tercer grado (con 41 años de edad) también se apegó al uso adecuado de los algoritmos canónicos, tanto en el cuestionario como en las soluciones inicialmente explicitadas en las entrevistas. Lentamente, resolvió los problemas planteados y en sus justificaciones abrió paso a otros recursos personales de cálculo. Las situaciones a resolver en las entrevistas fueron claramente significativas para ella.

Globalmente, los entrevistados dieron muestras de haber construido adecuadamente los contenidos semánticos primordiales atribuidos convencionalmente a los números naturales. En escasas ocasiones, algunos de ellos manifestaron dudas y errores leves de cálculo, los que pudieron ser superados a partir de confrontar distintos modos de solución ante los mismos problemas.

Referencias bibliográficas

Cabello, M. (1997). *Didáctica y educación de personas adultas.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Catalán, J. y Gallach, M. (1997). La necesidad de la existencia de la educación permanente de adultos para el desarrollo promocional y la cualificación profesional de las personas. *Quaderns. Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.

Fuson, K. y Hall, J. (1983). The acquisitions of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En: H. P. Ginsburg (Ed.), *The develpment of mathematical thinking.* Nueva York: Academic Press.

Hiebert, J. (1988). Introduction. En: J. Hiebert y M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades, 2.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Medina, O. (1997). *Modelos de educación de personas adultas.* Canarias: El Roure Editorial.

Solari, A. (1982). Desigualdad social y educación de adultos en América Latina. En: C. A. Torres (Ed.), *Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina* (21-33). México: Centro de Estudios Educativos.

UNESCO (1997). Plan de acción para el futuro de la educación de adultos. *Fifth International Conference on Adult Education.* Hamburgo, Alemania.

Valdemoros, M., Orendain, M., Campa, A. y Hernández, E. (1996). La interpretación ordinal de la fracción. En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa, I* (441-455). México:

Editorial Iberoamérica.

Valdemoros, M. (1997). Para la educación matemática elemental de jóvenes y adultos. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa XI.* Morelia, México. 17.

Valdemoros, M. (1998). El inicio de la educación matemática elemental de los adultos. *Memorias de la Reunión Latinoamericana XII.* Bogotá, Colombia. 55-58.

Zuasti, N. y López, F. (1989). *Las Matemáticas en la Educación de los adultos/as.* Madrid: Editorial Popular.

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México el amplio respaldo brindado a esta investigación en desarrollo. Su apoyo ha facilitado la conformación de un pequeño equipo de investigación y la disposición de todas las facilidades de infraestructura previstas para su realización.

Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos

Ricardo Cantoral[14]
rcantor@mail.cinvestav.mx
Área de Educación Superior, DME – Cinvestav, IPN
México

Resumen.

La aproximación *socioepistemológica* de la investigación en matemática educativa se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este saber se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor (Alanís et al, 2000; Cantoral, 1999).

En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos. Llamamos a estos discursos con el término genérico de *discurso matemático escolar*. Cabe aclarar que la estructuración de dicho discurso no se reduce a la organización temática de los contenidos ni a su función declarativa, sino que se extiende un tanto más allá al llegar al establecimiento de bases de comunicación y a la formación de consensos, en lo que Teillard de Chardain llamara la *noosfera* (Cuénot, 1970).

Este proceso de estructuración teórica del discurso matemática escolar, del conocimiento didáctico del profesor y su conocimiento didáctico del contenido se tornan fundamentales en la explicación de las dislexias escolares. En nuestra opinión, el proceso de difusión institucional del saber matemático no concluye con la impresión de las páginas de los textos sino que se prolonga al interior del aula. Las interacciones entre alumnos y profesor, mediadas por el discurso matemático escolar, se conforman como el terreno propicio para la formación de consensos. Pues un cierto proceso de selección jerárquica de las ideas opera al seno del aula donde se privilegian ciertos métodos por sobre otros, se prefieren alunas explicaciones en vez de otras, se eligen ejemplos y problemas con un cierto criterio que induce un cierto proceso de peyoración de las prácticas espontáneas de los estudiantes.

En nuestra presentación, nos ocuparemos de ejemplificar las afirmaciones anteriores apoyándonos de una serie de estudios sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Específicamente trataremos con el fenómeno de resignificación escolar de algunas nociones y procedimientos matemáticos como aquellos relativos a la enseñanza de la derivada entendida de una manera alternativa: la derivada como una organización de las derivadas sucesivas.

Introducción. La ciencia y su educación no están desligadas de la prácticas sociales al seno de las que se desarrollan. Sin embargo, las matemáticas por ejemplo, como es bien sabido, se han desarrollado bajo la premisa de que ellas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la praxis social y en consecuencia externas al individuo. Esta visión platonista del conocimiento, impregna por igual al quehacer didáctico de nuestros días; un profesor comunica "verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso; la *forma* entonces, asume esta visión, hará develar mas temprano que tarde el significado de los objetos abstractos entre los alumnos.

Este artículo sostiene la tesis de que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de

[14] Esta ponencia forma parte del proyecto de investigación titulado: "Construcción social del conocimiento matemático avanzado: Estudios sobre el pensamiento y el lenguaje variacional". Conacyt: 26345-S.

prácticas humanas socialmente establecidas. Esta afirmación no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empiria. Mas bien, nuestra tesis tiene una orientación sociológica, puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos. En este sentido, sostendremos en este artículo la existencia de una dialéctica entre el uso y el símbolo o dicho de otra modo, entre la actividad y el objeto.

Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de "hacer ver" la postura descrita, han seguido una aproximación sistémica que permite tratar en forma articulada con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como *el acercamiento socioepistemológico*, (Cantoral, 1999).

En este ensayo entenderemos con la expresión construcción social del conocimiento matemático avanzado al conjunto de las interacciones, explícitas o implícitas, que se establezcan entre los polos relativos a: Los procesos avanzados del pensamiento. La epistemología de la matemática avanzada. Las prácticas humanas altamente especializadas

A manera introductoria, presentamos a continuación una síntesis de las posibles interacciones entre los polos citados, a las que hemos llamado: Memoria voluntaria y construcción social, Matematización y construcción social y Sociocultura y matemáticas. Consideremos, por ejemplo, como punto de partida al polo de los procesos avanzados del pensamiento y veamos cómo éstos se articulan con la epistemología y con las prácticas sociales. Habitualmente se ubica entre tales procesos avanzados del pensamiento a la abstracción reflexiva, la generalización, el razonamiento bajo hipótesis o la memoria voluntaria. Estos procesos mentales, a diferencia de lo que podría creerse, tienen una fuerte base social, pues muestran vínculos tanto con las circunstancias que permiten la construcción del conocimiento, como con las diversas prácticas sociales para la formación del consenso y la legitimidad de un discurso a través de mecanismos de persuasión.

Memoria voluntaria y Construcción Social

Mostraremos a continuación un ejemplo de memoria colectiva con la intención de mostrar que aun en los actos más cotidianos, aquellos que habitualmente consideramos de naturaleza estrictamente individual como la memoria, tienen por el contrario una clara dimensión social. Volveremos sobre el significado de este episodio en la parte final del artículo para adecuarlo al caso particular de la constitución de las matemáticas escolares.

Una madre está por salir de casa acompañada de su hija de seis años. La madre, quien llevará a su hija en el automóvil rumbo a la escuela descubre que no tiene las llaves. La hija, quien tenía en su poder las llaves del carro justo antes de salir, no las encuentra en el sitio en que creía haberlas dejado.

Madre - ¿Dónde dejaste las llaves del auto? / Hija - Las dejé en la mesa del comedor. / Madre - No las vi ahora que estuve ahí. / Hija - Ah no, están en la cocina. / Madre -¡Pero si tu no estabas en la cocina! / Hija - Es cierto, ... / Madre -¿No estarán en tu recámara? De ahí vienes ahora, ¿no? / Hija - Sí, es cierto. Recuerdo que... están en mi cama. / La niña corre entonces hacia su recámara y regresa con las llaves.

Este episodio, como muchos otros de la vida cotidiana, muestra la manera en que aun los actos más simples, como la memoria, dependen de las interacciones sociales entre los seres humanos. Este diálogo nos permite formular algunas preguntas: ¿quién recordó? ¿Fue la madre, la hija o la situación? Regresaremos a este ejemplo en la sección que tratemos de la experiencia educativa sobre las derivadas sucesivas en la enseñanza del cálculo, a fin de mostrar el carácter social del conocimiento matemático.

Matematización y Construcción Social

Al respecto, pensemos por ejemplo en la introducción del concepto de límite en el análisis matemático clásico del siglo diecinueve. Recordemos cómo, con su introducción, se institucionaliza el tratamiento de los procesos infinitos a través de procedimientos finitos. La definición formal de límite de una sucesión numérica es una muestra de ello.

Definición. Diremos que el límite de p_n cuando n tiende a infinito es p si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N > 0 \ni \forall n > N \Rightarrow |p_n - p| < \varepsilon$$

Notación. En tal caso, se escribe $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ o bien $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

Esta definición permite justificar que el límite de una sucesión es un número, sin tener la necesidad de proseguir, infinitamente, calculando los valores que toma la sucesión en la medida en que n avanza progresivamente. Para lograrlo, usaron inferencias lógicas y argumentos de naturaleza finita; pues dado un ε positivo y determinada en consecuencia una N a partir de la cual se satisfagan las condiciones de la definición, no habrá necesidad de evaluar, uno a uno, los valores de la sucesión para saber que p es el límite de pn.

Aunque este tratamiento del infinito tiene orígenes antiguos, la formulación de la definición de límite que hemos dado, transformó la concepción que sobre los procesos infinitos se tenía en las matemáticas. Sin duda marcó una época, pues permitió que una gran variedad de viejas temáticas y diversos fenómenos naturales fueran estudiados con nuevas visiones teóricas.

Consideramos que la introducción del concepto de límite en las matemáticas del siglo diecinueve, motivó un cambio en la epistemología de las matemáticas que propició el desarrollo de una parte considerable del saber universitario en la medida que introdujo nuevas asignaturas y nuevas aproximaciones a las viejas asignaturas tanto al nivel del textos escolares como en el ámbito de la práctica educativa cotidiana. Estos cambios en el terreno social de la educación, motivaron la elaboración de nuevas propuestas educativas orientadas a públicos cada vez mas diversos.

Adicional a lo anterior, la modificación estructural de la matemática del cambio que produjo la incorporación del concepto de límite en el sentido de Weierstrass, permitió la evolución de prácticas humanas altamente especializadas como la comunicación metafórica al utilizarla cada vez con mayor fuerza en la modelación o matematización de la ciencia sin desatender a los nuevos estándares de rigor. Estos procesos de modelación precisaron, a su vez, de la construcción de diferentes principios de conservación que fueron extraídos de un conjunto de múltiples prácticas humanas.

Dado que la matemática se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza le obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, hemos conducido el desarrollo de tales aproximaciones mediante estudios que permiten entender los mecanismos de la adaptación de tales saberes especializados a las prácticas culturales que tienen lugar al seno de la universidad.

En otro orden de ideas, tomando al polo de las actividades humanas de socialización como punto de partida, podemos reconocer el efecto que éstas tienen en el propio desarrollo de la matemática. Ello en la medida que, por ejemplo, todo conocimiento erudito debe reestructurarse en una versión del conocimiento que pueda considerarse pública y en consecuencia abandone la esfera privada de las circunstancias de su invención. Este proceso de socialización del conocimiento obedece a prácticas que algunos investigadores han estudiado en detalle desde diferentes perspectivas teóricas, (Cantoral, 1990; Pulido, 1998;

Chevallard, 1985, Bernstein, 1981). En nuestra opinión, estas prácticas humanas producen un saber altamente especializado como aquel que concierne a la matemática avanzada y exigen, a la vez, de procesos del pensamiento superiores.

En este sentido las articulaciones entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas, nos permitirá orientar estudios sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado según se refiere en la aproximación socioepistemológica.

Sociocultura y matemáticas

Para mostrar un par de ejemplos que ilustran el sentido social del conocimiento matemático avanzado, hemos elegido tratar el caso de la formación del cero en el México prehispánico y del origen del binomio de Newton durante el siglo diecisiete.

Es un hecho conocido que no todas las culturas desarrollaron la noción del cero. Particularmente el cero fue inventado en aquellos escenarios socio culturales en los que el imaginario colectivo y el tratamiento que este hacía de las representaciones de ausencia - como la muerte por ejemplo-, el vacío - como complementariedad del espacio infinito -, o la transición de estado contiguos y continuos permitió la elaboración teórica del cero como una representación dinámica particular.

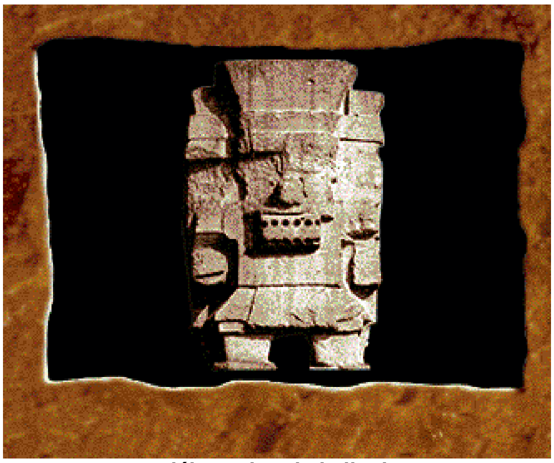
Las culturas precolombinas del continente americano aportaron una enorme cantidad de conocimientos al mundo moderno; actualmente son conocidas sus aportaciones a la herbolaria, filosofía, agronomía, astronomía o matemáticas. Podemos reconocer una fuerte similitud entre su cosmovisión y la noción del cero. En el caso de las culturas mesoamericanas, la ausencia de dicotomías del tipo bueno - malo, favoreció considerablemente la constitución de la noción de cero. En una sociedad organizada sobre fundamentos politeístas, la existencia de diversos dioses y de diversas representaciones de un mismo dios, permitió que fuerzas de la naturaleza fueran tratadas como voluntades de sus deidades.

Según se reporta en el museo de sitio del Templo Mayor en la ciudad de México, Tláloc, el dios de la lluvia o el "señor del agua y la fertilidad", representa el elemento principal de la actividad agrícola, base de la economía mexicana. La presencia de esta deidad refleja el culto tan importante que se tenía en el México prehispánico al agua y a la agricultura. Sin embargo, no representa sólo la vida, es un dios que también castiga al hombre con heladas, granizo, aguas malas, etc., tiene el poder de destruir, por lo tanto es una deidad de vida y de muerte a la vez. Una épica nahuatl nos dice al respecto:

> *El dios Tláloc residía en un gran palacio con cuatro aposentos y en medio de la casa había un patio con cuatro recipientes llenos de agua. El primero... fecundiza la tierra para que de buenos frutos. El segundo... hace anublarse las mieses y hacer perderse los frutos. El tercero... hace helar y secar las plantas. El cuarto... produce sequía y esterilidad. Tiene el dios a su servicio muchos ministros, pequeños de cuerpo... son azules... blancos, amarillos o rojos. Ellos con grandes ollas y con palos en las manos van a regar sobre la tierra cuando el supremo dios de la lluvia ordena. Y cuando truena, es que resquebrajan su cántaro, y si algún rayo cae es que un fragmento de la vasija rota viene sobre la tierra.*

Épica nahuatl

Museo del Templo Mayor. Ciudad de México



Tláloc. Dios de la lluvia

Estos enviados del dios Tláloc tenían muy diversas representaciones. Una muy conocida es la de Chac Moll, o el mensajero de los dioses, que puede encontrarse en diversas culturas mesoamericanas, la mexica o la maya por ejemplo. A diferencia de la forma en que se atribuye en las religiones occidentales la bondad a un Dios y la maldad a su antítesis, los dioses prehispánicos son simultáneamente buenos y malos. El dios de la lluvia, por ejemplo, es el encargado de producir sequía en un territorio a la par que prodiga abundancia de agua en otro como narra la épica nahuatl. Permite la siembra adecuada y el usufructo de la tierra a la vez que inunda amplios territorios. Esta suerte de juego de contingencias sólo se explica mediante las nociones de conservación y transición. De ahí que aquellos que pudieron idear representaciones de lo divino acudiendo a nociones como la transición, sean quienes pudieron considerar la existencia del cero para representar a la vez, la ausencia con la transición. El cero real que manejamos hoy día, dispone como sabemos de esta doble naturaleza. En este sentido, es la noción de transición entre lo uno y lo otro lo que resulta importante en esta visión social del mundo.

Chac Moll. *El mensajero de los dioses*

Tratemos ahora un ejemplo un poco más reciente. Discutamos el caso de la formación del binomio de Newton y analicemos el sentido en que la noción de predicción se ubica en la visión sociocultural de la época. Se pueden obtener mas detalles en (Cantoral, 1995).

El binomio de Newton se escribe por vez primera como $(P + PQ)^{m/n}$ y no, como es usual en textos contemporáneos, mediante la expresión $(a + b)^n$. Sostenemos que ello obedece a una concepción alternativa que se apoya en una epistemología que difiere de la que hoy enseñamos en clase, que atiende a un programa en el dominio de la ciencia con el que se busca predecir el comportamiento de los fenómenos de cambio. Un programa de matematización de los fenómenos modelables mediante la metáfora del flujo de agua aplicada por igual a la evolución de otras magnitudes (Cantoral. R. y Farfán, R. M. 1998).

En una carta que Isaac Newton dirige en 1676 a Henry Oldenburg -entonces secretario de la Royal Society-, presenta su ya célebre teorema del binomio para potencias fraccionarias, lo que representa una generalización de algunos trabajos anteriores sobre series y anticipa la idea de la predicción. Según Newton, tratando con el problema de la cuadratura de la hipérbola y haciendo uso de una ingeniosa interpretación del triángulo de Pascal, él observó que los arreglos {1}, {1, 1}, {1, 2, 1}, {1, 3, 3, 1}, etc., que componen el triángulo y que suelen verse como resultado de un cierto ordenamiento numérico, pueden ser interpretados mas bien como una colección de sucesivas potencias del número 11, esto es: $1=11^0$, $11=11^1$, $121=11^2$, $1331=11^3$, etc.

$$\begin{array}{|ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Para Newton, este teorema planteaba en su forma más general, que para el racional *m*/*n* se cumple la igualdad siguiente:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \text{etcétera}$$

donde

$$A = P^{\frac{m}{n}},\ B = \frac{m}{n}AQ,\ C = \frac{m-n}{2n}BQ,\ \text{etc.}$$

La primer cuestión que queremos tratar se refiere al significado de la expresión $P + PQ$. La época en la que el teorema del binomio es publicado se caracteriza por la pretensión de los científicos por modelar, matemática y lógicamente, la evolución de las cosas que fluyen. Digamos que se interesan por *predecir*. Imaginemos que P representa alguna magnitud física, por ejemplo la temperatura o la posición. De modo que al ser la magnitud Q menor que la unidad, es decir $0 < Q < 1$, tendremos también que $0 < PQ < P$, y en consecuencia la magnitud $P + PQ$ representa el estado próximo de P, su valor un instante después; mientras que el término PQ representa a un pedazo pequeño de P. Es así que la expresión $P + PQ$ representa el estado futuro en la evolución de P. Finalmente como la expresión $y = x^{m/n}$ representa a una función lo mas general posible en el sentido de la época, la expresión que nos ocupa, $(P + PQ)^{m/n}$ muestra el estado futuro que habrá de tener la expresión $P^{m/n}$ un instante después. De este modo el trabajo consistirá en buscar el valor que habrá de tomar la expresión $(P + PQ)^{m/n}$ sólo en términos de los valores de inicio. Esta expresión para el binomio representa el intento por predecir el estado futuro usando sólo los datos que la situación nos plantea de inicio. Esta visión fue desarrollada ampliamente durante el siglo dieciocho y se consolidó como un paradigma socialmente aceptado. La ciencia buscó entonces *predecir la evolución* de los fenómenos de flujo apoyándose en la metáfora del flujo de agua, aquél que no cesa ni invierte su destino.

Sostenemos que esa noción de *predicción* se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos. Pues en ciertas situaciones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar entonces el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado uno al estado dos. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio, de la forma en que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente.

El objeto matemático, binomio de Newton se presenta entonces como una entidad que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas ligadas a la resolución de una clase de situaciones que requieren de la predicción, de donde transita hasta llegar a tomar la forma abstracta del concepto de función analítica.

Ambos ejemplos, el de la formación del cero entre los antiguos mexicanos y la presentación del binomio por Newton, dan cuenta de cómo ambos procesos de construcción del conocimiento matemático avanzado tienen un profundo carácter social.

Consenso y matemáticas

En el terreno de las ciencias sociales, han sido documentadas ampliamente las formas en que se establecen y legitiman los procesos de dominación y sometimiento entre los actores de un grupo social. Tanto los estudios sobre racismo o las cuestiones de género se han constituido, hoy por hoy, como asuntos del mayor interés. Lo mismo podría decirse sobre el estudio de las relaciones de dominación y dependencia entre las colonias y sus metrópolis.

Consideremos como ejemplo, los siguientes párrafos que fueron tomados de diferentes enciclopedias y que nos sirven para describir lo que en ellas se entiende por Latinoamérica. La pregunta que hicimos fue: ¿qué es Latinoamérica? Las respuestas que obtuvimos fueron diversas y muy ilustrativas:

A. Una porción del continente americano que queda por debajo de los Estados Unidos de América
B. Una parte América que fue conquistada por españoles y portugueses
C. Una extensa región del continente americano que estando por debajo de los Estados Unidos de América, fue conquistado por españoles y portugueses.

Claramente en estas descripciones se alude a una relación, a todas luces asimétrica, que deja a una región definida en relación con otra región. La autonomía y la enorme riqueza cultural o étnica queda por completo borrada de las definiciones anteriores. No se habla en ellos por ejemplo, de la multiplicidad de culturas que la habitan, con sus idiomas y ricas tradiciones, o las características geográficas que la ubican como fuentes productora de petróleo, cobre o zinc. Sólo se alude a su condición de colonia o a su ubicación relativa respecto de la potencia económica más fuerte del mundo.

Este tipo de mensajes tiene la intención, conciente o inconscientemente, de establecer un cierto consenso en la manera de mirar las relaciones sociales entre países, culturas o simplemente entre regiones del mundo. ¿Qué imagen se formará en la mente de un escolar cuando lea estos mensajes? ¿Cómo las asimilará un profesor cuando en sus clases busque dar una cierta racionalidad a esas descripciones?

Con los textos anteriores, se busca introducir un mensaje que favorece una relación de dominación. Estos mecanismos se utilizan para establecer consensos entres los grupos humanos y favorecer imágenes colectivas que puedan ser compartidas por los individuos. En esta medida, se articulan sofisticados mecanismos de consenso que permiten guiar la actividad de los grupos sociales ante cierto tipo de situaciones y ello hace previsible su desempeño en condiciones similares.

A pesar de ser menos visibles los efectos que pueden tener los mecanismos de consenso en el caso de los contendidos escolares, ellos también existen. A diferencia de lo que presentamos para el caso de las ciencias sociales, sus efectos pueden verse reducidos exclusivamente a las acciones de enseñanza o a los procesos de aprendizaje.

Analicemos para ese efecto, dos casos particulares; uno relativo a la introducción de la integral en la educación media y el otro a la significación de la derivada sucesiva entre los estudiantes universitarios.

La integral de f desde a hasta b puede entenderse de diferentes maneras según se trate de un programa teórico o de otro. Consideremos, a manera de ejemplo, tres de las versiones más conocidas de la integral. La primera, la más usada en la enseñanza contemporánea para definir a la integral se conoce como la integral de Cauchy - Riemann. Otra, la integral de Newton - Leibniz, es la mas empleada al momento de resolver integrales por métodos elementales y finalmente, la menos conocida en la literatura escolar, la integral de Wallis. Esta integral fue tratada como parte de un programa tendiente a dar un tratamiento aritmético del infinito. (Grattan - Guinness, I. 1984; Edwards, Ch. 1979).

Ahora bien, para quienes estamos interesados en la enseñanza no podemos reducir un concepto a su definición, sino que habremos de preguntarnos: ¿cuál tratamiento de la integral conviene más a fin de favorecer el aprendizaje de los alumnos? y ¿cómo articularla en propuestas didácticas?

Como sabemos, para la integral hemos conservado hasta nuestros días el símbolo $\int$ que proviene de la s alargada según fuera introducido por Leibniz en el siglo diecisiete. Las tres presentaciones de la integral a las que haremos referencia no sólo difieren por cuanto toca a la época en la que fueron desarrolladas, sino también respecto de las explicaciones de las que echan mano a fin de lograr comunicarse satisfactoriamente en los salones de clase y a fin de establecer el consenso necesario entre los agentes del funcionamiento escolar.

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i & \text{donde} \quad |P_n| \to 0 \\ F(b) - F(a) & \text{donde} \quad F'(x) \equiv f(x) \\ \frac{1}{N}\sum f(a + \frac{b-a}{N}) & \text{donde} \quad N = \infty \end{cases}$$

La formulación de la integral siguiendo la definición de Cauchy - Riemann se apoya en la idea de límite. Se toma una partición P_n del intervalo [a, b] donde el incremento será denotado por Δx_i, se explica enseguida que el área de un rectángulo es $f(x_i)\Delta x_i$, se argumenta que la suma de todos ellos aproxima el área bajo la función y se toma el límite cuando n, el número de intervalos del tipo [x_i, x_{i+1}], tiende a infinito y la longitud del más grande de cada uno de los intervalos de la partición tienda a cero, en tal caso se dice que la integral es el límite de la sumatoria siguiente:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

La presentación de la integral según el modelo Newton - Leibniz sigue una explicación dinámica basada en la variación de las variables x, y y z. La variable z representa al área bajo la curva $y = f(x)$, y se obtiene con el desplazamiento de la variable y que a su vez representa a la ordenada de una curva con abscisa x. La expresión $F(b)$ - $F(a)$ mide entonces el cambio acumulado en F desde a hasta b. Una lectura posible de la integral de Newton - Leibniz puede tenerse con la expresión siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$$

El tratamiento que hace Wallis de la integral se apoya en la idea de altura promedio. Por ejemplo, el valor del área de una región del tipo $y = x^n$, con n natural, en el intervalo [0, 1] puede verse como el promedio de sumar todas (una infinidad pues N se entiende como infinito) las ordenadas entre el número de ellas. De este modo, para la familia de funciones $f(x) = x^n$, con n = 1, 2, 3, se tiene:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{n} = \int_0^1 f(x)dx + e(n), \quad \text{donde} \quad \lim_{n\to\infty} e(n) = 0$$

$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^3$
$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$	$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 1}$	$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 1}$
$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2}$	$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 2}$	$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 2}$
$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2}$	$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 3}$	$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 3}$

Así la integral se interpreta como un "promedio aritmético":

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{N}\sum f(a+\frac{b-a}{N})$$

Cada una las tres presentaciones se ve acompañada de explicaciones diferentes. La de Cauchy - Riemann alude a la aproximación, la de Wallis a la noción de promedio y la de Newton - Leibniz a la de acumulación. De alguna manera cada una de ellas será explicada en el salón de clase mediante algunos ejemplos sencillos y con auxilio de dibujos. Esta forma de presentación en clase permite llevar adelante el contrato didáctico pues garantiza la función del profesor explicando y del alumno siguiendo tales explicaciones.

No tenemos al momento evidencia empírica suficiente que muestre que alguna de las distintas presentaciones de la integral esté mejor adaptada para efectos de aprendizaje, de hecho ese es todavía un problema abierto. Sin embargo, hemos aceptado por una especie de consenso escolar que la presentación de Cauchy - Riemann y la explicación mediante rectángulos inscritos y circunscritos como medio de aproximación del área bajo la curva es la que todos los profesores debemos usar en nuestras clases. En nuestra opinión, ello obedece a las mismas mecánicas de formación del consenso como aquella descrita en el caso de la interpretación de Latinoamérica.

Este hecho nos ha llevado a estudiar cómo es que los textos escolares son, en cierto sentido, medios adecuados para establecer consensos y mecanismos de reproducción social. En este sentido, la elección de la presentación está ausente de las opciones del profesor y de sus alumnos, pues ellos no disponen propiamente de información alternativa que les permita diseñar su clase con base en otras presentaciones de los conceptos. De hecho en textos más avanzados, se justifica la presentación de la integral mediante la formulación de Cauchy - Riemann aludiendo razones de tipo ideológico que no analizamos en este escrito.

Consenso y didáctica

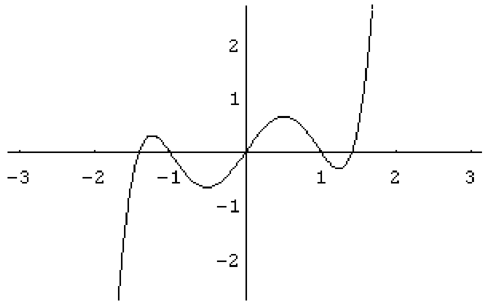
En lo que sigue mostraremos cómo las respuestas que los alumnos dan a una serie de preguntas sobre las derivadas sucesivas provienen básicamente de las explicaciones que los maestros usan apoyándose en sus textos que en las propias estrategias de resolución de problemas. En este sentido, del mismo modo que en el episodio de las llaves, podremos preguntarnos, ¿quién contestó, el alumno, el maestro, el texto o la situación?

Para lograrlo, diseñamos un conjunto de cuatro tareas relacionadas entre sí. Les propusimos una colección de gráficas idénticas con textos distintos. Les pedimos que utilizara una gráfica para cada inciso de modo que habrían de marcar sobre la gráfica sólo la porción en la que consideran se responde a cada una de las siguientes cuestiones:

1. ¿Dónde es positiva $f(x)$?
2. ¿Dónde es positiva $f'(x)$?
3. ¿Dónde es positiva $f''(x)$?
4. ¿Dónde es positiva $f'''(x)$?

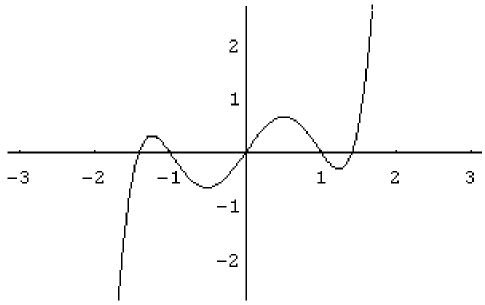
Con la ayuda de estas preguntas, exploramos las estrategias variacionales que movilizan y las formas en que construían argumentaciones para fundamentar su elección tanto al nivel individual como frente a sus compañeros de clase. Claramente, como puede preverse, la última pregunta presenta mayores dificultades dado que en ella se exige del uso de estrategias variacionales como única medio para la correcta solución del problema.

Primera consigna. Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$



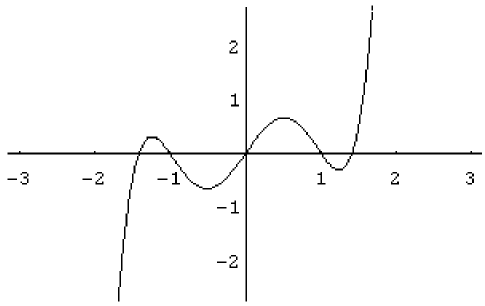
Ante esta tarea los estudiantes recuerdan, basados en su enseñanza, que la ubicación en los cuadrantes determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes (I y II), mientras que las negativas en los restantes (III y IV). De ahí que contesten adecuadamente a esta cuestión.

Consigna segunda. Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$.



Los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función; en otro caso, recuerdan que el signo de las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que tendrán para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se manifiesta en dos sentidos; por un lado la proporción de respuestas acertadas es bajo y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y escuetas.

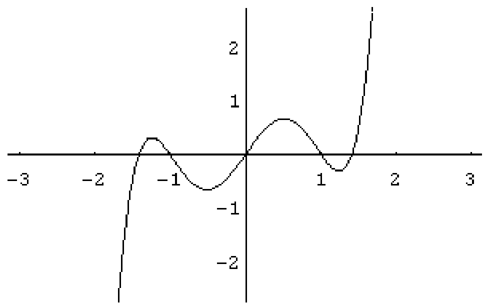
Consigna tercera. Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$



Como podemos prever, la situación en esta ocasión resultó más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante para responder fue la memoria colectiva. Puesto que ellos recuerdan que la segunda derivada positiva corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo los hace con la segunda derivada negativa. Aún en caso de no disponer de explicación alguna para confirmar su razonamiento, contestan a la pregunta. A juzgar por el análisis que hemos hecho de sus respuestas no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, "es cóncava hacia arriba entonces retienen más agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua". Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales.

La última de las cuestiones ponía en evidencia este hallazgo, pues se trata de una situación en la cual no es posible recordar algún conocimiento previo, pues el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional.

Consigna cuarta. Marca sobre la gráfica de la función que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$



Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta elevamos el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores les permiten, aunque fuese sólo con recursos mnemotécnicos, como parte de un memoria colectiva construida entre los estudiantes y su profesor en el curso de una interacción social con el fin de dar una respuesta a las preguntas planteadas. Empero la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento, los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Sólo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional podrá abordarla eficazmente.

Referencias bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., y Rodríguez, R.. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Trillas: México.

Bernstein, B. (1981). Codes, Modalities, and the Process of Cultural Reproduction: A Model. *Language in Society,* Núm. 10, 327-363.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 3, 258 - 270.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico a la ricerca in matemática educativa. *La matemática e la sua didattica*, Vol. 3, 258-273.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis*. Vol. XI, Núm. 1, 55 -101.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Disertación doctoral. Cinvestav: México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Espsilon*, Núm. 42, Vol. 14(3), 353-369.

Cuento, C. (1970). *Nuevo léxico de Teilhard de Chardin*. Taurus Ediciones: España.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage Editions.

Edwards, Ch. (1979). *The historical development of calculus*. Springer Verlag.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos: 1630 - 1910*. Alianza Editorial.

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar*. Disertación doctoral. Cinvestav: México.

¿Es la matemática educativa una disciplina científica?

Egbert Agard
eagard@sinfo.net
Universidad de Panamá
Panamá

Introducción

Durante el siglo XIX, la matemática fue objeto de un vasto desarrollo, caracterizado por la ampliación de sus contenidos. La teoría de números y la geometría no euclidiana experimentaron grandes avances, debido a las contribuciones fundamentales que en ambas ramas aportó Carl F. Gauss; así mismo, el análisis infinitesimal encuentra bases sólidas en el proceso de la aritmetización del análisis, cuyos constructores fueron los eminentes analistas Augustin Louis Cauchy y Neils Abel. Una de las nuevas ramas de la matemática surgida durante ese siglo fue la denominada Teoría de Grupos, cuyo estudio se inicia con Evariste Galois.

El perfeccionamiento de las antiguas ramas de la matemática, la definición de nuevas áreas y la evolución social de la época, constituyeron factores propicios a la conformación de un nuevo hecho muy significativo en Alemania: la reforma de la educación superior. Al romperse el aislamiento intelectual de los países europeos en la segunda mitad del siglo XIX, se dan las condiciones para que el movimiento reformista se extendiera por el resto del continente.

Alemania es considerada como la cuna de la pedagogía; sus dos paladines: Pestalozzi, un pedagogo suizo, y Herbart, un pedagogo alemán alumno de Pestalozzi, le confieren un gran impulso al proceso de modernización de la enseñanza de la matemática en el nivel primario, bajo el marco de la corriente psicológica, que propugnaba por la adaptación de los contenidos y métodos de la enseñanza a la capacidad psicológica de los alumnos.

El movimiento reformista encontró en las universidades protestantes un terreno fértil para su implantación y, como consecuencia de este hecho, se asumió la tarea esencial de formar profesores de matemática para los niveles medio y superior. En este movimiento destaca Félix Klein, quien, después de una titánica lucha, logró introducir la matemática educativa como una asignatura en el curriculum universitario.

Este hecho fundamental no sólo permitió desarrollar la diferenciación y profesionalización de la matemática, sino incluso la de otras disciplinas científicas. En este marco, la investigación en la enseñanza de la matemática se erige como un deber de cada profesor, y no como una actividad independiente de la docencia, dando lugar así a un progreso disciplinario de muy alto nivel en esa rama.

La historia de la matemática nos brinda testimonios de muchas civilizaciones y hombres que, desde la antigüedad, se han dedicado a la difusión del saber. En efecto, los escribas sumerios, alrededor del año 3000 a.C., sistematizaron la matemática escolar y desarrollaron algunos métodos para la enseñanza de las fracciones mediante un sistema de numeración sexagesimal. Otras referencias nos indican que en el siglo V a.C., Sócrates usó el método del diálogo, difundido por los eleatas, para enseñar a un esclavo a construir, a partir de un cuadrado, otra figura similar, cuya área resultara el doble de la del primero. El trabajo realizado por Euclides con los elementos, es otro testimonio de los grandes esfuerzos realizados por las civilizaciones de la antigüedad para difundir el conocimiento matemático.

Sin embargo, ¿qué sabemos acerca de la matemática educativa, cuyo desarrollo se realiza a partir del siglo XIX? Para exponer una opinión al respecto tendríamos que absolver primero una serie de interrogantes básicas: ¿Cuáles son las dos denominaciones básicas con las que se le conoce? ¿Se puede interpretar la matemática educativa como una disciplina, tomando en cuenta los puntos de vista y las definiciones discrepantes? ¿Qué papel le corresponde a la matemática educativa en las instituciones académicas, especialmente en las universidades? ¿Cuál es la situación actual del desarrollo de la matemática educativa, como ciencia, en relación con el uso de modelos y paradigmas? ¿Qué relaciones existen, y cómo podemos describirlas, entre la matemática educativa, la pedagogía, la psicología, la sociología, la epistemología, la historia, la educación científica y la propia matemática?

Existe la convicción creciente de que la matemática educativa es una disciplina. Sin embargo, no debemos considerarla como una disciplina homogénea, con paradigmas semejantes a los de las ciencias experimentales en general, pues en realidad se trata de una disciplina específica, al servicio de sistemas educativos nacionales que, por sus raíces tradicionales, le confieren un cariz regional propio.

De allí parte el hecho de que el sostenimiento de la matemática educativa surge sobre la base de un conjunto de valores que se identifican profundamente con cada nación. Se explican así las razones que mueven a muchos expertos a clasificarla como una disciplina aplicada, en vez de señalarla como una disciplina pura o básica.

La matemática educativa recibe, tradicionalmente, dos denominaciones. En Europa continental se le conoce como didáctica de la matemática, aunque su interpretación sea distinta. De este modo, los investigadores de la L'Associaton de Recherche en Didactique des Mathematiques sustentan que es una disciplina científica apoyada en la transposición didáctica, la situación didáctica y el contrato didáctico.

Por su parte, en Gran Bretaña, América, Australia y gran parte de Asia, a esta disciplina se le conoce como matemática educativa. Son muchos los investigadores que se han dedicado a estudiar las diferencias que puedan existir entre didáctica de la matemática y matemática educativa. De este modo, Judith Sower responde a esa perspectiva en un artículo presentado en ICME-8[15], cuando afirma que, en términos de paradigmas y objetivos no existen diferencias entre ambas materias.

En un número plural de países se considera que la matemática educativa no es una disciplina; incluso, hay quienes opinan que en realidad se trata de una metodología. Al respecto, estamos de acuerdo en que no se trata de una disciplina homogénea, respaldada por una serie de paradigmas de investigación, como en el caso de las ciencias experimentales. En el caso que nos ocupa, su dominio de referencia es una estructura muy compleja, conformada por la enseñanza que se imparte en distintas sociedades y por algunos grupos humanos que influyen en el desarrollo cognitivo del educando, entre otros elementos. Son estos factores los que ubican a la matemática educativa como una disciplina científica que existe, y a la cual se le confieren una variedad de definiciones, entre las que sobresalen las siguientes:

- El estudio de las relaciones entre la matemática, el individuo y la sociedad.
- La reconstrucción de la matemática actual en un nivel elemental.
- El desarrollo y evaluación de los cursos de matemática escolar.
- El estudio del saber matemático, su representación, tipos y crecimiento.
- El estudio del comportamiento del aprendizaje en los estudiantes.
- El estudio y desarrollo de las capacidades de los docentes.
- El estudio de la producción y la comunicación del conocimiento matemático.

Entre las anteriores definiciones, la última fue formulada por G.Brousseau al inicio de la década de los noventa, para indicarnos que la matemática educativa estudia la manea en que el conocimiento se construye, se comunica y se emplea para la satisfacción y necesidades del hombre que vive en sociedad. El resto de las definiciones nos permiten observar a la

[15] Sowder, Judith. "A Decade of Research in Mathematics Education in the United States: where we have been and where we are going." Nicolina A. Malara, (Ed.) Dipartamento di Matematica. – Universitá Modena.

matemática educativa como una ciencia social, una rama de la epistemología, una ciencia de la ingeniería, una parte de la pedagogía o una ciencia aplicada.

Las definiciones de matemática educativa expuestas por los grupos que consideran que es una disciplina, si bien son diferentes, también son discrepantes entre sí, lo que revela la gran necesidad de una base teórica o especulativa que nos permita entender e identificar las variadas posiciones, aspectos o intenciones subyacentes en cada una de las definiciones antes manifestadas. Esta base permitirá establecer relaciones entre las distintas posiciones señaladas en las definiciones, para ubicarlas dentro de un contexto, con el fin de promover un entendimiento dialéctico de la disciplina.

El desarrollo de la matemática educativa como una disciplina científica es cada vez más creciente; el mejor testimonio se observa en las distintas versiones de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), al analizar los programas académicos de los trece eventos realizados anteriormente. En RELME 13 se presentaron un toral de 286 trabajos; en el actual, RELME 14, se presentan un total de 345 trabajos distribuidos de la siguiente manera: 3 conferencias magistrales, 13 conferencias especiales, 135 reportes de investigación, 65 comunicaciones breves, 22 cursos cortos, 3 mesas redondas, 71 talleres, 9 grupos de trabajo e investigación y 24 carteles. Debe destacarse que el incremento no se da solamente en el plano cuantitativo, sino que involucra un aumento en la calidad de los trabajos presentados en cada evento.

Una mirada retrospectiva sobre la materia nos permite observar que la sede de las ciencias en la Europa del siglo XIX se ubicaba en distintas instituciones académicas. En Francia, por ejemplo, estaba alojada en la Academia de las Ciencias, mientras que en Alemania estaba en las universidades. Es por esa razón que la reforma de la educación superior encontró en esas unidades académicas un suelo abonado para su desarrollo. Como producto de esa reforma, las universidades protestantes de la época asumieron la responsabilidad de preparar profesores de matemática, e introducir matemática educativa como una asignatura en el curriculum.

Estas y otras interpretaciones constituyeron la semilla que, al germinar, produjo la profesionalización y diferenciación de las disciplinas científicas modernas, teniendo en cuenta que el término *profesionalización* indica que el educando adquiere dos tipos de conocimientos: el conocimiento especulativo así como toda la gama de conocimientos necesarios para dominar la práctica de la enseñanza en las aulas de clases, dotando a los futuros profesores con una sólida formación científica. El precursor de este movimiento fue el matemático alemán Félix Klein Steven Turner[16], especialista en historia de la ciencia, opina que ese hecho histórico produjo consecuencias favorables para los nuevos profesionales, puesto que estableció una relación dual entre la docencia y la investigación, proponiendo la investigación en la enseñanza como un deber de cada educador, y no como una actividad independiente de la docencia. De esta manera, se propició que el profesorado alcanzara un progreso disciplinario de muy alto nivel.De acuerdo con H.G.Steiner[17], los fines y objetivos de las universidades del siglo XXI no están determinados esencialmente por las investigaciones especializadas solamente, sino que —además— deben integrar los conocimientos de diferentes disciplinas, y contribuir a la adquisición de un entendimiento comprensivo de la realidad. Todo parece indicar que las universidades son los únicos sitios de la sociedad donde pueden ser realizadas las múltiples facetas de la ciencia, como la cultura, la formación y la reflexión.

[16] Turner, Steven. The Prussian Universities and the Research Imperative, 18061848,Ph.D.Thesis,Princeton University, 1973.

[17] Steiner, H.G. “Theory of Mathematics Education (TME) An Introduction.” For the Learning of Mathematics 5,2 (June 1985) Montreal, Quebec, Canada.

Bajo estas perspectivas, la matemática educativa, como una ciencia, puede reflejar en la universidad, de una manera especial, su relación con la matemática y su posible papel, sumamente necesario, de establecer un enlace entre matemática y sociedad.

Dada la relación existente entre la matemática educativa y otras ciencias, resulta problemático formular los objetivos propios de la disciplina; no obstante, Roberto Mura[18] ha logrado sintetizar los objetivos en dos puntos: a) Analizar, comprender y explicar los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y b) Mejorar la enseñanza de la matemática y facilitar su aprendizaje.

El primer objetivo identifica la matemática educativa con la enseñanza, aprendizaje y creatividad en matemática, así como el análisis de la construcción de conceptos matemáticos. El segundo objetivo se dedica a la búsqueda de metodologías para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Según Steiner, "matemática educativa es el campo que estudia el ejercicio de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en todos los niveles, tanto dentro como fuera del sistema educativo."[19] Se le considera así como parte del campo de la educación, relacionándose con otras disciplinas, como pueden ser la psicología, la antropología, la historia y la filosofía, pero manteniendo una relación muy especial con la matemática, lo que la distingue y la identifica entre otros campos.

Una reflexión sobre el volumen IV de la serie de estudios auspiciados por The International Comission on Mathematical Instruction, titulado *Mathematical Education as a Research Domain: A Search of Identity*[20], sostiene que un cambio interesante en la historia de la investigación en cualquier área ocurre cuando se produce una gran confusión en torno a las ideas que circundan un área problemática. Es de esa lluvia de ideas de donde surge un paradigma que señala y define, de manera implícita, tanto el problema como los métodos de investigación.

El trabajo que se hace actualmente sobre ciertas áreas problemáticas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática debe interpretarse como el preámbulo a la obtención de un consenso para que se realicen investigaciones en dichas áreas. Pero, ¿es científica esa área?

Esa pregunta la responde T.A. Romberg[21] apoyándose en la descripción que hace Thomas Kuhn con respecto al camino hacia la ciencia normal, en su obra titulada "Las estructuras de las Revoluciones Científicas" (1986). Kuhn entiende como ciencia normal aquella investigación basada firmemente en una o más realizaciones científicas pasadas, realizaciones que alguna comunidad científica particular reconoce, durante cierto tiempo, como fundamento para su práctica posterior. El camino hacia la búsqueda de un consenso en varias áreas es un trabajo muy arduo y, a falta de un paradigma, cualquier hecho que atañe al área se considera relevante.

Romberg afirma que el camino hacia la ciencia normal de cualquier área está compuesto por tres etapas:

- Primera etapa: se realiza una colección de hechos. Aquí se llevan a cabo estudios con muy poco enfoque y sin sentido del orden.

---

[4] Mura, Roberta " What is Mathematics Education? A Survey of Mathematics Educators in Canada" en Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. Anna Sierpinska y Jeremy Kilpatrick, editores, 1998.

[19] Steiner,H.G."Theory of Mathematics Education."Proceedings of the 5th International Congress on Mathematical Education", Adelaide, Australia, August 1984.

[6] Sierpinska,Anna y Jeremy Kilpatrick. Mathematical Education as a Research Domain:A Search of Identity.Boston. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[7]Romberg, Thomas A."Towards a Research Consensus in Some Problem Areas in the Learning and Teaching of Mathematics" Actes du Cinquieme Colloque du Groupe International.PME,Grenoble,1981.

- Segunda etapa: confrontación, confusión y reflexión. Es la etapa en la que se toma una decisión sobre algunos problemas; además, se discute sobre la existencia de ciertas variables.
- Tercera etapa: construcción de modelos. Es el momento para organizar ideas en torno a variables bien identificadas.

Kuhn considera que, además de estas tres etapas de Romberg, existe un número igual de etapas adicionales:

- Cuarta etapa: selección de paradigmas
- Quinta etapa: ciencia normal
- Sexta etapa: revolución científica

A pesar de que la colección de hechos es una etapa esencial en el origen de muchas ciencias, se tiene la tendencia a denominar ese material con el nombre de "literatura científica".

La investigación en matemática educativa, durante la década del sesenta, consistió en la realización de estudios sin un enfoque determinado y sin un sentido del orden. Las investigaciones podían ser caracterizadas como numerosas, desde el punto de vista de la cantidad, pero pobres si se tomaba en cuenta su calidad y la poca diversidad.

La siguiente década, la de los setenta, se caracterizó por la confrontación y la confusión; la literatura fue dotada de argumentos tales como el comportamientos versus el constructivismo, el método cualitativo versus el método cuantitativo, los defensores de una escolarización abierta versus una tradicional, etc. Los reclamos, contrarreclamos y argumentos de los investigadores han establecido confusión entre docentes, administradores de la educación y estudiantes de los cursos de post grado.

Al finalizar la década del setenta, el consenso en el área de matemática educativa se dirigió a realizar investigaciones con relación a los siguientes tópicos: aprendizaje de los niños desde muy temprana edad, aprendizaje de los números racionales y solución de problemas verbales.

No obstante, Thomas Kuhn sostiene que el consenso posee dos características esenciales: primero, la capacidad de reunir elementos básicos que proporcionarán claridad a un área confusa no constituye elemento atractivo que estimule la obtención de nuevos adherentes. Simultáneamente, la síntesis proporciona todo tipo de problemas para que sean abordados por los estudiosos.

La construcción de modelos constituye el principal medio para que un área pase del mito y la tradición al terreno especulativo. El propósito de la construcción de dichos modelos es el de desempacar las aseveraciones acerca de un problema con el objeto de aclarar cuáles son las principales variables y las relaciones existentes entre ellos.

Conclusión

No existe la menor duda de que nuestra disciplina ha tenido grandes progresos. Opino que estamos muy cerca de un punto de inflexión significativo en la historia de la investigación de la matemática educativa. Hemos ido de lo empírico a la construcción de modelos; hemos aprendido a apreciar las contribuciones de otras disciplinas, especialmente de la psicología y la sociología; pero lo más importante es que ya se producen investigaciones importantes en las áreas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Referencias bibliográficas

Adda, Josette (1998): "A Glance Over the Evolution of Research in Mathematics Education" en Mathematics Education as a Research Domain. A. Sierpinska y Jeremy Kilpatrick. (Ed.).

Kluwer Academic Publishers. Boston.

Agard, Egbert (1999): " Matemática Educativa: un dominio de investigación científica." Curso dictado en el Tercer Congreso Nacional de Matemática Educativa realizada en la Universidad de Panamá del 7 al 11 de febrero 1999.

Gascón Pérez, Josep (1997): "Didactics of Mathematics as the Science of the Ar Studying" en Proceedings of the working group 25 in ICME 8. Nicolina A.Malara (Ed.).

Kilpatrick, Jeremy (1992): " A History of Research in Mathematics Education " en Handbook of Research on Teaching and Learning.D. A. Grows (Ed.). Macmillan Publishing Company. New York.

Kuhn, Thomas (1992): La Estructura de las Revoluciones Científicas. Fondo de Cultura Económica. México.

Romberg, Tomas (1981): " Towards a Research Consensus in Some Problem Areas In the Learning and Teaching of Mathematics " en Proceedings of the Conference of the International Group. PME. Grenoble, France.

Schubring, Gert (1985): " Factors Determinig Theoretical Developments of Mathematics Education as a Discipline: Comparative Historical Studies of the Institutional ans Social Contexts in Mathematics Education", in Proceedings of the Second TME Conference. H. G. Steiner (Ed).Bielefeld. Germany.

Steiner, Hans G. (1985): "Theory of Mathematics Education: an Introduction." For the Learning of Mathematics, 5,2 FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada.

----------------- (1990): " Relations Between Research in Mathematics Education and Research in Science Education." Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM) 22 (1990) No/ 6.

----------------- (1988): "Theory of Mathematics Education" en Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education. ICMI Secretatiat János Bolyai Mathematical Society. Ann & Keith Hirst (Eds).

---------------(1992): " Graduate Programs and the Formation of Researches in Mathematics Education" en Proceedings of the Seventh International Congress on Matematical Education. C. Gaulin (Ed.)

Transformación Curricular de Matemática en la Educación Básica General Panameña

Analida Ardila
fda@sinfo.net
Depto de Matemática. Universidad de Panamá
Panamá

La necesidad de un cambio en el enfoque curricular que había imperado en el país los últimos 30 años, los planes y programas de estudio desfasados, la oferta curricular rígida, fragmentada, desarticulada y sin integración, las corrientes psicopedagógicas ya superadas, la demanda de nuevos planes y programas de estudio expresada en diferentes diagnósticos y el mandato de la Ley 47 Orgánica de Educación de la República de Panamá modificada por la Ley 34 del 6 de julio de 1995, dieron lugar a una transformación curricular de Matemática en la Educación Básica General.

La Educación Básica General (E.B.G.) es el tramo que abarca de 4 a 15 años de edad que vela porque los alumnos culminen esta etapa con "dominio de saberes básicos que permitan el desarrollo de los aprendizajes significativos con una gran dosis de creatividad, sentido crítico, reflexibilidad y pensamiento lógico". En esta nueva propuesta se asumen dos enfoques que orientan el proceso curricular: el sociorreconstruccionista y el constructivista.

El propósito general de la enseñanza de la Matemática en la E.B.G. es "proporcionar al egresado de la educación Básica General pleno dominio de operaciones, procedimientos lógico-matemáticos y uso de tecnologías, que le servirán como herramienta de trabajo, para resolver situaciones y problemas matemáticos y de otros campos del saber humano que se le presenten en su vida cotidiana".

Gracias a la designación como consultoras nacionales del área de Matemática que nos hiciera la Dirección del Proyecto de Desarrollo Educativo ME-BID, quien apoya el Plan Decenal de Modernización de la Educación Panameña, tres especialistas en Matemática de la Universidad de Panamá: Guadalupe Tejada de Castillo, Carniola B. de Garcés y Analida Ardila tuvimos entre nuestras tareas el orientar y revisar tanto el diseño del Cartel de Alcance y Secuencia de Contenidos, como la elaboración de los Programas de Matemática del primero al noveno grado de la E.B.G.

El objetivo de esta conferencia es el de presentar la estructura del Cartel de Alcance y Secuencia de Contenidos de Matemática para la E.B.G. y analizar, brevemente, los contenidos propuestos en cada una de las cinco áreas consideradas: Los números sus relaciones y operaciones, Medida, Geometría, Álgebra y Estadística y Probabilidad; justificando la eliminación de contenidos en algunas de estas áreas y el agregar en otras. Los programas fueron implementados, en su fase experimental, en el año de 1999.

En el Cartel de Alcance y Secuencia de Contenidos el área sobre Teoría de Conjuntos, Lógica, Relaciones y Funciones, que aparecía en los programas anteriores, no aparece como tal ya que la noción de conjunto se trabaja directamente con los Conjuntos Numéricos. Esto atendiendo a investigaciones que han demostrado que el estudio de la Teoría de Conjuntos, aisladamente como se venía enseñando, no ha influido significativamente en la educación de los estudiantes de la Básica General. La lógica proposicional se deberá estudiar en otros niveles.

El estudio del área de Los Números sus Relaciones y Operaciones está dirigido al conocimiento de los números, sus propiedades y aplicaciones de las operaciones, sin acentuar la estructura algebraica de ellos Hasta sexto grado se trabaja con los Números Naturales, en el séptimo grado se construye intuitivamente el Conjunto de los Números Enteros y Racionales Positivos, en octavo se estudian los Números Reales y en noveno se introduce el concepto de función. La introducción de las fracciones se hace más paulatinamente, estudiando en segundo grado sólo ½ y ¼ ; las fracciones decimales se estudian en quinto grado y en sexto se practica todo lo aprendido.

El área de la Medida se inicia desde el primer grado, ya que la necesidad de comprender el mundo lleva al niño desde los primeros años de vida, de manera intuitiva, a medir. Durante los dos primeros grados es suficiente que el niño se relacione con medidas de tiempo y de la unidad monetaria, a partir del tercer grado se perfecciona el proceso de comparación de medidas, por medio de instrumentos de medición de magnitudes como lo es la regla calibrada en centímetros. En nuestro país, es importante estudiar, no sólo el sistema internacional de medidas sino el sistema inglés, ya que indistintamente se utilizan ambos.

Es importante el estudio del área de la Geometría desde los niveles básicos, ya que desarrolla la imaginación espacial y la capacidad para explorar, representar y describir el entorno físico del niño. La solución de problemas de Geometría desarrolla en el estudiante la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas. El estudio de las simetrías y las transformaciones geométricas es un tema nuevo en los programas de la E.B.G. En séptimo grado se inicia este estudio y el énfasis está puesto en el estudio de la simetría axial, como una propiedad de las figuras; el trazado y determinación de ejes de simetría ayuda al estudiante a visualizar las relaciones entre los elementos de una figura.

El aprendizaje del Álgebra es importante para todos los estudiantes, independientemente de que sigan o no una carrera universitaria, ya que hoy en día se necesitan individuos con mayor preparación, capaces de asimilar nueva información y utilizarla para resolver problemas, así como de acceder al uso de nuevos instrumentos y técnicas. Es necesario que los estudiantes se acostumbren de manera gradual, a utilizar expresiones con literales y a reglas sencillas de escritura algebraica por lo que en los programas se plantea un pre-álgebra en el séptimo grado. En octavo grado se estudian las operaciones básicas con expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita y en noveno grado se estudian los productos notables, factorización, operaciones con fracciones algebraicas y sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Hay que tener presente que durante el aprendizaje del Álgebra los estudiantes deben utilizarla para resolver problemas que doten de sentido a las nociones y procedimientos algebraicos.

Hoy en día en que estamos expuestos a las formas estadísticas de presentar y tratar la información, es fundamental el estudio del área de Estadística y Probabilidad. El estudio de esta área se inicia desde el primer grado con la presentación y elaboración de cuadros pictóricos estadísticos sobre la realidad escolar, asistencia, registro de tiempo, etc. Y así paulatinamente con gráficas de barra, medidas de tendencia central hasta llegar al noveno grado donde se aplica todo lo aprendido en proyectos de investigación. Desde tercer grado mediante juegos, intuitivamente, se empiezan a estudiar conceptos como: más probable, menos probable, imposible y la noción de azar. En quinto grado se estudian los arreglos y permutaciones de dos o tres objetos, mediante listas de resultados o diagramas de árbol. Y ya en el noveno grado el estudiante debe resolver problemas de aplicación del cálculo de probabilidades.

En cuanto a los programas de estudio, éstos están estructurados en tres columnas:

- Los objetivos, los cuales promueven los principios de aprender a ser, aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a convivir. Están planteados en función de logros generales que no condicionan iguales resultados para todos los alumnos, permitiendo así que se atiendan las diferencias individuales.
- Los contenidos, no se ofrecen acabados en su totalidad para permitir al docente ajustarlos a la realidad existente y a las necesidades y características de los alumnos.
- Las sugerencias didácticas para el docente no son únicas ni definitivas, pero sí suficientemente orientadoras hacia la construcción del aprendizaje significativo con una metodología basada en los principios constructivistas del aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Ministerio de Educación. 1998. Cartel de Alcance y Secuencia de Contenidos de Matemática la E.B.G. Panamá.

Ministerio de Educación. 1999. Programas de Matemática de la E.B.G. (fase experimental) Panamá.

ME-BID. 1998 Orientaciones para el análisis, interpretación y uso de los nuevos programas de estudio de la E.B.G. Panamá.

Una alternativa para el mejoramiento de la Enseñanza y Aprendizaje de la Ciencia, Matemática y Tecnología en Panamá: Proyecto 2061.

Guadalupe Tejada de Castillo
guadalu@cwpanama.net
Depto de Matemática, Universidad de Panamá
Panamá

Resumen

La Secretaria Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT), adscrita a la Presidencia de la República, cuenta con un Programa de Fortalecimiento del Sistema Nacional de Innovación desde donde se desarrolla un Proyecto Piloto bajo el nombre de "Esquemas de Aprendizaje Científico y Tecnológico" que busca ofrecer una visión orientadora y estrategias que contribuyan a fortalecer la educación en Ciencias, Matemática y Tecnología en las escuelas del país.

Este Proyecto se desarrolla con la colaboración del Proyecto 2061 de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, conocida por sus siglas como A.A.A.S., actor central de las dimensiones conocidas como miembro del Proyecto; ésta suministra los recursos principales como consultorías, entrenamiento para profesores y maestros y las publicaciones del Proyecto 2061, adaptándose a las necesidades de docentes y estudiantes panameños.

Los objetivos del Proyecto se resumen así:

Mejorar el conocimiento de contenidos en los maestros de primaria y secundaria.

Mejorar el conocimiento de los maestros con respecto a la investigación en enseñanza y aprendizaje de ciencia, matemática y tecnología.

Mejorar el conocimiento de los educadores acerca de estrategias instruccionales efectivas para ciencia, matemática y tecnología.

Asegurar que los estándares, guías curriculares, materiales instruccionales y estrategias de enseñanza, sigan la misma línea.

Mejorar la comprensión y el rendimiento en ciencia, matemática y tecnología de los estudiantes de primaria y secundaria.

Características Generales del Proyecto 2061

Alfabetización en Ciencia, Matemática y Tecnología. Se trata de ofrecer conocimientos tanto de ciencia como de matemática y tecnología como una formación integral.

Para todos los estudiantes. Se refiere a los conocimientos comunes en ciencia, matemática y tecnología que deben tener todos los estudiantes.

Orientado en objetivos. Le da importancia a los objetivos o metas, no importa cuan sofisticados estén pero interrelacionan la ciencia, matemática y tecnología.

Para todos los niveles. La reforma se diseña para todos los grados desde Pre-escolar hasta tercer año de la media superior.

A largo plazo. Se requiere que sea significativa y duradera centrándose en todos los estudiantes.

Menos es Mejor. Si se quiere que los estudiantes aprendan ciencia, matemática y tecnología se debe reducir la cantidad de material que actualmente se trata de cubrir, ya que los currículos recargados premian la habilidad de almacenar términos, algoritmos y generalizaciones en la memoria de corto término e impiden construir significativamente los conocimientos.

Para el desarrollo del Proyecto se toman en cuenta algunos Principios de Aprendizaje del Proyecto 2061 como son:

- Aprender no es necesariamente un resultado de enseñar
- Lo que los estudiantes aprenden recibe la influencia de sus ideas preexistentes.
- El avance en el aprendizaje va generalmente de lo concreto a lo abstracto.
- Las personas aprenden a hacer bien solamente aquello que practican.
- El aprendizaje efectivo de los alumnos requiere retroalimentación.
- Las expectativas afectan el rendimiento.

Quienes Participan

El proyecto se inicia en 1999 con tres escuelas pilotos de la Ciudad de Panamá, a saber: Escuela Básica Rep. de Haití, Instituto Alberto Einstein y el Instituto Fermin Naudeu. En el año 2000 se incorporan 4 escuelas, en la ciudad de Panamá, las escuelas Maria Ossa de Amador y Rep. de Japón, en Panamá Oeste la escuela Pedro Pablo Sánchez y en el interior del país la escuela Normal Juan Demóstenes Arosemena de Santiago que forma maestros de primaria.

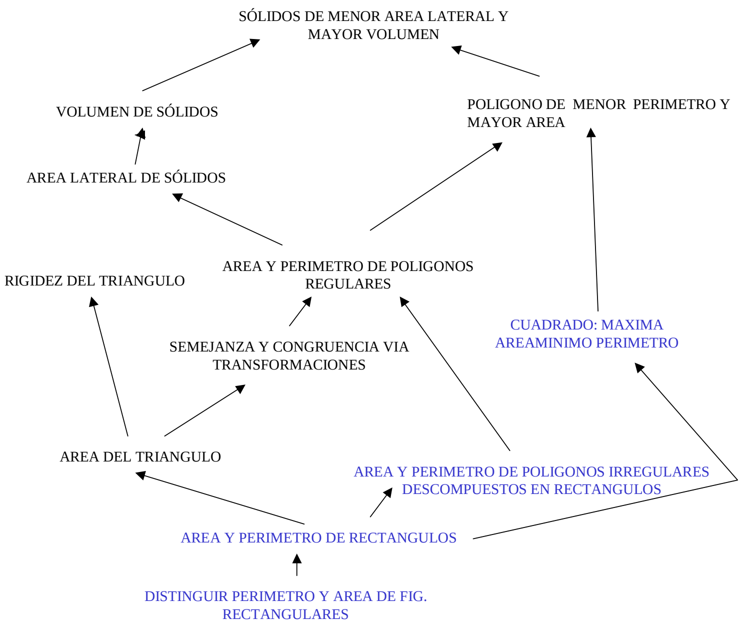
En enero de 1999 se inicia la fase de preparación de un equipo de trece maestros y profesores de ciencia y matemática provenientes de las tres primeras escuelas piloto, entre los cuales se incluyen dos profesores universitarios de física y matemática, un Supervisor del Ministerio de Educación, un representante de SENACYT y la directora del Proyecto. Esta preparación se inicia en Washington en donde se reciben los primeros elementos del Proyecto como son la filosofía y lineamientos que orientan hacia las estrategias de enseñanza y aprendizaje de conocimientos científicos integrados, se desarrollan lecciones de Química, Ciencia, Matemática y Tecnología, por parte de Instructores de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia. Esta fase continua durante el año en Panamá con el apoyo de instructores de la AAAS.

El equipo de los trece llamados Mentores del Proyecto asume un papel de liderazgo e inicia la labor de difusión y capacitación al resto de maestros y profesores de las tres escuelas pilotos y un grupo de docentes universitarios, con la supervisión y apoyo de Instructores de la triple A. Como consecuencia de esta labor, durante el año 1999 se divulga el Proyecto en otras escuelas potenciales para integrarse al plan, en Universidades mediante mesas redondas, charlas y carteles; se profundiza en la formación docente mediante seminarios talleres para docentes de las escuelas pilotos y Universidades, en congresos especialmente en Matemática donde acuden los docentes en servicio del nivel básico y medio. Se promueve la investigación entre docentes universitarios, medio y básico. Se inicia la tarea de diseño de lecciones dirigidas a docentes y educandos con la participación de otros docentes de las escuelas pilotos.

Matemáticas en el Proyecto

Uno de los aspectos de la formación recibida en este proyecto que mayor atención ha recibido por parte de los mentores matemáticos, es la elaboración de unidades como material instruccional para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática por parte de maestros y profesores atendiendo el contexto de la educación del país. Integramos un equipo de cuatro docentes de los tres niveles educativos: primaria, secundaria y universitario e iniciamos un estudio de los contenidos de Geometría que se ofrecen en la básica general con el propósito de ubicar un tema de interés para desarrollar la primera unidad. Una idea que resultó de interés común y que poco se aborda en la enseñanza es la rigidez del triangulo, idea contemplada por el libro Avance en el capítulo 9 que dice así "**Algunas formas tienen**

propiedades especiales. Los triángulos tienden a formar estructuras rígidas y las formas redondas dan el mínimo perímetro para determinada cantidad de área interior. Las formas pueden coincidir exactamente, o ser las mismas pero con distintos tamaños" y sugerida por los científicos que decidieron las ideas de la matemática que deben conocer todos los estudiantes. A este nivel estudiamos las grandes ideas u objetivos sobre el triángulo que presenta Avance en los diferentes niveles de educación lo que llevó a la elaboración de un mapa de contenidos que sirviera de conexión con otros temas



Esta relación entre contenidos sugiere la elaboración de unidades integradas por lecciones para cubrir los contenidos señalados.

Para la elaboración de cada una de las lecciones consideramos algunos elementos necesarios que deben atender éstas de acuerdo a los lineamientos del Proyecto 2061, los cuales se agrupan en siete categorías y ayudan a los estudiantes a aprender el contenido.

Categoría I Proporcionar el sentido del propósito

La lección debe reflejar la utilidad del contenido, de manera que motive a los estudiantes. Por lo tanto el propósito debe ser explícito y comprensible para el estudiante. La lección debe ser rica en oportunidades explícitas para que los estudiantes piensen y discutan el problema.

Categoría II. Tomar en cuenta las ideas de los estudiantes

En esta categoría es necesario considerar cuatro aspectos relacionados con las ideas de los estudiantes

En **primer lugar** es importante que el material especifique los **prerrequisitos** del conocimiento o **habilidades** que son necesarios para el aprendizaje de las ideas u objetivos.

Como **segundo aspecto** es importante que el material alerte a los docentes acerca de **ideas que comúnmente tienen** los alumnos. Para esto se debe tener en cuenta los resultados de las investigaciones que se han realizado. Este es un aspecto relevante de las lecciones pues éstas deben ofrecer al docente una orientación sobre cuáles serán probablemente las ideas que tienen los alumnos sobre lo tratado en ellas, por lo que se debe recurrir a las investigaciones y a la vez promueve el espíritu investigativo del docente.

Otro aspecto de esta categoría es que la lección debe ayudar al docente a **identificar las ideas de los alumnos.**

Como **último aspecto** el material debe **enfrentar las ideas que comúnmente tienen los alumnos**. Se refiere al hecho que el material debe dirigirse de manera explicita a ideas que tienen los alumnos. Es decir debe contener preguntas, tareas o actividades que a lo mejor ayudan al alumno a mejorar sus ideas previas mediante el desafío explícito a sus ideas.

CATEGORÍA III Atraer al alumno con variedad de contextos

Esta categoría se refiere a dos aspectos y es relevante en la organización de la actividad.

Un aspecto importante es el de **proveer una variedad de contextos,** es decir el material elaborado debe suministrar una variedad de experiencias con multiplicidad de diferentes contextos matemáticos que permitan al alumno entender el tema o problema.

Otro aspecto es que el material elaborado debe **ser de primera mano** o sustituirlo cuando no sea posible, para promover las ideas de los objetivos.

CATEGORÍA IV Desarrollar y usar ideas científicas

Una vez que se motiva al alumno con experiencias en diferentes contextos es necesario desarrollar las ideas científicas, para lo cual solo se debe introducir **términos técnicos** unidos a las experiencias, con las ideas o procesos.

CATEGORÍA V Promover el pensamiento de los alumnos mediante fenómenos, experiencias y conocimiento.

Esta es una de las categorías de mayor ponderación al momento de elaborar el material o actividad. El material debe animar al alumno para que **exprese sus ideas**, las clarifique, justifique y represente. También es importante que se motive al alumno para que **reflexione sobre lo que ha aprendido.**

CATEGORÍA VI Evaluar el progreso

El proceso de evaluación no debe ser aislado, así que el material debe incluir tareas de evaluación que obligue al alumno a **aplicar** las ideas aprendidas, que evite que deseen salir del paso de manera trivial tal como sucede cuando usan una fórmula o repiten un término que conocen de memoria.

CATEGORÍA VII Mejorar el medio ambiente del aprendizaje

El material que se elabora debe ayudar al docente **a mejorar sus conocimientos** sobre la matemática y a utilizar la tecnología en el aula de clases para mejorar la enseñanza. De igual manera debe contribuir para que el docente cree un **ambiente** donde esté presente la curiosidad y que recompense la creatividad, que favorezca el espíritu de cuestionamiento y evite el dogmatismo.

También el material debe ayudar al docente a crear un ambiente en donde se tenga altas expectativas para **todos** los alumnos, que **todos** sientan un ambiente de éxito y no de fracaso.

Algunos logros

Entre los logros más importantes del proyecto en su desarrollo de año y medio podemos señalar

Una gran motivación de los docentes de matemáticas por hacer cambios en el desarrollo de las clases en el aula.

Gran interés de coordinación con colegas de su escuela en las diferentes especialidades.

Intercambio de material entre las escuelas del Proyecto

Colaboración entre docentes de las diferentes escuelas para ofrecer clases conjuntas.

Elaboración conjunta de materiales instruccionales (laboratorios, lecciones)

Análisis y comparación de los resultados de aplicación de lecciones en las diferentes escuelas.

Análisis de los contenidos programáticos por parte de los docentes de las escuelas pilotos.

Diseño y realización de pequeñas investigaciones en el aula.

Intercambios de experiencias en reuniones mensuales entre docentes del proyecto.

Trabajos conjuntos entre docentes de diferentes niveles(primario, secundario y universitario)

Apoyo al resto de los docentes de matemáticas de sus escuelas.

Se ha creado conciencia en la necesidad de cambios en el proceso de evaluación.

Referencias bibliográficas

SÁNCHEZ GILDA (1999) **Reflexiones en torno al Proyecto**. SENACYT.

American Association for the Advancement of Science (AAAS).

Ciencia: Conocimiento para todos. Publicación Especializada.

American Association for the Advancement of Science (AAAS).

Avances en el conocimiento cientifico. Publicación Especializada. American Association for the Advancement of Science (AAAS).

HACKET LINDA (2000) **Curso de Formación** realizado en enero (AAAS).

CURSOS CORTOS

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Cruzando Puentes, Pintando Mapas, ...Una Introducción a la Teoría de Grafos

Cecilia R. Crespo Crespo
ccrespo@sinectis.com.ar
Universidad Nacional de General San Martín (Buenos Aires)
Argentina

Nivel medio - superior
Geometría

Introducción

La teoría de grafos, si bien es un tema que no aparece en las currícula de los distintos ciclos de la escuela, ofrece herramientas para plantear y resolver problemas que van desde juegos de ingenio hasta importantes aplicaciones a situaciones de la vida cotidiana. La sencillez de muchos de sus métodos permite presentar esta teoría como una manera de "pensar matemáticamente", en la que la intuición y el ingenio juegan un papel importante, posibilitando en determinados momentos de la enseñanza, recurrir a ella como una herramienta para la resolución de problemas.

La teoría de grafos es de las pocas ramas de la matemática cuya fecha de nacimiento está perfectamente determinada. El primer artículo relacionado con los grafos apareció, escrito en 1783 por el matemático suizo Leonhard Euler, en San Petersburgo en la publicación de la Academia Rusa. A partir de entonces, distintos aportes para solucionar problemas concretos permitieron que fuera tomando cuerpo de teoría. Aún en nuestro siglo, estas ideas se encuentran en evolución constante mediante la resolución de problemas como el teorema de los cuatro colores, cuya demostración determinó un cambio fundamental en los procedimientos de demostración.

Es posible abordar algunos aspectos de la teoría de grafos a partir de sus aplicaciones, analizando la manera en que surgieron históricamente y mediante la resolución de problemas.

¿Los alumnos utilizan grafos?

Los grafos permiten modelizar matemáticamente muchas situaciones de la vida real, dando a la información una forma sencilla y muy intuitiva. De hecho, muchas veces, nuestros alumnos los utilizan en sus razonamientos sin darse cuenta.

Un ejemplo que evidencia esta afirmación puede ser la consideración de un torneo intercolegial entre varias escuelas, de las que se han jugado algunos partidos. Los alumnos representan intuitivamente los equipos por puntos y los unen mediante líneas según hayan jugado ya un partido. Algunas conclusiones que van extrayendo a medida que logran la representación son por ejemplo si dos escuelas han jugado entre sí, esto se representa con una sola línea pues se trata de un solo partido. Mediante la observación del grafo, al analizar cuántos partidos jugó cada una, están calculando y comparando los grados de cada uno de los vértices del grafo obtenido. Es fácil lograr orientarlos a concluir que la suma de los grados de los vértices coincide con el doble de la cantidad de partidos jugados, ya que cada partido es jugado por dos equipos. Esta es una de las propiedades fundamentales de los grados de los vértices. Mediante preguntas apropiadas sobre este ejemplo, surgen los conceptos de complemento de un grafo y grafo completo.

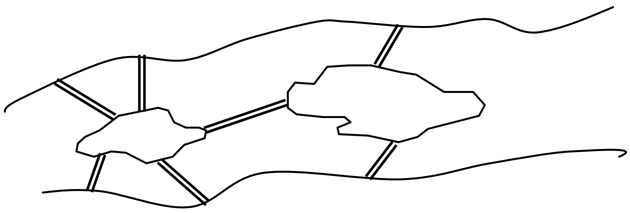
Algunos problemas de la teoría de grafos

Caminos y circuitos de Euler

A partir de la presentación de un problema concreto, como ser la búsqueda de un recorrido para un cartero en el cual no se vuelva sobre sus pasos más de lo necesario, se pueden plantear situaciones que enriquecen y generalizan el clásico problema de los puentes de Königsberg.

La teoría de grafos es, como hemos dicho anteriormente, de las pocas ramas de la matemática cuya fecha de nacimiento está perfectamente determinada. El primer artículo relacionado con los grafos apareció, escrito en 1783 por el matemático suizo Leonhard Euler (Basilea 1707-1783), en San Petersburgo en la publicación de la Academia Rusa. Este eminente científico enriqueció a la matemática en casi todas sus ramas.

Euler comenzó su artículo presentando una ingeniosa solución al problema de los puentes de Königsberg, ciudad de Prusia Oriental a orillas del río Pregel. En esta ciudad de la actual Rusia, hoy llamada Kaliningrado, existían dos islas conectadas por siete puentes como indica la figura:



El problema planteado, consistía en intentar cruzar los siete puentes en un paseo continuo sin volver a cruzar ninguno de ellos.

Es interesante analizar cómo resuelve Euler este problema. En su artículo pone en evidencia su ingenio para llegar a generalizar la condición que hoy se conoce como necesaria y suficiente para que un grafo sea un camino o circuito de Euler. Debe tenerse en cuenta que por ser considerado este momento como el nacimiento de la teoría de grafos, se ve obligado a ir identificando cuáles son los datos que definen el problema y las relaciones existentes entre ellos. En este análisis se evidencia claramente el genio científico de Euler.

Problema del cartero chino

En un grafo que no contenga ni circuitos ni caminos de Euler, agregando la hipótesis de poder reutilizar alguna arista, sería posible recorrerlo. La idea es tratar de optimizar la eficiencia de este procedimiento tratando de minimizar la cantidad de aristas reutilizadas.

Este problema, en el que se desea minimizar el recorrido de un circuito a través de una adecuada selección de aristas para recorrer otra vez, se conoce como problema del cartero chino, porque fue por primera vez estudiado por el matemático chino Meigu Guan en 1962.

En este problema del cartero chino, en su versión simplificada, se consideran todas las aristas de la misma longitud. Si pensamos que las aceras pueden tener distinta longitud, estaremos en el caso general y la selección de aceras para reutilizar deberá tener en cuenta esta variación. Su solución se reduce a buscar un camino mínimo tras que recorra un circuito o un camino, según se desee reutilizando aristas cuando sea necesario.

Existe gran cantidad de aplicaciones prácticas del problema del cartero chino que ponen de manifiesto cómo esta teoría optimiza la solución de problemas a través de razonamientos claros y que presentan poca dificultad.

Caminos y circuitos de Hamilton

William Rowan Hamilton en 1859, ideó un original acertijo a partir de la figura de un dodecaedro regular, en cuyos vértices ubicaba ciudades proponiendo encontrar una ruta a lo largo de las aristas que pasase una sola vez por cada ciudad. Por ser muy incómodo manipular este sólido platónico, introdujo el concepto de isomorfismo para razonar sobre un grafo plano.

A pesar de la similitud de los conceptos de los recorridos de Euler y de Hamilton, es notoria la diferencia entre ambas soluciones, pues mientras el problema de Euler tiene solución sencilla y eficiente, para el de Hamilton, la búsqueda de tal solución es aún un problema abierto.

Grafos de intervalos

Los grafos de intervalos, definidos a partir del solapamiento de intervalos abiertos de la recta, aparecen al abordar varios tipos de problemas en la ciencia moderna.

Si bien este tipo de grafos no son comúnmente definidos en la bibliografía, sus aplicaciones a la arqueología y a la literatura, ponen de manifiesto el servicio que presta la teoría de grafos a la resolución sencilla de problemas concretos.

Grafos planos

Un antiquísimo problema plantea si es posible comunicar a través de senderos tres casas a tres pozos de agua imponiendo la condición de que todas las casas estén comunicadas con todos los pozos, pero sin que se crucen los senderos.

Este problema da origen a la definición de grafo plano. Entre sus aplicaciones cabe destacar la construcción de circuitos electrónicos industriales, en los que el cruce de cables conductores no aislados daría origen a un cortocircuito.

Coloreo de mapas

Un problema famoso es el conocido como problema de los cuatro colores. Consiste en demostrar que cualquier mapa plano puede ser coloreado de manera satisfactoria usando sólo cuatro colores.

Históricamente este problema es descrito en 1852 por Augustus De Morgan en una carta que envía a William Hamilton. El planteo original se debe a Frederik Guthrie, uno de sus alumnos. La apariencia inofensiva de la conjetura de que son suficientes cuatro colores para realizar cualquier coloreo, estimuló varios avances en la teoría de grafos. La solución, sin embargo, se obtuvo en 1976. En este año, Kenneth Appel y Wolfrang Haken, publicaron una demostración que hace uso exhaustivo de la computación.

Esta demostración, por sus características, desató grandes polémicas entre matemáticos, ya que algunos se niegan a aceptarla. Para otros, el concepto de demostración matemática, para algunos, parece haber cambiado. Esta discusión resulta de gran interés para el desarrollo de esta ciencia, aunque actualmente, ya se han utilizado computadoras para resolver otros problemas.

El problema del coloreo de mapas, tiene variantes que lo hacen más sencillo al imponer condiciones sobre las regiones en que se divide el plano. Otras variantes plantean un mapa sobre otras superficies.

Grafos y geometría: La fórmula de Euler

La utilización del concepto de dualidad entre mapas planos y grafos poligonales, da oportunidad para relacionar conceptos de la geometría con este tema. Uno de ellos es la aplicación de la fórmula de Euler. Este tema que sí se halla presente en el curriculum escolar, no es a veces abordado en el aula, a pesar de su simplicidad y de la riqueza que esconde. La demostración del teorema de Euler mediante la aplicación de grafos es una de las más sencillas del mismo.

Consideraciones finales

La teoría de grafos tiene múltiples e importantes aplicaciones en el estudio de circuitos eléctricos, sistemas de transporte y distribución, comunicaciones, lenguajes formales, optimización, etc.

La presentación de algunos problemas clásicos de teoría de grafos y el entorno histórico en el que fueron planteados y resueltos, da oportunidad al docente de acercarse a esta rama de la matemática, para comprender cómo a veces es posible encontrar problemas cuya resolución no requiere de complicadas representaciones. A partir de estos ejemplos, se plantea una serie de problemas y ejercicios para ser resueltos haciendo uso exclusivamente del razonamiento matemático, además de ciertos algoritmos sencillos.

El trabajo de la fórmula de Euler y la relación de los grafos con los poliedros, da al docente otra óptica para el tratamiento de algunos problemas geométricos. El teorema de Euler, al cual a veces no se le da la debida importancia, permite que los alumnos de la escuela media trabajen contenidos procedimentales como el establecimiento de relaciones entre elementos de un mismo poliedro, su descripción y análisis, generalización de resultados, realización de demostraciones matemáticas, por dar algunos ejemplos.

Referencias bibliográficas

ABELLANAS, M. - LODARES, D. (1990). *Análisis de algoritmos y teoría de grafos*. Ra-ma Editorial. Madrid, España.

CASTRO CHADID, I. (1988). *Leonard Euler.* Pontificia Universidad Javeriana. Santafé de Bogotá, Colombia.

COMAP (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison Wesley Iberoamericana. Madrid, España.

CRESPO CRESPO, Cecilia (1998). *Algunas consideraciones y sugerencias para la introducción del teorema de Euler en la clase.* En Zona Educativa en el aula - nº 10 (pp. 2-7) - Ministerio de Cultura y Educación. Buenos Aires, Argentina.

EULER: Leonhard (1736). *Los siete puentes de Königsberg*. En Sigma, el mundo de la Matemática. (1969) comp. Newman, J. Vol. 4 (pp. 164-171) - Grijalbo. Barcelona, España.

GRIMALDI, Ralph (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria*. Addison Wesley Iberoamericana. Madrid, España.

HORGAN, John (1993). *La muerte de la demostración*. En Investigación y ciencia N° 207. (pp. 70-77) - Prensa Científica. Barcelona, España.

JOHNSONBAUGH, Richard (1988). *Matemáticas Discretas.* Grupo Editorial Iberoamérica.México D.F., México.

ORE, Oystein (1981). *Grafos y sus aplicaciones*. DLS-Euler, Editores. España.

SINGH, Simon (1999). *El último teorema de Fermat*. Grupo Editorial Norma. Santafé de Bogotá, Colombia.

PÉREZ, Julio (1997). *Introducción a la Matemática Discreta y Algoritmos*. ITBA. Buenos Aires, Argentina.

TORANZOS, Fausto (1976). *Introducción a la teoría de grafos.* OEA. Washington, EEUU.

Inecuaciones: Un Análisis de las Construcciones Mentales en los Estudiantes Universitarios.

Karly B. Alvarenga
Universidad Católica de Brasilia
Brasil

Nivel medio y superior-Cálculo

Resumen

La enseñanza-aprendizaje de Desigualdades es una buena oportunidad para trabajar las propiedades de la teoría de conjunto de los números reales, gráficos de funciones, habilidad de interpretación en las soluciones de Igualdad y Desigualdad, aproximación y equivalencias, entre otros tópicos matemáticos. Este asunto es poco tratado en la literatura de Educación Matemática y con un índice altísimo de errores de concepción.

Se pretende presentar algunos análisis de como un sujeto puede aprender Desigualdades, principalmente las presentadas en la enseñanza de Pré-Calculo, y que tipo de construcciones mentales puede realizar. Con base en estas construcciones se sugiere estrategias pedagógicas que permitan proporcionar al alumno una mayor comprensión del tema.

La fundamentación teórica se basa en algunas perspectivas de investigación científica que están surgiendo en la Educación de Matemáticas las cuales se apoyan en los trabajos de Piaget y García, adaptadas para la enseñanza del tercer grado. Partimos del principio que el desarrollo intelectual del individuo tiene que ver con el surgimiento de poderosos mecanismos de cognición como la abstracción reflexiva, asimilación / acomodación, desequilibración / equilibración y la tricotomía intra, inter y trans.

La parte experimental del trabajo, que se pretende presentar, se fundamenta en el análisis de entrevistas y pruebas escritas realizadas con cachimbos (alumnos universitarios ingresantes), de los cursos de licenciatura en Matemática y Técnicos en Informática. La investigación se basa en una perspectiva teórica constituida de una primera Descomposición genética, conjunto estructurado de construcciones mentales que sugiere una descripción de como el concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo, en acciones, procesos, objetos y esquemas.
Se destaca que este análisis de las construcciones mentales tienen como objetivo verificar si el individuo presentó, o no, determinadas construcciones propuestas inicialmente y si apareció alguna nueva construcción diferente de las sugeridas al inicio, para perfeccionar, si fuera necesario, la primera Descomposición Genética.

La perspectiva teórica también tiene por objetivo planificar estrategias pedagógicas que induzcan al alumno a realizar tales construcciones y orientar la colecta de datos, en particular, las entrevistas.

Además de presentar determinadas construcciones mentales de Desigualdades, se propone algunas actividades pedagógicas, varias de ellas haciendo uso de un lenguaje de programación para aprender matemática-ISETL.

Se resalta que los análisis, así como las propuestas pedagógicas presentadas en este curso no son únicas y tampoco definitivas

Referencias:

ASIALA, M. et al. (1996). A framework for research and currículum development in undergraduate mathiematics education. CBMS lssues in Mathematical Education, 6, 1 - 32.

La Aproximación en la Educación Básica

Gloria García, Celly Serrano, Hernán Díaz
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

Resumen

Este trabajo presenta parcialmente el avance de la investigación que adelanta el grupo en torno a la construcción de un nicho ecológico para desarrollar un acercamiento al Cálculo desde la dimensión de la aproximación. La construcción de este nicho se propone con enfoques distintos a tratamiento didácticos establecidos, como la medida, el algoritmo de la división, el cálculo de raíces no exactas, notaciones operatorias a las cuales se tiene acceso por aproximaciones y la solución de ecuaciones no lineales. Con estos presupuestos tratamos de caracterizar la estructura conceptual y procedimental de la aproximación, sus técnicas en relación a situaciones donde esta presente.

Introducción

El interés del grupo por el estudio de la aproximación tiene sus raíces en la preocupación por las dificultades y los frecuentes fracasos que presentan los estudiantes universitarios, específicamente los estudiantes para profesores de matemáticas, cuando se enfrentan a las presentaciones numéricas de conceptos básicos del Cálculo

Con esta preocupación estamos desarrollando una investigación que cuenta con el apoyo del Instituto Colombiano de Ciencia y Tecnología (COLCIENCIAS). Para abordar el estudio estamos realizando e integrado una serie de estudios consistentes en la revisión histórica de la aproximación, de sus aspectos matemáticos, de representación, de sus aspectos epistemológicos y de los aspectos cognitivos.

Este avance presenta en primer lugar el porqué la aproximación es noción fundamental del Cálculo y de las matemáticas. En segundo lugar describe, grosso modo, la estructura conceptual y procedimental y finalmente se proponen algunos tratamiento didácticos.

1. La aproximación una noción fundamental en el Cálculo Diferencial.

El Cálculo es un dominio cuyas entidades de base, números reales, función límite, y sus técnicas, son bastantes complejas por sí mismas. Al respecto diferentes investigaciones (Cornu 1991.Sierpinska, 1985, Artigue 1993), muestran las dificultades fuertes y persistentes que encuentran los estudiantes en su aprendizaje. Del análisis de estos resultados se deduce que tienen orígenes diversos pero se implican y refuerzan mutuamente constituyendo una red compleja difícil de organizar en categorías independientes (Artigue, 1998).

Un resumen apretado de la dificultades categorizadas por Artigue permite señalar que se encuentran ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del campo conceptual del Cálculo, números reales, funciones, sucesiones, límite, a sus técnicas y a la ruptura necesaria con modos característicos del pensamiento algebraico.(Artigue, 1998.

Con base en estos resultados sin lugar a dudas se puede afirmar que al Cálculo se puede llegar después de consumar un largo proceso el cual se caracteriza por la construcción de un nicho ecológico donde el estudiante desarrolle prácticas significativas y prototípicas de sus modos de pensamiento y de las técnicas que fundamentan el campo.

La construcción del nicho ecológico articula la historia de gestación de las nociones básicas del Cálculo. Su historia muestra como los problemas constitutivos de su gestación como campo conceptual se encuentra en torno a los problemas de variación y aproximación. La medición del cambio relativo en intervalos grandes a la medición del cambio relativo en un instante, involucra procesos de aproximaciones sucesivas, y procesos infinitos. Esta medición se logra encapsular por el comportamiento tendencial del proceso de aproximación. Este proceso comenzó a preparar de manera significativa la concepción de límite como proceso.

Los procesos de aproximación también se encuentran presentes en la representación geométrica para medir el cambio instantáneo, la familia de secantes que tiende a la pendiente en un punto de la curva, es en si mismo un proceso de aproximación. En consecuencia, las expresiones analíticas que expresan los conceptos de límite y derivada son las encapsulaciones simbólicas de procesos de aproximación.

Pero la aproximación no solo se encuentra involucrada en los conceptos de límite y derivada, es parte consustancial de otro de los objetos asociados al Cálculo, los números reales. Para nadie es desconocido que un número real es a veces descrito por una secuencia infinita an de aproximaciones, en el cual el valor de a es dado por el valor an, con un considerable grado de precisión si se escoge el índice n suficientemente grande. La lista de valores an encierra un margen de error, el cual es controlado por el tamaño de n, en tanto si este se toma suficientemente grande las diferencias entre a y an , son cada vez menores, es decir cada vez están más cerca el uno del otro.

2. La aproximación, noción fundamental de las matemáticas

Cantoral y Artigue (1997) llaman la atención para identificar a la noción de aproximación como noción consustancial a las matemáticas. La revisión histórica de su evolución muestra que actuó como noción impresa en los pliegues más ocultos de la naturaleza de sus métodos.

Estuvo presente como herramienta de solución de ecuaciones no lineales; en el calculo de áreas de superficies y de volúmenes de sólidos. De otro parte, la necesidad de modelar matemáticamente fenómenos de la ciencias conllevó a la exigencia de crear métodos para buscar soluciones a problemas que no podían ser resueltos por métodos analíticos exactos. Esta necesidad surgió en el reconocimiento de que la mayoría de los problemas de las ciencias no pueden ser modelados por ecuaciones analíticas lineales, lo que dio lugar a la creación de métodos numéricos sistemáticos. La noción fuerte que subyace en estos métodos es la de aproximación, estos métodos encuentran su fundamento conceptual en el área denominada Análisis Numérico. En campos pragmáticos, como la medición y la valoración de la medida, la aproximación cobro especial importancia.

En el momento actual, el hacer matemático se enriquece con la incorporación de una herramienta como el computador, lo que implica reconocer que se vuelve a otorgar un gran valor a las exploraciones y aproximaciones numéricas. Además, este hacer cuestiona el valor que se le ha asignado a la demostración como único criterio de validez para organizar a la matemática como cuerpo axiomático y coloca de presente la importancia de la prueba elaborada con base en argumentos numéricos.

Este nuevo hacer matemático posea características que contravierte los haceres tradicionales con que se han identificado a las matemáticas. En este hacer la construcción se sucede por reglas algorítmicas. Estas características del hacer computacional pone en cuestión dialécticas epistemológicas fuertes sobre cuestiones relativas al carácter exclusivamente demostrativo del conocimiento matemático

En sí mismo, la aceptación de métodos de aproximación como parte consustancial de los métodos matemáticos enfrenta un obstáculo didáctico fuerte cuando se ha estructurado a través del aprendizaje de las matemáticas, una concepción de conocimiento matemático como garante de la exactitud.

Los argumentos anteriores nos han llevado a establecer los siguientes interrogantes: ¿ Es posible construir vías de acceso cognoscitivas, temprana y didácticamente a la aproximación en los estudiantes de la educación Básica ?, ¿ Cuáles son las situaciones de la enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica en las que es pertinente trabajar con técnicas de aproximación ?.

3. Estructura conceptual y procedimentales de la aproximación

Para efectos de situar la estructura conceptual, establecemos a continuación la red de conocimientos interconectada que determina los conocimientos propios de la aproximación *Valor aproximado*: El significado se caracteriza por ser una expresión numérica ante todo relacional, que establece una relación con otro valor – único –al que se llama valor exacto

La aproximación puede ser mayor o menor que el número exacto. En el primer caso se dice que aproximación es por exceso y en el segundo por defecto. El valor aproximado es característico de las situaciones de valoración de la medida y en este sentido es parte importante de la Estimación.

Aproximaciones sucesivas: Su significado sigue siendo relacional pero su sentido es el de establecer precisión en la aproximación. Por tal razón las aproximaciones sucesivas se caracterizan por el uso de métodos y técnicas que garanticen la sistematicidad de la aproximación. La exigencia de procesos sistemáticos incorpora a la iteración y recursión; en algunos casos se logra establecer algoritmos que precisan la aproximación

Procesos infinitos: Se caracterizan por ser procesos de aproximaciones sucesivas que se repiten simbólicamente al menos un número infinito de veces para buscar establecer una valor exacto. La regularidad que presentan las aproximaciones sucesivas permite intuir el resultado final del proceso; esta regularidad se garantiza porque los errores de aproximación se hacen tan pequeños como se desee. Surge así la relación de los procesos infinitos con el concepto de tendencia. Estos procesos están presentes en la concepción de límite como proceso.

Es claro que el significado de las expresiones anteriores no puede ser considero aislado de la regla que determina el criterio de precisión, el cálculo del Error.

Error: esta expresión designa la desviación o diferencia que un valor aproximado tiene respecto al valor exacto. En particular el error absoluto cobra el valor de Regla prueba para establecer la precisión en los procesos de aproximación sucesiva y los procesos infinitos. En este último su estabililidad (el error tiende a cero) asegura la tendencia del proceso infinito.

En lo que respecta a la parte procedimental, la aproximación pone en marcha una forma de actuación que combina una secuencia iterativa y/o recursiva de reglas operativas (Cantoral, Reséndiz, 1997) Este conjunto de reglas que actúa como medio eficaz para obtener la aproximación deseada, la denominamos técnica

Las técnicas de aproximación combinan diversas reglas. Una de las reglas es generar los procesos de aproximación por encajonamiento, o por intervalos, esta regla exige establecer dos valores iniciales que a la vez son definidos por un algoritmo. este es el caso del cálculo aproximado de $\sqrt{2}$, se parte de interpretación operatoria de la notación, la cual define la regla calcular la raíz esta interpretación permite calcular de los dos primeros valores; este primer encajonamiento desencadena procesos inferenciales iterativos regidos por las reglas .Un proceso análogo a este, es el que desencadena la interpretación de notaciones operatorias como 1/3 o la aplicación del algoritmo de la división. Dentro de las reglas se encuentran el redondeo y el truncamiento.

Es necesario señalar que el sistema simbólico que dota de sentido al trabajo con la aproximación y sus técnicas son los decimales. Es también claro que su papel, en este campo es el de servir de herramienta de expresión de la aproximación

Teniendo en cuenta que nuestra propuesta esta dirigida a introducir la aproximación y sus técnicas en la Educación Básica no hacemos alusión a técnicas de aproximación propias del Análisis Numérico.

4. La aproximación y sus técnicas, ¿ cuándo ?

En este apartado, tal como lo enunciamos al inicio, destacaremos los aspectos esenciales que determinan las posibilidades de introducir tempranamente en la educación básica la aproximación. Estas orientaciones sólo pretender ofrecer a los profesores los referentes necesarios para diseñar unidades didácticas en función de las prácticas institucionales y las características de los alumnos.

Tal como hemos señalado, el primer referente para introducir la aproximación en los diseños curriculares de la educación Básica esta asociado a la concepción epistemológica del conocimiento matemático que sustenta el diseño. Ya es completamente aceptado por la comunidad de educadores matemáticos las implicaciones entre concepciones epistemológicas de las matemáticas y los diseños curriculares. En particular la concepción que ronda en nuestra educación matemática sobre la matemática es identificarla como ciencia de la exactitud, y de la objetividad; esta concepción por ejemplo muestra como desde tempranamente la escuela evita las practicas de medición efectiva, prioriza el cálculo de medidas con formulas. Para evitar el enfrentamiento a la estimación y por ende a la aproximación. Esta concepción se convierte en un obstáculo didáctico para eventualmente aceptar a la estimación y a la aproximación como complemento en la formación matemática de los estudiantes.

Desde este enfoque es posible priorizar en la Educación Primaria la relación entre Estimación y Aproximación pues la aproximación es una parte importante de la Estimación; la aproximación cobra sentido en situaciones donde la búsqueda del valor numérico suficientemente preciso de una medida sea necesario para un determinado propósito. En particular la introducción de la aproximación en la Primaria cobra sentido para los estudiantes en las practicas efectivas de medición; en situaciones de aprendizaje donde la valoración de la medida juegue un papel importante.

Los procesos algorítmicos iterativos, se presentan tempranamente en la educación Primaria, con el algoritmo de la división, puede acercarse a los estudiantes a procesos de aproximación por exceso y por defecto. De igual forma el cálculo de raíces no exactas debe ser también una actividad de aprendizaje que ponga de presente los procesos de aproximación. En este campo el valor numérico, como expresión relacional con un valor exacto también prepara a los estudiantes para la aceptación que un valor numérico tiene múltiples valores aproximados

En la educación Básica Secundaria el tratamiento de solución a situaciones como la relación entre área y perímetro de figuras cuyos lados crecen o decrecen de acuerdo a una regla (.... la longitud de un lado es la mitad del anterior...) pueden ser explotados como situaciones en las que se generan procesos de aproximación.

El aprendizaje de sistemas notacionales numéricos como los decimales es también un buen pretexto para construir procesos de aproximación a los números reales.
En Álgebra, la solución de ecuaciones no lineales es también un buen motivo para introducir las técnicas de aproximación.

Cómo

Tal como le enunciamos en párrafos anteriores la construcción de las situaciones de aprendizaje que hacen posible el acercamiento y trabajo de los estudiantes con la aproximación y sus técnicas es dependiente de un cambio en la concepción sobre las matemáticas escolares.

No desconocemos que la construcción de situaciones efectivas de medida es compleja, no solo por la presencia necesaria de los materiales, instrumentos de medición de distinto tipo, sino fundamentalmente por la complejidad conceptual ligada a esta practica.. Pero en lo referente a la valoración de medidas efectuadas es posible trabajar el valor aproximado como medio de control que permite en una situación especifica establecer la precisión que se desea.

Una herramienta importante es la calculadora. La calculadora (numérica y gráfica), ya sea usada como instrumentos de exploración, en el sentido de que permite discutir sobre cuestiones como la exactitud, la precisión, el error de notaciones decimales; o cuando se usa para ver algo nuevo, es decir, construir aproximaciones; o para establecer las relaciones estructurales de una cierta fenomenología (ajuste de curvas) se constituye en la herramienta básica para el tratamiento de la aproximación en la educación básica.

De igual modo, la construcción de situaciones que incluyan notaciones operatorias o nombres **PI deben** ser trabajadas como situaciones a las cuales se tiene acceso para su aproximación. En estas situaciones es posible reflexionar sobre las técnicas, el carácter inferencial e iterativo que los estudiantes realizan informalmente como criterio de validación y que posibilitan la construcción paso a paso de la representación aproximada .

Otro aspecto importante es la conexión entre las matemáticas y las ciencias experimentales en donde la modelación de situaciones problemáticas y de fenómenos de las ciencias se asuman desde su carácter aproximativo.

Finalmente es necesario señalar que esta propuesta no proponemos integrarla al currículo como un nuevo contenido o bloque curricular. Su integración y distribución a lo largo del currículo pretende dar un nuevo enfoque al tratamiento tradicional de aspectos de los dominios mencionados.

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M: (1998) Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental ¿ qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares ?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* No 1CLAME THOMSON Editores.

CANTORAL, R., RESÉNDIZ, E. (1997) *Aproximaciones sucesivas y sucesiones*. Cuadernos Didácticos. VOL I. Grupo Editorial Iberoamérica.

DAVIS, P., HERSH, R. (1997*) Experiencia matemática*. Ed Labor.

LORENZO JAVIER DE (1993) La razón constructiva matemática y sus haceres. *Mathesis. Filosofía e Historia de las matemáticas .* VOL IX. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.

MORENO, L. (1996) Geometría Fractal y un nuevo diseño curricular. CINVESTAV-IPN

MORENO , L. (1996) Una perspectiva sobre la demostración. . CINVESTAV-IPN

MONCHON, S. (1994*) Quiero aprender Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamericano.

VEGA, L. (1993) ¿ Pruebas o demostraciones ?.Problemas en torno a la idea matemática de demostración matemática *Mathesis. Filosofía e Historia de las matemáticas .* VOL IX. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.

El Modelo de Van Hiele y el Cabri Geométré en la Enseñanza de la Geometría.

Jorge Enrique Fiallo Leal
jfiallo@uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga
Colombia

Geometría: Educación Media Secundaria

Resumen

Aunque en todos los países Latinoamericanos existe un programa de Geometría propuesto, su cumplimiento y desarrollo seguramente no resiste una mínima revisión. En efecto, es de dominio popular que en la mayoría de las instituciones educativas la unidad correspondiente (generalmente la última en cada texto) no se desarrolla o sólo se hace superficialmente, por razones de tan diversa índole que cubren prácticamente todas las disculpas posibles. De otro lado están los docentes que insisten en su enseñanza bajo el enfoque tradicional, planteando y realizando demostraciones que el alumno, en el mejor de los casos, aprende de memoria sin lograr beneficio alguno, pues su comprensión del tema es apenas mínimo. La búsqueda de una solución para una y otra versión del problema no es nueva en el mundo, tal como lo muestran las múltiples investigaciones existentes, de las cuales han surgido metodologías y modelos para la enseñanza quizás la de mayor renombre es la realizada por los esposos Holandeses Pierre Marie y Dina Van Hiele, cuyo inicio se remonta a los años 50's y de la cual surgió el llamado "Modelo de Van Hiele" para la enseñanza de la Geometría al cual hace referencia el curso que se plantea. Por otro lado la tecnología nos ofrece la oportunidad de utilizar calculadoras y computadoras que traen software especializado para las matemáticas y su enseñanza, como es el caso del programa "Cabri Géométre", sin embargo, el programa por si sólo no enseña, se requiere de un modelo que nos permita además de conocer como el estudiante aprende a razonar en Geometría organizar nuestro trabajo en el aula con el uso de la tecnología para que éste llegue a adquirir un nivel superior de razonamiento

Referencias bibliográficas

FIALLO L., Jorge E. Geometría 6, Mimeografiada, 1993.

FIALLO L., Jorge E. El Modelo de Van Hiele en la Enseñanza de los deslizamientos en el plano en sexto grado, Tesis de Maestría en la Enseñanza de la Matemática, 1996

GUTIÉRREZ R., Angel y JAIME P., Adela. Una propuesta de fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: el Modelo de Van Hiele. En: Llinares C. Salvador y Sánchez G Ma. Victoria. Teoría y Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar, 1990, pp. 297-384.

HOFFER, Alan. Van Hiele based research. En: Lesh R. Y Landau M. Eds., Adquisition of Mathematics concepts and processes. Academic Press, New York, 1983, pp. 205-227.

SHARON L., Senk. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. En: Journal for research in Mathematics Education, vol. 20, No. 3, pp. 309-321.

Diseño de Instrumentos de Evaluación de los Aprendizajes

Thais Castillo Alfaro
tcastill @ cariari.ucr.ac.cr
Centro de Evaluación Académica. Universidad de Costa Rica.
San Pedro de Montes de Oca, San José
Costa Rica.

Educación Secundaria.

Resumen

Con este curso deseamos apoyar la labor del docente de secundaria, en los procesos de evaluación, dado el reconocimiento que ellos hacen, de las debilidades que poseen en el campo de la elaboración de instrumentos, de lápiz y papel, para evaluar los aprendizajes.

Partimos del supuesto teórico de que los instrumentos deben estar construidos de tal forma que no sean ellos mismos los que influyen en los resultados de los aprendizajes. Además, de que es el alumno el protagonista de su aprendizaje, por lo que lo que en lo que debe ser evaluado es en cuanto ha aprendido a aprender (Arrién et all, 1996), y donde son tan importantes los resultados como los procesos de aprendizaje.

Se trata de analizar el instrumento como un todo y, las diferentes partes que lo constituyen, determinando la función que cumplen los diferentes tipos de ítemes, en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desea valorar.

Las actividades favorecen el trabajo individual y en pequeños grupos, con el fin de propiciar la interacción y el crecimiento profesional entre los asistentes. Se ofrecerá referencia teórica y el material necesario para el desarrollo de las diferentes actividades.

Referente Teórico

"La educación constituye un instrumento indispensable para que la humanidad pueda progresar hacia los ideales de paz, libertad y justicia social. La función esencial de la educación es el desarrollo continuo de la persona y las sociedades" (Delors, 1 996)

Los principios de aprender a conocer, aprender a pensar aprender a vivir juntos, aprender a vivir con los demás y aprender a ser, son señalados por la UNESCO, (1 996) como los pilares de la educación.

Moreno, R, C. manifiesta que "el aprendizaje no sólo es provocado desde la escuela y que, cualquier aprendizaje, por definición, es significativo, porque sino, no se aprendería" Y en el proceso educativo también, "habrá que hablar de enseñanza significativa, esto es, el ajuste entre la lógica de los contenidos y la estructura significativa de los aprendices". Es una función docente el valorar los contenidos con significado para el estudiante y procurar la organización progresiva de los mismos. De ahí la importancia de partir de un diagnóstico que permita determinar los conocimientos previos de los alumnos, porque según Ausubel, "los antecedentes cognoscitivos son básicos " Es en la diversidad de significados y en las experiencias diferentes donde el docente media en tal ajuste.

El nuevo reto para la educación es encontrar significados para compartir. No se trata tanto de enseñar, sino de comunicar, de interactuar, de poner en común, ¿cuántos de nosotros están dispuestos a cambiar nuestro sistema de significados y de representar la realidad por otro sistema distinto?

"En uno de los libros de Donna Ogle (1 987), psicóloga educativa, afirma que la investigación que ha realizado sugiere que "lo que la gente piensa acerca de cómo aprenden los alumnos tiene mucho que ver con lo que se enseña y la forma en que se lo enseña". Es decir, los métodos que utilizamos los profesores, reflejan los supuestos que tenemos sobre el aprendizaje."(Cómo aprenden, Pág.30)

Díaz Barriga, en Durán y Flores, invita a reconstruir el objeto de la evaluación en otra comprensión y dinámica del aprendizaje, se traduce así en la indagación sobre el proceso de aprendizaje de un sujeto o un grupo, indagación que permita detectar las características de este proceso y buscar una explicación a las mismas, rebasando la parcialidad de atender sólo a algunos resultados del aprendizaje. (1984:119)

Desde una perspectiva limitada, la evaluación ha sido considerada como la medida del éxito de la enseñanza o del aprendizaje específico de los alumnos y se ha ignorado el valor de la evaluación de los programas de enseñanza - aprendizaje y de la institución, todos ellos consubstanciales al proceso educativo.

Las definiciones de evaluación, en su mayoría plantean la idea de "juzgar" algo; sin embargo, para poder dar un juicio de valor acertado hay que conocer bien el objeto que se juzga, que es lo que constituyen el proceso educativo. En fin, como señalan Durán y Flores, se trata de reconocer la presencia del valor en el quehacer cotidiano del docente y de la vida institucional, de determinar qué teoría del valor sustentan, explícita o implícitamente los modelos de evaluación vigentes, y desde qué códigos se justifican los discursos evaluativos.

UNESCO define la evaluación como un proceso permanente de análisis y valoración de la práctica educativa, donde se analiza permanentemente todas las acciones para su conducción global y analiza específicamente para realizar correcciones parciales, según sea el caso.

La evaluación de la práctica educativa es una actividad permanentemente integrada al proceso educativo con todos sus componentes, incluye tanto la evaluación de los aprendizajes, donde el educador aplica pruebas, asigna tareas, revisa y califica informes y observa la labor del alumno, como la evaluación del conocimiento y mejora del proceso educativo, en lo referente a profesores, a los métodos de enseñanza, a la institución, contribuyendo de esta forma a una continua mejora de la labor educativo.

En la evaluación está presente la medición, como un proceso de asignación de valores numéricos a las ejecuciones o acontecimientos de una persona, de acuerdo con reglas específicas. La clase de medida que se realiza se determina en parte por el tipo de objetivo que se pretende medir. La medición brinda una información que puede estar basada en normas cuando se compara la puntuación obtenida por una personal con la obtenida por otros individuos, o en criterios, cuando se interpreta la ejecución de una persona comparándola con un criterio de rendimiento conductual específico.

Las necesidades educativas de este tiempo demandan la máxima competencia humana y profesional de las personas a quienes se confía la responsabilidad de orientar la educación, por lo que se requiere de un educador con rasgos de pedagogo, amplia cultura, conocimiento realista y razonable de las personas con que se relaciona, dominar las técnicas más eficaces para el logro de sus objetivos, esto significa que el docente orienta el proceso educativo, con el propósito de que quienes aprendan lo hagan en forma significativa; esto requiere determinar cuales son las necesidades educativas que se deben satisfacer.

Se concibe así, la enseñanza-aprendizaje como un proceso integrado, que permite la interrelación entre los elementos que los integran. Incluye docentes, alumnos, el objeto de aprendizaje, los medios, las condiciones socio-históricas del contexto en que tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje y el producto en diferentes formas de ese proceso.

Los roles del alumno y del docente no son rigurosos y permanentes, sino que quienes intervienen en el proceso pueden intercambiar papeles, según la interrelación que asuma el proceso de enseñanza aprendizaje.

La concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje como una unidad, permite plantear la evaluación como la valoración integral de los resultados obtenidos de la actividad que conjuntamente han realizado los agentes directos del proceso. Así la evaluación del aprovechamiento escolar debe plantearse como un proceso que supone apreciaciones sistemáticas, el uso de diferentes medios que permiten enjuiciar el desarrollo del proceso, calificar el rendimiento individual y valorar el proceso para tomar medidas correctivas.

La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje debe proporcionar una medida que permita cuantificar y valorar las deficiencias de tipo académico y localizar sus causas, para realizar los ajustes en el momento preciso, suministrando al evaluador indicios de la efectividad de los métodos de enseñanza que se emplean, del contenido del curso, de las áreas de difícil aprendizaje que le darán una guía eficaz para la selección de futuras experiencias de aprendizaje.

La experiencia ha demostrado que la evaluación permite:

- Conocer los resultados de la metodología empleada y hacer las correcciones de procedimientos pertinentes.
- Realimentar el mecanismo de aprendizaje buscando y determinando nuevas fuentes de formación e información o reforzando las anteriores para refinar los aciertos y corregir los errores.
- Dirigir y enfocar los esfuerzos hacia los aspectos de mayor importancia o para superar los más débiles.
- Orientar lo referente a las respuestas y tareas.
- Mantener al corriente a los involucrados sobre el grado de avance o nivel de logro personal y grupal para estímulo gratificación y motivación para continuar adelante.
- Reforzar oportunamente las áreas en las cuales el aprendizaje ha sido insuficiente.

Juzga la viabilidad de la metodología y el funcionamiento dadas las condiciones reales de operación.

La evaluación pretende la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje en función de los intereses de los educandos.

En otras palabras, la evaluación formativa es la que facilita en el proceso de enseñanza aprendizaje, la mejora del proceso mismo, en el que pueden estar involucrados profesores y alumnos. A este espacio los constructivistas le llaman la opción de creación de una nueva perspectiva, construida mediante la reflexión de ambos ente. Como lo dice Flores y Reyes (1 997). "La participación, en este contexto, no se limita a la recepción pasiva del conocimiento sistematizado, sino más bien supone la oportunidad y el compromiso de tomar parte en las decisiones y el constituirse en actos y autor del hecho educativo. Esta propuesta es difícil de aplicarla en la vida real del aula, sin embargo, hay que procurar la participación de educandos y educadores en alguna medida, como partes importantes del proceso y con derecho a "construir" una nueva realidad de aprendizaje.

Bajo este concepto de evaluación, cabe destacar la importancia de que los resultados de las mediciones sean analizadas y comentadas con los estudiantes. La revisión y discusión constante que debe darse a lo interno de las cátedras de Matemática en relación con el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje en cuanto al avance en el desarrollo de los temas, las dificultades que surgen en el aula, las limitantes que se tienen durante las prácticas, las oportunidades reales de intercambio de ideas docente-estudiante, el comentario de ítemes de difícil resolución y la realimentación propia del proceso de evaluación que debe propiciarse al realizar los diversos exámenes propuestos. Esta evaluación debe ser generada a lo interno de las cátedras dado que facilita la comunicación, el intercambio de experiencias y el crecimiento profesional ente los docentes.

Justificación.

La Declaración Mundial sobre Educación para Todos, dan al sujeto educativo y a sus aprendizajes, el lugar protagónico del proceso educativo. Esto significa, que el alumno es responsable de su aprendizaje, y el docente actúa como un incentivador y orientador de las capacidades del individuo. Ambos "educador y estudiante constituyen una unidad pedagógica creativa". Los medios que se utilizan en esa relación creativa, deben ser considerados como una instrumentalidad reflexiva, crítica y creativa. En esta perspectiva, son tan o más importante que los resultados, los procesos de aprendizaje. (Arrién y otros, 1 996).

La importancia de los aprendizajes está en la capacidad por aprender y en la pertinencia y relevancia de esos aprendizajes, para lo que se requiere del desarrollo de actividades educativas teórico-prácticas, en las que se use un lenguaje sencillo y comunicativo.

En esta posición la evaluación está determinada por el ritmo y forma del aprendizaje del sujeto, para lo que surgen interrogantes:

¿ qué evaluar del aprendizaje: su pertinencia y su relevancia ?,
¿ cómo evaluar el aprendizaje?,
¿cuándo evaluar el aprendizaje?.

Las respuestas deben considerar que lo importante es comprobar *lo que se ha aprendido para seguir aprendiendo*, y la utilidad de lo aprendido para el desarrollo personal y social. Kolb,D. 1 977, destaca el rol que juega la experiencia en el proceso de aprendizaje, y lo concibe como un ciclo donde la experiencia concreta inmediata, es la base de la observación y la reflexión. Las observaciones se asimilan a una teoría de la que se pueden deducir nuevas situaciones para su aplicación. Las capacidades que necesita el que aprende son:

- capacidad de experiencias concretas (EC),
- observación reflexiva (OR),
- conceptualización abstracta (CA) y
- experimentación activa (EA) .

Estos ciclos facilitan la posibilidad de involucrarse en experiencias nuevas, reflexionar sobre ellas crear conceptos e integrar sus observaciones en teorías lógicamente sólidas para emplearlas en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Vygotky señala que el conocimiento es social y se construye a partir de esfuerzos cooperativos por aprender, comprender y resolver problemas, dentro de la teoría cognitiva. Al fortalecer el trabajo cooperativo en pequeños grupos y fomentar la interacción, donde se brindan ayuda, asistencia mutua e intercambio de recursos, se logra el razonamiento de cada participante y el discernimiento de los problemas propuestos. Todo lo anterior, propicia responsabilidad individual, para lo cual se debe evaluar el aprovechamiento de cada individuo y devolver resultados tanto a la persona como al grupo, esto permite *identificar no solo logros comunes sino quien necesita ayuda.*

La evaluación se debe hacer en forma individual por escrito y también en forma oral, solicitando a alguno de los participantes a exponer lo realizado por el grupo, observar el aporte de cada integrante del grupo y anotar la observación, proponer la coevaluación y solicitar a cada alumno que explique a otro lo aprendido. Debe darse el conocimiento entre los participantes y un ambiente de confianza con una comunicación clara y directa, ayudarse mutuamente y resolver conflictos de manera constructiva (Johnson 1 991 a 1 993; Johnson y F. Johnson 1 994 en Johnson D. Johnson R.J. Johnson H, E. 1 995).

La evaluación de los aprendizajes, implica una propuesta de ejercicios, actividades, preguntas, proyectos relacionados con los temas, en nuestro caso de matemática, que puedan ser objeto de observación, diálogo y revisión tanto de procesos como de resultados, con el fin de determinar lo que realmente saben y pueden hacer los alumnos.

Algunas pautas para el diseño de la evaluación, (Kilpatrick, 1 995):

- Moverse más allá de las jerarquías de las habilidades básicas.
- Ubicar los ejercicios dentro de un contexto.
- Concebir la evaluación como un proceso de comunicación.
- Establecer correspondencia entre la evaluación y el curriculum.
- Asegurar que las pruebas miden lo que es valioso

Los instrumentos de evaluación.

Si se trabaja dentro de una u otra teoría de los aprendizajes, los instrumentos que se utilicen para realizar la evaluación de los mismos, deben ser de tal forma que no se constituyan en distorcionantes de los resultados o en una dificultad en sí mismos para quienes deben de responderlos.

Al diseñar estos instrumentos, es necesario considerar lo que se desea evaluar, que incluye tanto en el contenido como los niveles de dificultad con que se realizaron las diversas actividades de aprendizaje; el tiempo disponible para responderlo, el tipo de preguntas por utilizar que se constituyen en las diferentes *partes del instrumento*. Cada una de las partes debe consignarse con sus respectivas instrucciones y el puntaje asignado para su valoración.
El instrumento de evaluación de los aprendizajes debe concebirse con integralidad y claridad, esto es, ser identificado en cuanto a: la institución, el nivel al que va dirigido, el total de puntos que posee así como la ponderación correspondiente, el tiempo total disponible para su respuesta, las indicaciones generales que faciliten su abordaje. Esta parte constituye el ***encabezado***.

Los instrumentos son tan variados como la creatividad misma del proceso metodológico con que se desarrolla la temática, sin embargo, la dificultad que enfrenta el docente de matemática y la queja escuchada en los alumnos se relaciona en mayor grado con la forma de redactar y valorar las pruebas con preguntas tanto de respuesta corta como de respuesta abierta, esta última involucra el desarrollo de procesos. Esta parte constituye el ***cuerpo*** del instrumento

Los ítemes de respuesta corta.

En el diseño de este tipo de ítemes es importante distinguir la función que cada uno tiene y el nivel de dificultad que valora así como conocer sus características y formas de redacción.

Los ítemes de desarrollo.

La redacción o construcción de los ítemes de respuesta abierta (desarrollo), debe considerar aspectos generales tales como: la metodología utilizada, la temática objeto de evaluación, los diferentes procesos que se promovieron para facilitar el aprendizaje que determinan el nivel de dificultad con que se desarrolla la temática, el lenguaje con que se hizo referencia a esa temática, la forma en que se propusieron los ejemplos y ejercicios, así como la indicación ofrecida para su ejecución y el contexto en que se trabajó cada uno de ellos.

En matemática debemos considerar una particularidad en la redacción de cada ítem, cual es el hecho de que se involucra la dificultad por la comprensión del vocabulario cotidiano y el vocabulario propio de la disciplina.

Objetivos.

- ❖ Ofrecer la oportunidad de explicitar en forma individual y de compartir, las experiencias respecto al diseño de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.
- ❖ Proponer un modelo teórico que permita analizar los ítemes y confrontar la práctica docente.

- Construir ítemes de respuesta corta y de desarrollo de la respuesta, con calidad y características de validez.

Metodología.

Se trata de analizar las deficiencias que ofrecen las preguntas de desarrollo que se utilizan en las pruebas en el nivel secundario y que cada participante al taller construya ítemes de desarrollo acerca de algún tema propio de este nivel, utilizando el modelo propuesto.

Las actividades se ejecutarán a nivel individual y en pequeños grupos, según la dinámica misma de las diversas actividades.

Actividades.

Las actividades que se propician llevan una lógica en el proceso de revisión y análisis de los ítemes, que facilite el trabajo a cada docente, para autoevaluar su creación a la vez que se supera en el diseño de los mismos y permita reflexionar acerca de la importancia que se le concede a la evaluación de los aprendizajes y a los instrumentos utilizados para su valoración.

Modelo Propuesto

Una de las condiciones básicas por considerar lo es la totalidad de los contenidos y procesos o comportamientos que serán objeto de la evaluación, para lo que se debe ir anotando en cada ocasión lo desarrollado durante los encuentros de aprendizaje.

Las sugerencias para la construcción de ítemes de desarrollo son:

Defina claramente sus objetivos:
¿ Para qué esta evaluación ?
¿ Qué deben saber los alumnos ?
¿ Qué refleja acerca de cada estudiante ?

Redacte sus ítemes:
¿ Qué vocabulario se utilizó?
¿ Qué conocimientos previos requiere el ejercicio?
¿ Cuál es el nivel o niveles de dificultad que incluye el ítem?
¿ Cuáles instrucciones debe llevar para su fácil comprensión ?
¿ Requiere de sugerencias para su ejecución?
¿ Qué valor tendrá el proceso, el producto?
¿ Qué puntaje se asigna a cada item?

Desarrolle sus respuestas:
¿ Qué tipo de respuestas pueden darse?
¿Qué dificultades se pueden presentar al desarrollarlo?
¿ Cuáles ajustes haría luego de la aplicación?

Valide los ítemes:

- Esta validación consiste en someter los ítemes a revisión y crítica de algún colega de la disciplina, o de algún especialista en evaluación de la misma institución, previo a la aplicación.
- Analice las observaciones y decida si hace los ajustes.

Referencias bibliográficas.

Armstrong,T. *Inteligencias múltiples en el salón de clases.*A.S.C.D. 1 995.

Arrién ,J.B.; Bernal, J.B.; Ooijens, J; Picón,C ;Thybergin,A.*Calidad de la Educación en el Itsmo Centroamericano.*UNESCO,San José. Costa Rica: 1 996.

Cruz C. *El uso de Estrategias Metacognitivas en la Enseñanza de la Matemática.*Estudios en Educación Matemática N° 1 Santiago -Chile, 1 995.

Durán ,L.J. ,Flores, M. *Problemática del valor en la evaluación curricular* agfund@agfund.nch.edu.bo Pág. 110.

Johnson,D.W.; Johnson R. T.; JohnsonH.E; *Los nuevos círculos de arendizaje. Cooperación en el salón de clases y en la Escuela.*A.S.C.D. 1 995.

Kilpatrick,J. Gómez,P. Rico,L.*Educación Matemática Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas. Evaluación .Historia.* Grupo Editorial Iberoamérica Bogotá: 1 995.

Kolb,D.A.; Rubin, I.M.; McIntyre J.M.*Psicología de las organizaciones; Problemas Contemporáneos.* Prentice Hall Hispanoamericana S A México 1 997.

Moreno R, C. *La evaluación correo electrónico.*

Moreno O. JM, *Los exámenes : Un estudio comparativo.* Fondo de Cultura Económica. Madrid: 1 992.

Santaló,L.A., Llinares,S., Sánchez V,.Taibo C.A. García Hoz R.A., *La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia.* Ediciones Rialp,SA Madrid:1 994.

Curso especial Geometría y resolución de problemas

Dr. Luis Campistrous Pérez
campi@infomed.sld.cu
Dra. Celia Rizo Cabrera
Instituto Central de Ciencias Pedagógicas
Cuba

Los problemas en la escuela

Los problemas han formado parte de la enseñanza de la Matemática desde antes de la existencia de la escuela formal tal y como la conocemos hoy. Por más de 5000 años la "resolución de problemas" ha desempeñado un papel esencial en la Matemática Escolar, en todo este largo período histórico las razones para considerar los problemas en la enseñanza han sido semejantes:

- Desarrollar el pensamiento, en particular la capacidad de resolución de problemas.
- Justificar la importancia de la Matemática y del tema que se desarrolla mostrando su aplicación a diferentes situaciones de la vida o de la técnica.
- Motivar el estudio de un tema sobre la base de presentar problemas que sean capaces de atraer la atención de los alumnos.
- Introducir nuevos contenidos, en particular aquellos que pueden ilustrarse con ciertos "problemas tipo".
- Fijar algunos procedimientos matemáticos que han sido explicados en el aula, preferentemente procedimientos de cálculo.

Como puede apreciarse en esta apretada síntesis de razones, aprender a resolver problemas no ha figurado como una de esas razones. Realmente hay que decir que la creencia predominante durante siglos fue el que se aprende a resolver problemas por imitación, es decir, viendo resolver problemas e imitando las actitudes y el proceder del que resuelve. No puede negarse que esta vía y también la de ensayo y error puede servir a algunas personas para aprender, pero la escuela no está hecha para que algunos aprendan, sino para que todos aprendan y, obviamente, con estos procedimientos no puede lograrse que todos aprendan.

Realmente a lo largo de la historia no ha habido preocupación no sólo por enseñar a resolver problemas, sino ni siquiera por analizar los procedimientos de resolución. Esta regla general tiene muy pocas excepciones, las más ilustres de las cuales son referencia obligada de cualquier recuento de este tipo: Arquímedes, Pappus, Descartes.

La permanencia de estas condiciones ha convertido la resolución de problemas escolares en una actividad que no tiene sentido para el alumno, que no se relaciona con la realidad: un problema con texto es un pretexto para calcular, para cumplir la orden dada por el profesor.

Un hito fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas lo marca el año 1945 con la publicación de la obra **How to solve it?** de George Polya. Con la publicación de esta obra maduran las ideas de este autor que había venido desarrollándolas durante un cuarto de siglo y en ella, por primera vez se ilustra un camino didáctico hacia la enseñanza de la resolución de problemas.

Algunas de las estrategias básicas propuestas por Polya adquirieron gran popularidad en la investigación en Matemática Educativa y en algunos textos de Matemática escolar, lo que creó la imagen de que jugaban un papel fundamental en la clase. Consideradas aisladamente las estrategias de Polya que fueron popularizadas, son realmente fundamentales y funcionan al resolver problemas. Entre ellas podemos encontrar las siguientes:

- **Analizar lo que se da y lo que se busca.**

- **Dibujar una figura.**
- **Separar una condición en partes.**
- **Considerar casos especiales.**
- **Pensar en un problema más simple.**
- **Considerar el problema resuelto.**

Como antes se planteó, el trabajo de Polya está dirigido al profesor y en el subyace la idea de que basta fundamentar la enseñanza de la matemática en estas estrategias para lograr inculcar a los alumnos el "arte de resolver problemas".

Sin embargo, Alan Schöenfeld1 hace notar que existen evidencias empíricas de la dificultad que esto presenta, pues se han hechos numerosos intentos de implementar estas ideas de Polya y los resultados han sido dudosos. El mismo Schöenfeld señala que aunque las estrategias están descritas de modo que quien las utiliza las reconoce fácilmente (lo que explica su acogida entre los matemáticos), no están explicadas en forma de prescripciones que faciliten su utilización a quien no las conoce previamente.

Concepto de problema. Problemas escolares.

Entre los conceptos esenciales que se incluyeron en el estudio se encuentra el de **problema**. En este sentido en la literatura existen diversas acepciones atendiendo a diferentes puntos de vista. En las investigaciones que hemos realizado al respecto se asumió como concepto el que se consideró se ajusta mejor a las concepciones actuales y que responde a nuestras propias concepciones, por lo que aparece recogido en el libro "Aprende a resolver problemas aritméticos" del cual somos autores: **Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación.**

Desde el punto de vista didáctico, la anterior definición es muy importante, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de alumnos hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que la persona requiere para su solución y las motivaciones para realizarla. En ambos casos, lo antes planteado significa que lo que puede ser un problema para una persona puede no serlo para otra, o bien porque ya conozca la vía de solución o porque no esté interesado en resolverlo.

Los rasgos generales del concepto de problema que se asume en este trabajo, en realidad no se hacen muy visibles en los materiales y libros para alumnos y docentes, pues en ellos se utiliza más el concepto clásico de problemas escolares y no al de problema en su acepción más amplia.

Estos problemas escolares tienen características específicas en cuanto a que por lo general son situaciones didácticas que asumen, en mayor o menor grado, una forma problémica cuyo objetivo principal es la fijación o aplicación de los contenidos de una asignatura dada (conceptos, relaciones y procedimientos), y que aparecen regularmente en el contexto de los programas que se quieren trabajar. Estos problemas escolares son tipificados, en mayor o menor medida, y para cuya solución se desarrollan procedimientos más o menos **rutinarios.**

Los procedimientos de solución y, por extensión, los problemas se consideran **rutinarios** cuando en el proceso de resolución se pueden encontrar las vías de solución de una manera directa en el propio contenido de la asignatura que se aborda en la escuela, y en ellos se emplean procedimientos que no llegan a ser propiamente algorítmicos, pero tampoco llegan a ser procedimientos heurísticos de búsqueda abierta, sino de una determinación o selección

[1] Alan H. Schöenfeld. "Una breve y muy sesgada historia de la resolución de problemas" en "Teaching and Learning-a problem solving focus".

entre dos o más rutinas ya preestablecidas que sí son, por lo general, procedimientos algorítmicos o cuasi algorítmicos.

Schöenfeld [2], referido por Santos Trigo[3], ubica este tipo de procedimiento a un nivel táctico y lo separa de las habilidades a escala estratégica. Para él, los de carácter estratégico incluyen decisiones acerca de un plan para resolver un problema y la evolución de éste durante el proceso de solución. Así, cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario generalmente no incluye decisiones estratégicas y el monitoreo o control del proceso se vuelve importante solo cuando hay un error en la implantación de estos procedimientos rutinarios.

Así podríamos citar como ejemplos los clásicos problemas de fracciones o de tanto por ciento, los problemas de demostraciones geométricas de igualdad y semejanza de triángulos o de cálculo de áreas y volúmenes, que se resuelven utilizando el contenido recién tratado en el aula, y que se enfrentan con las armas de que ya se dispone. Para tales "problemas" no se requieren estrategias al estilo de Polya, basta con algunos esquemas de actuación aprendidos en la escuela, muchas veces por ensayo y error, o por imitación de la conducta del profesor.

Si revisamos los libros de texto para los alumnos nos encontramos que la inmensa mayoría de los problemas que se consideran son rutinarios, así tenemos los problemas clásicos de fracciones y tanto por ciento en la escuela primaria, que los alumnos los resuelven desplegando un proceder aprendido casi en forma algorítmica y donde prácticamente no es necesario ningún procedimiento de búsqueda.

Otros ejemplos los encontramos en los problemas de demostración de igualdad y semejanza de triángulos, en los que aparentemente hay una exigencia intelectual elevada pues se trata de "demostraciones" pero que en la práctica sólo es un proceso de búsqueda entre parejas de elementos iguales y arribar a una conclusión completamente estereotipada.

La solución de los problemas que conducen a ecuaciones o a fórmulas son otro ejemplo típico de este proceder rutinario, y lo más lamentable es que después que adquieren estas herramientas tan poderosas las utilizan indiscriminadamente en situaciones que requieren recursos menos potentes para resolverlas.

En relación con estas exigencias que solo conducen a hacer más rutinario el procedimiento de solución de los problemas, en un libro de un autor francés muy reconocido aparece el siguiente problema:

> **Un número de 3 cifras es divisible por 9 y si se invierte el nuevo número es $\frac{36}{47}$ del número original. ¿Cuál es el número?**

En este caso en ese libro se presenta como solución la del sistema indeterminado de ecuaciones lineales.

Es decir, utiliza todo una serie de recursos algebraicos que son muy reconocidos por su potencia pero que su uso indiscriminado ha propiciado procederes completamente rutinarios. En este caso el problema tiene una solución aritmética trivial.

Los procedimientos de solución no rutinarios son entonces aquellos en los que se exige un proceso de búsqueda propiamente heurístico. Quizás no sea fácil encontrar problemas escolares con esas características, pero esa es una tarea importante de la Didáctica de la Matemática.

---

[2] Schöenfeld, A. (1985) Mathematical Problem Solving. New York. Academic Press.

[3] Santos Trigo, Luz Manuel. (1996) Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica.

La Resolución de Problemas como objeto de Enseñanza

La enseñanza de la resolución de problemas es un enfoque del trabajo con problemas que se ha difundido mucho y en la que se trata de desarrollar "estrategias" para resolver problemas. Este enfoque es el que se asumen, además de los trabajos pioneros de Polya, los trabajos de Schöenfeld, que lo ha desarrollado mucho. En el caso de Schöenfeld, su aporte más significativo es que a partir de reconocer las ideas de Polya, las desarrolla y considera cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

- **Dominio del conocimiento o recursos.**
- **Los métodos heurísticos**
- **Las estrategias metacognitivas**.
- **El sistema de creencias**.

Otra figura importante dentro de esta tendencia de enseñar a resolver problemas es la de Miguel de Guzmán, presidente del ICMI y en Cuba podemos mencionar, entre otros, a Alberto Labarrere y a los autores de este trabajo (Campistrous y Rizo), que han complementado el concepto de estrategia con la noción de **técnicas**, elaborado algunas para el nivel inicial y trabajado en la precisión de un procedimiento generalizado de resolución de problemas. Dentro de este último enfoque es que se concibe el trabajo que se presenta en este curso.

La enseñanza-aprendizaje de la matemática en las condiciones de trabajo de un aula

Aunque la escuela no enseñe estrategias para resolver problemas, debido a la naturaleza del pensamiento humano los alumnos desarrollan estrategias personales para enfrentarse a situaciones de resolución de problemas, en particular de problemas escolares. En general, estas estrategias son irreflexivas y sólo en pocos casos son reflexivas.

Entre las estrategias que han sido aisladas y aparecen referidas en la literatura podemos mencionar las siguientes[4]:

1. **Encuentra los números y suma (o resta o multiplica o divide).**
2. **Adivina qué operación debe ser utilizada.**
3. **Mira los números y ellos te dicen qué operación debes usar.**
4. **Trata con todas las operaciones y selecciona la respuesta más razonable.**
5. **Busca las palabras claves y ellas te dicen qué operación usar**.
6. **Decide si el resultado debe ser grande o pequeña según los números dados.**
7. **Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto.**

Las primeras cuatro estrategias no son enseñadas en la escuela y pudieran resultar simpáticas sino fuera por el hecho de que los estudiantes las utilizan frecuentemente y eso es lamentable. Incluso aunque de manera excepcional, hay estudiantes de éxito en matemática que también las emplean. Estas primeras cuatro estrategias son ejemplos de estrategias irreflexivas.

Las estrategias 5 y 6 envuelven por lo menos un mínimo de sentido numérico, un mínimo de procesamiento semántico y una muy mínima comprensión del significado de las operaciones. La estrategia de palabras claves lamentablemente es enseñada ocasionalmente por maestros bien intencionados que no tienen un sentido de sus límites.

En trabajos dirigidos por los autores se han aislado estrategias que aparecen en distintos lugares de México y Cuba y que en algunos casos no se reducen a las mencionadas en la literatura; entre ellas podemos mencionar:

- **Conteo directo de un modelo dado o previa modelación.**
- **Opera con los datos de manera irreflexiva. Escribe números sin análisis previo.**

[4] Ver Larry Sowder " La enseñanza y valoración de la solución de problemas matemáticos" que aparece en los resúmenes del Consejo Nacional de profesores de Matemática (USA 1989)

- **Selecciona la operación cuyo significado es apropiado al texto.**
- **Busca las palabras claves y ellas te dicen qué operación utilizar**.
- **Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual**.
- **Tanteo**.
- **Operar con los números dados en el texto**.
- **Usar números cómodos (o razonables)**.
- **Identificar los significados de las operaciones en el texto del problema**.

Aunque en estos estudios no se incluye el componente de “las creencias” reconocida por Schöenfeld dentro de la conducta ante la solución de problemas, en el empezaron a surgir un grupo de ellas que por su interés las incluimos a continuación:

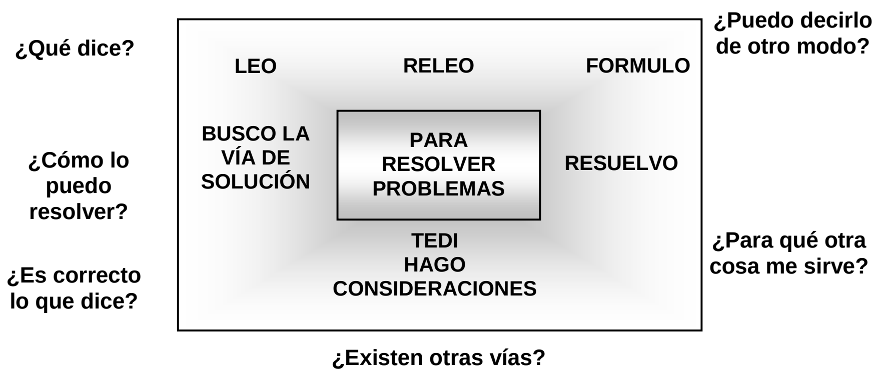
1. **No se puede resolver un problema si no se ha visto antes otro parecido.**
2. **Siempre se busca la manera de dar un resultado.**
3. **Un problema siempre debe conducir a resolver operaciones.**
4. **Los problemas son siempre de lo último que se está dando.**

Una de las peores consecuencias de este uso tradicional de los problemas es lo que ha sido llamado "tendencia ejecutora"[5], esto es, la tendencia de los alumnos a iniciar la resolución de un problema sin realizar una lectura detallada y sin analizar qué estrategia de resolución puede utilizar. Esta tendencia se percibe en el hecho de que los alumnos "buscan" en el texto del problema los números para realizar con ellos cualquier operación, es tan notoria esta forma de actuación que, en ocasiones, combinan los números contenidos en el problema de cualquier forma para obtener una solución. Esta tendencia ejecutora está íntimamente relacionada con la creencia que ha sido aislada en numerosas investigaciones y que se debe a las mismas causas: ***todo problema debe resolverse en 10 min. o es demasiado difícil.***

Un procedimiento generalizado para la solución de problemas

En los trabajos realizados por los autores se ha experimentado con un procedimiento generalizado para la resolución de problemas escolares que trata de contribuir al desarrollo de estrategias reflexivas y limitar la tendencia ejecutora.

La explicación detallada y la ejemplificación del uso de las técnicas consideradas y del empleo del modelo guía aparece en el libro Aprende a Resolver Problemas Aritméticos ya antes referido.



[5] Labarrere Sarduy, Alberto(1987). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela Primaria. Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

La introducción de técnicas simples representa una alternativa para la implementación de las estrategias en la escuela, pero no es la única ni está desarrollada en todo su alcance, realmente este aspecto de la implementación de las estrategias es uno de los campos más fértiles para el trabajo y la investigación muy cerca de la escuela y los maestros.

Sobre Geometría

Como hemos visto para enfrentar la resolución de problemas es necesario disponer de recursos que incluyen conocimientos y habilidades sobre los dominios de la ciencia matemática que se relacionan con los problemas, pero también se necesitan recursos metacognitivos relacionados con la resolución de problemas.

Técnicas

En el trabajo con los problemas geométricos juegan un papel especial algunas estrategias que son de aplicación general. En primer lugar, casi en cada problema geométrico se utilizan varias estrategias de mucha utilidad:

- **Trazar una figura.**
- **Introducir líneas auxiliares.**
- **Analizar la dado y lo buscado.**
- **Separar la condición en partes.**

Estas estrategias (y ocasionalmente algunas otras) serán utilizadas libremente en conjunción con las técnicas que vamos a introducir, pero no se confunden con ellas.

En los problemas que siguen veremos que hay algunos procedimientos de trabajo que se utilizan con frecuencia en la resolución de problemas geométricos y que pueden ser enseñados desde el inicio del estudio de la geometría en forma prescriptiva, es decir, descritos con suficiente detalle como para que los alumnos puedan utilizarlos.

Algunas de estas técnicas son específicas del contenido geométrico:

- **Lugares geométricos.**
- **Áreas.**
- **Transformaciones.**

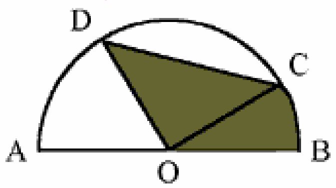
Otras son de alcance más general pero se adaptan muy bien a ciertos problemas geométricos:

- **Modelación algebraica.**
- **Problemas auxiliares.**
- **Probar sistemáticamente.**

Algunos problemas para trabajar en el taller

1) Un rectángulo ABCD tiene 96 cm de perímetro y AB = 3 BC.
En cada vértice se recortó, como muestra la figura, un triángulo rectángulo isósceles de 2 cm de cateto. ¿Cuál es el área de la figura rayada?
2) En el triángulo isósceles ABC (con AB = AC), sean P y Q en AB y AC, respectivamente, tales que PQ es paralelo a BC. La altura desde A intersecta a PQ en O y a BC en M.
Si AP = 64 y, hallar AB.
3) El trapecio ABCD tiene AB paralelo a CD. Sean M el punto medio de la diagonal AC, N el punto medio de la diagonal BD y P el punto medio del lado AB.
Si AB = 15, CD = 24 y la altura del trapecio es h = 14, hallar el área del triángulo MNP.
4) El cuadrado ABCD tiene 10 cm de lado. Se sabe que PC = QD y que el área del triángulo ABP es igual a 7/3 del área del triángulo PCQ.
Calcular el perímetro del cuadrilátero APQD.

5) CD (AB > CD), y de lados no paralelos AD y BC, la bisectriz del ángulo BAD intersecta a la prolongación del lado DC en el punto P de manera tal que 2 PBC + ABC = 180°.
Si AD = 37 y BC = 26, calcular la medida de la base CD.
6) Sea ABC un triángulo rectángulo en A con el cateto AB menor que el cateto AC. Se consideran los puntos M y N de la hipotenusa BC tales que BM = BA y CN = AC. Sean Q el pie de la perpendicular a AB trazada desde N y P el pie de la perpendicular a AC trazada desde M.
Si QN = 7,2, PM = 10,8 y la altura correspondiente a la hipotenusa es h = 21,6, calcular el área del pentágono AQNMP.
7) En la figura:
el arco AB es una semicircunferencia de radio AO; AOD = 2 BOC; CO es perpendicular a DO y el área del triángulo OCD es 50 m2 ¿Cuál es el área de la zona rayada?



8) Se dan dos rectángulos iguales: ABCD y APQR, tales que P está en el interior del rectángulo ABCD y el lado PQ del rectángulo APQR intersecta al lado DC del rectángulo ABCD en el punto E. Si se sabe que AB = CD = AP = QR = 8
AD = BC = AR = PQ = 12
DE = 1
hallar el área de la figura ABCEP.
9) Determinar la longitud del radio de una circunferencia que divide a los lados de un triángulo en partes iguales.
10) En un triángulo se toma un punto k y se trazan rectas paralelas a los lados del triángulo. El triángulo queda dividido en 6 partes de las cuales 3 son triángulos de áreas S1 , S2 y S3. Hallar el área S del triángulo original.
11) Determinar el lugar geométrico de los centros de las cuerdas de igual longitud en una circunferencia.
12) Determinar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes de igual longitud a una circunferencia.
13) La circunferencia es w1 es tangente a la circunferencia w(O. R) y pasa por su centro. Sean los puntos diametrales A, B de w, determinarlos de modo que la suma de tos cuadrados de las tangentes trazadas desde A y B a w1 sea máxima.
14) Encontrar condiciones para que un triángulo sea isósceles en términos demedianas, bisectrices o alturas:
Las alturas tienen igual longitud.
Las bisectrices tienen igual longitud.
15) Dado un cuadrado de lado 1, hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los lados es igual a 4.
16) Dado un "Triángulo curvilíneo" formado por un segmento AB y dos arcos de circunferencia con centro A y B y que pasan por B y A respectivamente, inscribir en él una circunferencia.
17) Dividir un triángulo en dos partes de igual área por una recta paralela a la base.
18) Construir un rectángulo dado un lado y la diagonal.

Referencias bibliográficas

Bazán Z. A., Chalini H.A. Estrategias utilizadas por estudiantes egresados de secundaria en la resolución de problemas matemáticos. Revista Especializada de Educación Pedagogía.

Tercera Época. Vol. 10. Núm. 6. Invierno 1995. México.

Campistrous, L. y Celia Rizo. Aprende a resolver problemas aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1997.

----------------- Los significados de las operaciones y la modelación. Curso Pre-reunión Pedagogía 97. Ciudad Habana 1997

----------------- Algunas técnicas de resolución de problemas aritméticos. Curso Pre-reunión Pedagogía 99. Ciudad Habana 1999.

----------------- El tanteo, ¿técnica de solución o adivinación? Centro de Convenciones Pedagógicas. Ciudad Habana 2000

De Guzmán, M. Gil, P.D. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: tendencias e innovaciones. Madrid. Popular. 1993.

--------------------- Para pensar mejor. Editorial Labor. Barcelona

Gómez Otero, Enrique Javier. Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos en primero y segundo grados de la escuela primaria. Un estudio de casos. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Julio de 1995

Labarrere, A.F. Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1987.

------------------Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. Cuba. 1988

------------------Pensamiento, análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.

Mónaco, Bárbara. S. Aguirre, Ma. Isabel. Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio: un estudio de casos. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero. México. Diciembre de 1995

Santos Trigo, Luz M. La solución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. CINVESTAV-IPN 1994.

----------------------- Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. 1996.

Schöenfeld, A. H. Ideas y tendencias en la resolución de problemas. La enseñanza de las matemáticas a debate. Madrid. España. 1985.

------------- Cuando la buena enseñanza conduce a malos resultados: El desastre de los cursos de matemática “bien enseñados”. Psicólogo educacional. Vol. 23. No.2. Primavera de 1988.

--------------- Ideas y tendencias en la solución de problemas. La enseñanza de la Matemática a debate. Ministerio de Educación y Ciencias. Madrid. 1985-

-------------Aprendiendo a pensar matemáticamente. Libro para investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Mac. Millan. New York. 1992.

Sowder, L. La selección de operaciones en la solución de problemas rutinarios con texto en la enseñanza y valoración de la solución de problemas. National Council of Teachers Mathematics. Vol. 3. USA. 1984.

Valenzuela, G.R. Resolución de problemas matemáticos: un enfoque psicológico. Educación matemática. México. D.F. Vol. 4. No.3. Diciembre de 1992.

"Experiencias en el uso de Derive como apoyo a la Enseñanza de las Matemáticas".

MSc. Marta Fernández Casuso
ISPJAE
Cuba

Resumen

El curso se dirige a profesores de Matemática de la enseñanza media y superior interesados en el uso del Derive y tiene el propósito de propiciar la reflexión sobre el empleo de este asistente como herramienta efectiva en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas incorporando el diseño de situaciones propiamente educativas con propósitos específicos donde el estudiante figure como centro del proceso que le facilite un aprendizaje significativo y transmitir a los participantes un conjunto de informaciones y experiencias en el empleo del Derive que le sirva para el desarrollo de su practica docente.

Actividades (2horas cada una)

1. Análisis critico de la conveniencia del uso de asistentes matemáticos en la enseñanza de la asignatura.
2. Uso del DERIVE en distintos momentos del proceso docente en algunos temas de las asignaturas Matemática I y II para la carrera de Ingeniería
3. -Practicas de algunos laboratorios realizados con el uso del DERIVE

Referencias bibliográficas

Nuevas tecnologías y enseñanza de las Matemáticas. A. García 1995

Tendencias acerca del uso de la computadora en la educación. Mara Felix y otros 1999

La computadora como mediadora educativa. Alberto Minakata 1999

Propuesta de un entorno educativo utilizando la tecnología informática. Mayra Duran. 1999

Perfeccionamiento de la enseñanza del tema Limite de funciones con el uso de un asistente matemático Tesis de Maestría 1998

Prácticas de Matemática con Derive U. P. Madrid, U. P. Valencia

Modelos de Ajuste de Datos.

Antonio R. Quesada
aquesada@uakron.edu
Department of Mathematics & Computer Science
The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4002
USA

Resumen

Los avances y la masificación de ordenadores personales, así como la difusión de los medios de comunicación y del Internet están poniendo a nuestra disposición una avalancha de información que está creciendo exponencialmente. Afortunadamente, tanto los nuevos programas de estadística para ordenadores como las calculadoras modernas permiten almacenar y analizar datos con un mínimo de esfuerzo y de tiempo. Esta situación sugiere la necesidad de equipar a nuestros estudiantes con las herramientas y el conocimiento necesario para llevar a cabo análisis de datos. No es de extrañar, pues, que el ajuste de datos aparezca en recomendaciones curriculares [NCTM, 89], en artículos de divulgación [Quesada & Rosillo, 98], y que haya empezado a aparecer en los libros de texto de reciente publicación [Core-Plus, 97], [Demana & Waits, 97], [North Carolina School of Science and Mathematics, 92], tanto en el ámbito de escuela secundaria e intermedia como en cursos básicos de universidad.

En esta sesión se presentarán modelos lineales y no lineales de ajuste de datos. Primeramente se contrastarán los dos modelos lineales que están disponibles en las calculadoras Texas Instruments. Al mismo tiempo, se demostrará la facilidad con que algunos de los cálculos tradicionales relacionados pueden llevarse a cabo usando la calculadora cuando, por razones pedagógicas, se estime conveniente. Seguidamente se analizarán ejemplos de modelos no lineales de ajuste que las nuevas calculadoras gráficas han hecho accesible en el ámbito de enseñanza intermedia y secundaria.

Inicialmente se usará la calculadora como una "caja negra" que, a partir de un conjunto de datos conocidos, obtiene internamente la ecuación del modelo seleccionado permitiendo pronosticar resultados para valores desconocidos. Si el tiempo lo permite, introduciremos en forma elemental, el análisis de residuos para ayudar a discernir si el ajuste obtenido no es el mejor y si es conveniente explorar la existencia de un mejor modelo de ajuste. Finalmente, y como tema opcional para un buen grupo de estudiantes, la calculadora se usa como una "caja blanca", ilustrándose el mecanismo de reexpresión (que la misma usa internamente), así como otros métodos de obtener modelos de ajuste no lineal.

Una Década de Investigación en Algunos Temas de Matemáticas Avanzadas

Ed Dubinsky, edd@zeus.cs.gsu.edu
Georgia State University
USA

1 Introducción

Buenos días. Me gusta mucho estar aquí otra vez. No es la primera vez y ojalá que no sea la última.

Perdónenme que hable en mi pobre español pero es la única manera para que aprenda a hablar. Tengo todas mis conferencias escritas y podría leerlas, pero prefiero tratar de hablar un poco sin leer. Quizás al fin de este curso podré hablar mejor que ahora. En todo caso, este curso tiene dos metas mientras que ustedes aprenden acerca de mis investigaciones en matemática educativa, yo aprendo a hablar español. Gracias por la oportunidad.

1.1 Las investigaciones

En este curso, quiero describir algunas investigaciones acerca de cómo los estudiantes podrían aprender varios conceptos matemáticos al nivel universitario. Estas investigaciones se condujeron en un paradigma especifico y se llevaron a cabo en los diez últimos años de 1987 a 1998. Se hicieron por los miembros del grupo RUMEC que quiere decir: Comunidad para la investigación en matemática educativa universitaria.

Los temas matemáticos específicos tratados se concentran en tres asignaturas: matemática discreta, cálculo, y álgebra abstracta. Las investigaciones resultaron en algunos artículos.

1.2 Resumen del curso

El mensaje principal de este curso es que un marco teórico específico conduce la investigación que ésta sugiere una acercamiento pedagógico y que de ella surgen datos acerca de la forma de a prender de los estudiantes. Estos datos interactúan con el marco teórico y el proceso total se repite.

En estas conferencias, quiero describir este paradigma en detalle y dar unos resultados de su aplicación.

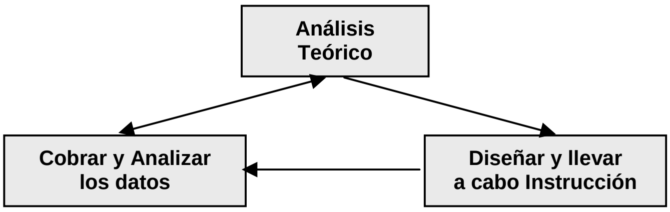
Comenzaré ahora con una descripción del paradigma de conjunto detrás de este trabajo. Este paradigma combina el análisis teórico, la enseñanza usando pedagogía basada en dicho análisis, la colección de datos cuando los estudiantes pasan por dicho proceso de enseñanza, y el análisis de dichos datos tomando en cuenta el marco teórico. Después de este panorama discutiré más detalladamente la teoría APOS que es nuestro marco teórico y el ciclo ACE que es nuestro acercamiento pedagógico.

Con esta base describiré como usamos nuestro paradigma en tres investigaciones grandes: las matemáticas discretas, el cálculo y la álgebra abstracta. Para cada una, daré una lista de los temas específicos, describiré a los estudiantes que hemos estudiado, presentaré las descomposiciones genéticas preliminares de dichos temas, esbozaré los métodos de instrucción usando las actividades en la computadora y enseñanza cooperativa, y los resultados de estos experimentos educativos. El último incluye las descomposiciones genéticas revisadas tomando en cuenta, el análisis de los datos y una indicación de qué también los estudiantes aprendían las matemáticas.

Finalmente, daré algunas ideas para futuras investigaciones.

2 El Paradigma

Quiero comenzar con una descripción global de nuestra manera de trabajar.



DIMENSIONES
Cognoscitivo
Social
Afectivo

PARADIGMA

En este paradigma el análisis teórico propone las construcciones mentales especificas para construir un entendimiento del tema del que se trata.

Después hay que diseñar e implementar la instrucción que se enfoca sobre como ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones que se propusieron en el análisis teórico.

Después, observamos a los estudiantes aun cuando trabajan en los problemas matemáticos. Usamos en ambos casos, métodos experimentales cuantitativos y cualitativos.

Finalmente, el análisis de los datos se relaciona con el análisis teórico y con las observaciones en dos direcciones: el análisis teórico nos dice cuales preguntas debemos hacer acerca de los datos para determinar si los estudiantes han hecho las construcciones deseadas y las respuestas de dichas preguntas nos dicen si el análisis teórico corresponde bien con el desarrollo cognitivo de los estudiantes. A partir de los resultados de este análisis, podría necesitarse revisar la instrucción para lograr las construcciones, o revisar el análisis teórico o ambos. En todo caso, repetimos este ciclo hasta que estamos satisfechos con los resultados de las construcciones.

Por supuesto, también usamos los datos en cada ciclo para decidir si los estudiantes aprendieron las ideas matemáticas en las que estamos interesados. Después de algún tiempo lo deseable es que la situación se estabilice y no haya que cambiar mucho la instrucción.

Tenemos que discutir cada uno de las tres componentes de este paradigma. Voy a considerar el análisis teórico en general ahora, los métodos pedagógicos en la siguiente y las observaciones y los análisis de los datos en el resto del curso.

3. Marco Teórico - APOS

Nuestro marco teórico es constructivista. Tenemos una hipótesis acerca de la naturaleza de la matemática y un conjunto de mecanismos para hacer las construcciones mentales mediante las cuales un individuo puede desarrollar su entendimiento matemático.

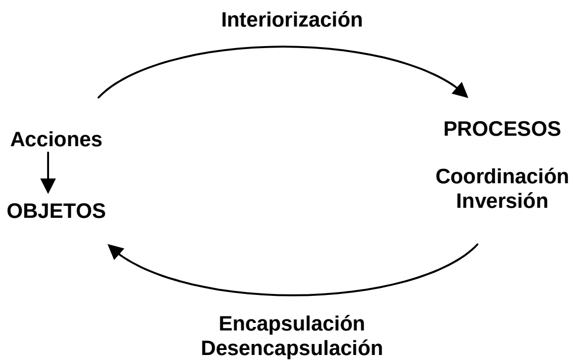
3.1 La naturaleza del conocimiento matemático

Aquí están nuestra hipótesis acerca de la naturaleza de la matemática y como se la puede desarrollar en un individuo.

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos, y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones.

Por supuesto, muchas de las frases en esta declaración plantean preguntas importantes y requieren más explicación, pero voy a quedarme con las construcciones.

3.2 Las construcciones



Las Acciones.
Una transformación se considera una acción cuando es una reacción a estímulos que el sujeto percibe como externos. La acción tiende a controlar al individuo.

Los Procesos
Por medio de la reflexión, un individuo puede transformar una acción en un proceso interno que ejecuta la misma función que la acción, pero se percibe como interno. El individuo puede establecer control sobre un proceso y considerarlo sin la necesidad ejecutarlo explícitamente.

Los Objetos
Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso especifico, le toma conciencia como una totalidad, se da cuenta de las transformaciones (ya sea de las acciones o de los procesos) que pueden operar sobre él, y cuando el individuo puede en efecto construir dichas transformaciones entonces está pensado en este proceso como un objeto.

En el concepto de función por ejemplo un entendimiento al nivel de acción, se da cuando el individuo requiere una expresión explicita en la que, dado un número, la expresión de la función dirige externamente el cálculo de otro número.

Al nivel de *proceso* para el concepto de función, el individuo tiene que pensar acerca de algo (un número u otra cosa) de tal forma que al hacer una transformación resulte otro número u otra cosa.

Si el individuo, entiende las funciones como *objetos,* entonces puede considerar conjuntos de funciones y operaciones aritméticas sobre ellas.

Finalmente un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que un individuo tiene para un concepto particular. Esta colección es coherente en el sentido que el individuo entiende, explícitamente o no, cuales acciones, procesos, objetos y esquemas pertenecen a dicho esquema actual o potencialmente.

Yo conjeturo que casi todos, si no todos, los conceptos matemáticos se pueden describir usando acciones, procesos, objetos y esquemas. Además, hay algunas evidencias de que existen acercamientos pedagógicos basados en estas descripciones que producen resultados positivos respecto al aprendizaje.

En algunos casos, es posible describir gráficamente esta colección, es decir una descomposición genética de un concepto.

4. El ciclo ACE

La instrucción para hacer las construcciones mentales se organiza en la estructura siguiente:

Actividades:

- Actividades con la computadora.
- Construcciones especificas mentales propuestas por la investigación.
- Hacer concretas las ideas abstractas.

Clase:

- Actividades en grupos cooperativos.
- Discusión y reflexión.
- Explicaciones.

Ejercicios:

- Reforzamiento.

El propósito principal de las actividades de computadora es que los estudiantes hagan las construcciones mentales que el análisis teórico propone.

En clase, mediante otras actividades a mano, los estudiantes hacen construcciones mentales adicionales y lo más importante hacen conexiones entre las construcciones mentales (hechas por computadora y a mano) y los conceptos matemáticos.

Al final, mediante los ejercicios que son bastante tradicionales, los estudiantes refuerzan dichos conceptos matemáticos y los aplican a varios problemas dentro y fuera del campo de la matemática. Déjenme discutir un poco más este sistema de instrucción y los tres componentes.

4.1 Actividades

En un laboratorio de computadora, los estudiantes trabajan, en grupos cooperativos sobre la computadora en las actividades como la siguiente: Esta actividad se hace antes de alguna explicación del maestro y tiene como meta que los estudiantes hagan varias construcciones mentales. Nuestra conjetura es que si un individuo hace unas construcciones por computadoras, entonces hará ciertas construcciones mentales, conscientemente o no. El punto estratégico, para el cual se diseña la instrucción, es escoger las actividades por computadoras que conducirán a las construcciones mentales apropiadas para el tema matemático de que se trata.

4.2 La clase

En clase, los estudiantes trabajan en grupos en actividades sin computadora. Después de que los estudiantes trabajan en dichas actividades, hay una discusión entre los estudiantes y el maestro. Si es necesario, el maestro da un explicación, *después de la discusión,* de las ideas que tienen que ver con el concepto de la cuantificación.

4.3 Los ejercicios

Después de que los estudiantes tienen la posibilidad de aprender el concepto, hacen ejercicios para reforzarlo. Estos ejercicios son muy tradicionales y normales. Los estudiantes los hacen generalmente sin ayuda de la computadora.

Referencias bibliográficas

M Asiala., A. Brown, J. Kleiman, D. Mathews. The Development of Student's Understanding of Permutations and Symmetries, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, pp. 13-43, 1998.

M. Asiala, A. Brown, D. DeVies, E. Dubinsky. C. Hemenway, D. Mathews. S. Mories, A. Oktac, D. St. Join, K. Thomas, G. Tolias and R_ Vakil. Three papers on learning abstract algebra, Journal of Mathematical Behavior 16,4, 1997

M. Asiala, N. Brown, D. DeVies, E. Dubinsky, D. Mathews and K. Thomas. A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education, Research in Collegiate Mathematics Education 11, CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1996. pp. 1-32.

M. Asiala, J. Cottrill., E. Dubinsky, K. Schwingendorf. The Development of Student's Graphical Understanding of The Derivative, Journal of Mathematical Behavior, 16, 4, 1997.

D. Breidenbach, J. Hawks. E. Dubinsky and D. Nichols. Development of the Process Conception of Function, Educational Studies in Mathematics, 23 (1992), 247-285.

J. NI. Clark, F. Cordero. J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. Tohn, G. Tolias and D. Vidalkovic. Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule, Journal of Mathematical Behavior, 16, 1997, 345-364.

J. M Clark and D. Mathews. Successful Students' Conceptions of ¡\lean, Standard Deviation and the Central Limit Theorem, preprint

J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols. K. Schwingendorf, K. Thomas and D. Vidalcovic. Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. Journal of Mathematical Behavior, 15, 2 (1996) pp. 167-192.

E. Dubinsky, On Teaching Mathematical Induction 1. Journal of Mathematical Behavior, 6(1) (1987), 305-317.

E. Dubinsky On Teaching Mathematical Induction 11. Journal of Mathematical Behavior, 8 9 (1989), 285-304.

E. Dubinsky, Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in Advanced Mathematical Thinking (D. Tall, ed.), Kluwer (1991), 95-126.

E. Dubinsky, ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics, Comm. lit Pure and Appl. Math., 48, 1995. pp. 1-25.

E. Dubinsky, On Learning Quantification, Journal of Computers in Mathematics and Science

Teaching, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 16(2/3) (1997) 335-362.

E. Dubinsky, F. Elterman and C. Gong. The Student's Construction of Quantification, For the Learning of Mathematics, (1989).

E. Dubinsky and D. Mathews. Una Aplicación De La Perspectiva Piagetiana A La Educación Matemática Post-Secundaria, Educación Matemática 3, 8, 1996.

U. Leron and E. Dubinsky. An Abstract Algebra Story, American Mathematical Monthly, 102, 3, March 1995, pp. 227-242.

D. Mathews, M. A. McDonald and K. Strobel. Understanding Sequences: A Tale of Two Objects, Research in Collegiate Mathematics Education, 4, to appear.

K. E. Schwingendorf and G. P. McCabe. A Longitudinal Study of the C.

Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza - aprendizaje

Luisa Ruiz Higueras[6]
lruiz@ujaen.es
Área de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Jaén
España

Nunca exageramos cuando insistimos en la importancia del análisis didáctico para el ejercicio de la profesión de maestro ... Constituye verdaderamente el corazón de su formación profesional. (Chevallard, 1992, p. 11)

Introducción.

El trabajo que desarrollaremos en este curso persigue un objetivo que consideramos fundamental en la formación del profesorado: analizar y construir situaciones de enseñanza-aprendizaje, fruto de un proceso de *ingeniería didáctica,* de tal forma que los alumnos gestionen con sentido el *conocimiento matemático*, consiguiendo que sea un conocimiento *vivo* (susceptible de evolucionar) y *funcional* (que permita resolver problemas).

La construcción de propuestas curriculares precisa de un análisis didáctico para el que necesitamos poner en funcionamiento elementos de didáctica de la matemática, tales como: modelos de aprendizaje, variables didácticas, tipos de estrategias de los alumnos, obstáculos epistemológicos y didácticos, etc., a los que, en este curso, nos aproximaremos brevemente.

Ingeniería didáctica

Se denomina ingeniería didáctica (Artigue, 1989, 1996) a una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

Es importante señalar que el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas bajo un doble aspecto: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

En este trabajo nos vamos a situar bajo el segundo aspecto. En este sentido, el término *ingeniería didáctica*, según Douady (1996), designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero*, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De este modo, *la ingeniería didáctica es a la vez, un* ***producto****, resultante de un análisis a priori, y un* ***proceso*** *en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase.* (Douady, 1996, p. 61)

Artigue (1996) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

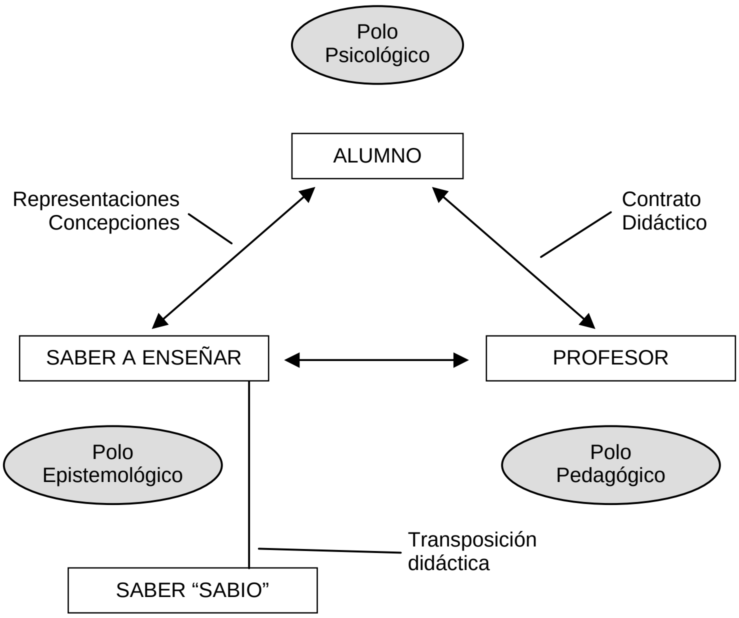
- <u>dimensión epistemológica</u>: asociada a las características del saber matemático puesto en funcionamiento.

[6] e-mail*: lruiz@ujaen.es*

- dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.

- dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

Esta clasificación está en consonancia con la perspectiva sistémica que considera a la didáctica de las matemáticas como el *estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto* (Brousseau, 1998, p.88), según se muestra en el esquema siguiente:



Ingeniería didáctica y constructivismo

En los últimos años hemos estado inmersos en el desarrollo y aplicación de la teoría constructivista, de una parte, como procedimiento cognitivo y, de otra, como estrategia metódica en la enseñanza de las matemáticas. En todo su desarrollo existe una idea fundamental que la preside: Aprender matemáticas significa construir matemáticas. Las hipótesis sobre las que se apoya esta teoría, extraídas de la psicología genética y de la psicología social, las podemos resumir:

- **1ª hipótesis:** *El aprendizaje se apoya en la acción*. Idea fundamental en la obra de Piaget.

  Es de la acción de la que procede el pensamiento en su mecanismo esencial, que es el sistema de operaciones lógicas y matemáticas, y es el análisis de las acciones elementales y de su interiorización o mentalización progresivas el que nos revelará el secreto de la génesis de estas nociones. (Piaget, 1973, p. 26).

En el caso de las matemáticas, el término "acción" se utiliza en el sentido de "resolver problemas", y no únicamente como acción realizada sobre objetos.

- **2ª hipótesis:** La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. Se trata de la teoría de la equilibración de Piaget.

Desde la perspectiva de la equilibración una de las fuentes del progreso en el desarrollo de los conocimientos es buscar en los desequilibrios como tales, lo que obliga al sujeto a pasar de su estado actual para tratar de buscar en cualquier otra dirección nueva. (Piaget, 1975, p. 17)

El aprendizaje, pues, no se reduce a una simple memorización, a una yuxtaposición de "saber-hacer" o a un condicionamiento.

- **3ª hipótesis:** Los aprendizajes previos de los alumnos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: *Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.* Se trata de una idea fundamental de la epistemología de Bachelard (1986) sobre el conocimiento científico, tomada por Brousseau para explicar la formación de **obstáculos** en el aprendizaje de la Matemática.: *la utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte del acto de aprender* (Brousseau, 1990, p.6).

Debemos admitir que el aprendizaje se ha de realizar mediante la modificación de conocimientos anteriores que, en un determinado momento, se revelan falsos e inadecuados, es decir, mediante la superación de obstáculos que no siempre han de ser de tipo cognitivo, sino de tipo didáctico, es decir, debidos a la enseñanza recibida.

- **4ª hipótesis:** *Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos*. Idea básica de la psicología social genética representada por trabajos de la escuela de Ginebra tales como Mungny (1986), Shubauer-Leoni, Perret-Clermont y Brun (1986), o Laborde (1988).

Esta concepción *"constructivista"* del aprendizaje se opone a una concepción muy extendida entre los profesores de matemáticas y, en general, en toda la comunidad educativa, y que Piaget denominaba *"empirista".*

Un modelo de aprendizaje constructivista: El aprendizaje por adaptación al medio.

Brousseau (1986) entiende el aprendizaje por adaptación del siguiente modo:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.49).

Esta concepción del aprendizaje, según Margolinas (1993), está en muchos aspectos muy próxima a la de Piaget: el alumno *construye* su propio conocimiento y *actúa* en un **medio** fuente de *desequilibrios*. Así, la constitución y organización de este **medio** es el objeto principal de una enseñanza que quiera provocar un aprendizaje por adaptación.

Precisamente la teoría de situaciones de Brousseau (1986, 1998) trata de aproximarse, bajo un modelo teórico, al problema del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de adaptación al medio. Por ello, proporciona herramientas muy potentes para interpretar los fenómenos específicos que se producen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

Desde esta concepción del aprendizaje, tiene una particular importancia para la didáctica de la matemática, la elaboración y el estudio del **medio,** de las situaciones que debemos proponer a los alumnos, que ellos puedan *"vivir"* y en las cuales los conocimientos matemáticos deberán aparecer como la solución óptima a los problemas propuestos. Serán situaciones donde el alumno desarrolle un trabajo intelectual comparable, en algunos momentos, a la actividad científica, es decir, donde actúe, formule, pruebe y construya modelos de lenguaje, conceptos y teorías que intercambie con los demás, donde reconozca aquellos que están conformes a la cultura y donde recoja aquellos que le son útiles y pertinentes.

> *En la didáctica actual, la enseñanza es la devolución a un alumno de una situación a-didáctica*[7] *correcta, el aprendizaje es una adaptación a esta situación.* (Brousseau, 1998, p. 60).

Ingeniería didáctica y gestión de las variables didácticas en situaciones de enseñanza - aprendizaje.

Los profesores, para provocar el aprendizaje deseado en los alumnos, necesitarán diseñar situaciones de enseñanza a través de procesos de *ingeniería didáctica*. Para ello, han de controlar y gestionar las variables didácticas ligadas a toda situación de enseñanza, ya que éstas condicionan y organizan los aprendizajes de los alumnos.

La noción de variable didáctica

Bajo el modelo constructivista, según hemos visto anteriormente, se considera que el alumno "aprende" cuando modifica él mismo su relación al conocimiento, adaptándose a las situaciones-problema que le son presentadas por el profesor. Entre las elecciones que el profesor lleva a cabo en las situaciones de enseñanza, algunas de ellas van a ser fundamentales por la significación de los conocimientos matemáticos que espera que el alumno aprenda. Estas elecciones fundamentales se denominan *variables didácticas.*

> *Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.).* (Brïand, 1996, p. 68)

No podemos considerar que "todo" sea variable didáctica en una situación. Una variable didáctica es un elemento de la situación tal que, si actuamos sobre él, podemos provocar adaptaciones y aprendizajes.

> *Sólo las modificaciones que afectan a la jerarquía de las estrategias las podemos considerar como variables pertinentes, aquellas que puede manipular un profesor son particularmente interesantes: estas son las variables didácticas.* (Brousseau, 1982)

La edad de los alumnos, sus conocimientos anteriores, por ejemplo, juegan un papel importante en la correcta resolución de una situación. El maestro no puede, en el momento en el que construye la situación, modificarlos. No se consideran variables didácticas de la situación.

Podemos describir el funcionamiento de las situaciones de enseñanza como el de un sistema que depende de elecciones y que está, a su vez, sometido a las restricciones que le impone el sistema didáctico. *La didáctica se interesa por las perturbaciones provocadas deliberadamente en un determinado* ***medio*** *con la intención de suscitar un aprendizaje*. (Balacheff, 1996, p. 219).

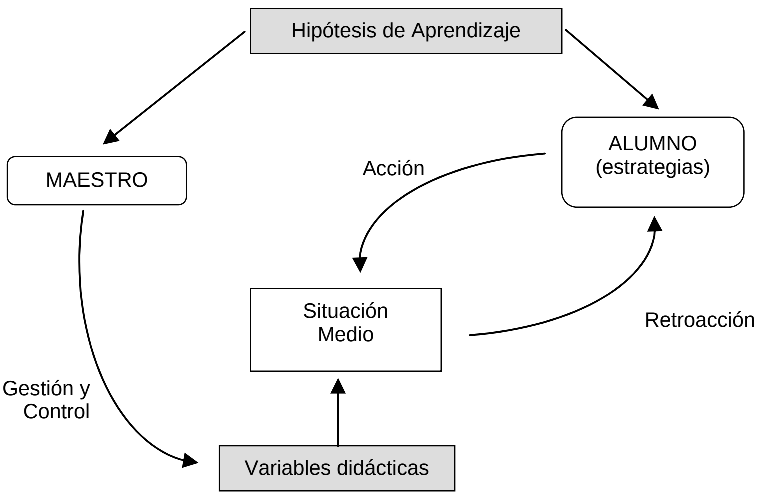
Así pues, se considera necesario conocer, tanto las restricciones como las posibles elecciones, y, además, detectar lo que estas elecciones provocan en el aprendizaje de los alumnos, desde el punto de vista del sentido, es decir, de las diferentes significaciones de las nociones enseñadas. (Laborde, 1989)

La construcción de situaciones de enseñanza-aprendizaje en las que se determinen variables didácticas que, controladas por el profesor, permitan a los alumnos realizar

[7] Una situación es *didáctica* cuando un individuo (en general, el profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (en general, un alumno) un saber dado. Se llama situación *a-didáctica* a aquella parte de una situación didáctica en la que la intención del enseñante no es explícita para el alumno. (Briand, 1996, p. 27)

elecciones y anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones, comunicaciones, etc. que, posteriormente, puedan probar y validar, es una tarea compleja, fruto de un serio análisis didáctico y de una elaborada ingeniería didáctica.

En el esquema siguiente se muestra la conexión que debe existir entre las hipótesis de aprendizaje adoptadas por el maestro y la gestión que ha de ejercer sobre las variables didácticas de una situación de enseñanza.



Variables didácticas y "reglas de acción" de los alumnos

Uno de los objetos teóricos construidos por los investigadores en didáctica para dar cuenta del funcionamiento del conocimiento de los alumnos es el de "regla de acción". Se trata de un modelo que permite describir y explicar las acciones o estrategias del alumno ante la resolución de un problema: decimos que su acción está conforme a dicha regla. Cada regla de acción tiene un dominio de aplicación (el conjunto de situaciones en las que permite suministrar un resultado) y un dominio de validez (conjunto de situaciones en las que produce resultados matemáticos correctos).

La noción de procedimiento nos sirve para describir aquello que hacemos para resolver un problema (cómo procedemos), permitiéndonos tener en cuenta no sólo los cálculos, las operaciones o los esquemas realizados sino también las ideas subyacentes que los sostienen.

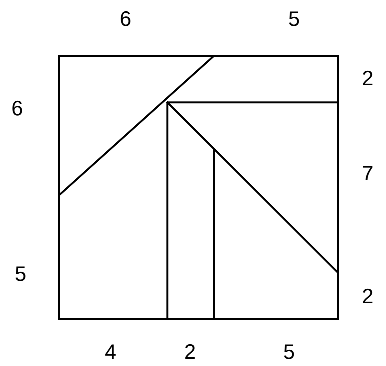
Los alumnos, en el curso de sus aprendizajes, y a través de los problemas que resuelven, van desarrollando procedimientos que se muestran como una serie de reglas que aplican porque les parecen pertinentes para el problema propuesto. A veces, estas reglas no han sido necesariamente enseñadas en la clase por el profesor.

El análisis de los procedimientos o *reglas de acción* nos facilita a los profesores observar la evolución de los aprendizajes de los alumnos y nos muestra la gran variedad de caminos, de razonamientos y de modos de pensar que ponen en funcionamiento en la búsqueda de una solución. Esto nos permite conocer *dónde están los alumnos* en la compresión de una determinada noción. Aquí es donde el análisis didáctico, en términos de procedimientos, adquiere su verdadero sentido: evita que el profesor se "encierre" en una única forma de concebir la solución de un problema (*"Si aplica bien el método que le he explicado, lo habrá entendido, si no, no lo aprenderá correctamente")*

El error de un alumno puede interpretarse como una aplicación de una regla de acción fuera de su dominio de validez. El error es, por lo tanto, un medio para comprender los conocimientos de los alumnos y sus límites.

Veamos un caso particular[8] de situación problema en las que determinaremos sus variables didácticas y analizaremos las posibles reglas de acción, o estrategias de solución, que los alumnos pueden poner en funcionamiento.

Ejemplo: Ampliación de un puzzle[9]



El problema que se propone a los alumnos consiste en fabricar puzzles semejantes a uno dado, respetando la consigna siguiente: el segmento que mide 4 cm en el modelo deberá medir 7 cm en su reproducción. Es necesario reconstruir entre todos los miembros de un grupo el puzzle. Cada alumno del grupo debe hacer una o dos piezas. Los niños se dividen en equipos de 4 o 5. Después de una breve discusión del equipo, se separan y comienzan a construir individualmente sus piezas.

Los trabajos de Brousseau (1987, 1998) han puesto en evidencia que la mayoría de los alumnos sigue uno de los dos procedimientos (o reglas de acción) siguientes:

- **Procedimiento 1:** “Añadir 3 a todas las dimensiones”

Tras la ejecución de este procedimiento existe una retroacción del medio material: las piezas no se acoplan y esto se manifiesta de un modo perceptivamente evidente ante los alumnos. El dominio de validez de este procedimiento es el conjunto de puzzles en los que todas las piezas estén compuestas por segmentos de medida 4 cm.

- **Procedimiento 2:** “Multiplicar cada medida por 2 y añadir 1”

También existe una retroacción del medio material: las piezas del puzzle no se acoplan , pero puede que sea discutible en el plano perceptivo. Los alumnos pueden pensar que los errores en el ajuste de las piezas son debidos a sus imprecisiones en el recorte. Puede ser necesario recurrir a una retroacción de otro tipo.

El sentido con el que, normalmente, los alumnos han aprendido la multiplicación de un entero por otro entero es el de la adición reiterada. El sentido de la multiplicación de un entero

---

[8] En el desarrollo del curso se trabajaron diversos ejemplos que, por las limitaciones impuestas a la publicación, hemos debido reducir.

[9] Este ejemplo está basado en el trabajo de Brousseau (1987)

por un racional deben construirlo en contra este sentido primero (ya que, según la progresión escolar de los conocimientos, se construyen los enteros antes que los racionales).

El objetivo de la situación del puzzle es que los alumnos rechacen explícitamente los procedimientos que hagan intervenir los enteros y construyan, al menos, implícitamente una nueva regla de acción que la podemos formular así:

"si $a + b = c$ en el puzzle inicial, entonces $f(a + b) = f(a) + f(b)$ en el puzzle ampliado"

El rechazo del modelo aditivo se convierte entonces en constitutivo del sentido de la multiplicación por un racional. Pero una condición necesaria para ello es que las elecciones hechas por el profesor de la razón de ampliación (en este caso 7/4) invaliden los procedimientos del tipo "adición reiterada".

La variable V = (n, p), donde n y p son los números que definen la razón de proporcionalidad (p/n), permite definir varias clases de situaciones fundamentales diferentes:

- Si **p** es múltiplo de **n**, por ejemplo el par (4, 8), el alumno se queda en el modelo aditivo y los números con los que trabajará serán enteros (ya que resolverá el problema calculando "el doble" de las longitudes de todas las piezas)
- Si p/n es racional, por ejemplo, el par (4, 7), hay un salto, pues la relación anterior no es posible. Estamos obligados a prescindir de "lo aditivo" y de los números enteros.

Los valores de V= (n, p) ponen en juego el sentido de la multiplicación de un entero por un racional. La gestión que de ellos haga el profesor en la situación, va a permitir al alumno el paso de la multiplicación de un entero por un entero (modelo aditivo, adición reiterada) a la multiplicación de un entero por un racional (modelo multiplicativo, imagen por una aplicación lineal).

Condiciones de las situaciones-problema.

La resolución de problemas juega una función primordial en el aprendizaje matemático. Ahora bien, según sean las etapas por las que discurra dicho aprendizaje, así deben cumplir los problemas funciones esencialmente diferentes:

- Favorecer la construcción de conocimientos nuevos.
- Suministrar ocasiones de empleo de conocimientos anteriores, seleccionando, de este modo, su dominio de eficacidad y de validez.

Situándonos en el primer caso y aceptando las hipótesis de aprendizaje "por adaptación" para la construcción de los conocimientos matemáticos, las situaciones problema deben cumplir ciertas condiciones:

- ✓ Es necesario proponer un problema (o una cuestión), en el cual, la respuesta que inicialmente el alumno pueda dar, no se base en el conocimiento que queremos enseñarle: si fuera necesario poseer este conocimiento para darle solución, esta no sería una situación de construcción de un conocimiento (sería de aplicación de un conocimiento anterior).
- ✓ La respuesta inicial que dé el alumno debe permitirle *"poner en acción"* una estrategia de base, con ayuda de otros conocimientos que él ya posee. Es preciso, a continuación, mediante cambios en la situación, provocar que esa estrategia de base se revele insuficiente o ineficaz para dar solución al problema propuesto; así, el alumno estará obligado a hacer diferentes *acomodaciones* a la situación propuesta. La manipulación, por parte del profesor, de las *variables didácticas* de la situación es indispensable para producir, no sólo los comportamientos esperados en el alumno, sino las significaciones adecuadas del conocimiento matemático.
- ✓ Las situaciones que planteemos en las aulas de Educación Secundaria deben dar lugar a unos modelos de acción en los alumnos, que no se correspondan con el modelo terminal,

sino que sean susceptibles de ser aceptados o rechazados, en la medida que sean más o menos adaptados a la solución de la situación. Así, podrán partir de un modelo de resolución simple A_1 que, aunque sea pesado y costoso, tenga sentido para ellos. A continuación, mediante el cambio de ciertas variables didácticas, debemos llevarlos a concebir otro modelo A_2, más económico y mejor adaptado a la situación que el precedente.

- ✓ La aproximación a la génesis epistemológica del saber matemático es fundamental para **dotar de sentido** a los **conocimientos matemáticos escolares**. Por ello, buscamos que las nociones matemáticas aparezcan como herramientas pertinentes para resolver problemas (*"funcionando"*), esto permitirá a los alumnos construir su sentido. Después, estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas, como objetos de la matemática. Es la llamada *"dialéctica útil-objeto[10]".*
- ✓ La situación-problema debe ser rica, la red de conocimientos implicados deber ser importante, pero no excesiva para que el alumno pueda gestionar adecuadamente esta complejidad. Debe, además, ser lo suficientemente abierta para que el alumno pueda incluso plantearse cuestiones no formuladas en un principio y utilizar procedimientos diversos.

La construcción y gestión en la clase de situaciones-problema es fundamental para conducir los aprendizajes de los alumnos a partir de una hipótesis de adaptación al medio, pero su elaboración exige una preparación seria y un análisis riguroso, a veces, supone el trabajo de años de búsqueda e investigación. No obstante, sin pretender ser totalmente exhaustivos, el tratar de dar respuesta a una serie de cuestiones organizadas sistemáticamente, como las que se presentan en el anexo, puede servir de gran ayuda.

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. (1991) Epistemologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10.2.3, 241-286.

ARTIGUE, M., DOUADY, R. (1996). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

BALACHEFF, N. (1996) Conception, propieté du système sujet/milieu. En R. Noirfalise y M.J. Perrin (Ed.) *Actes de l'École d'Étè, 1995,* 215 - 230. DIDIREM – Université de París VII.

BRIAND, J., CHEVALIER M. C.(1996) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des Mathématiques.* Paris: Hatier.

BROUSSEAU, G. (1982) *Les objets de la Didactique des Mathématiques.* 2 éme École d'Étè sur la Didactque des Mathématiques. Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 2, 165-198.*

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, p. 33-115. Grenoble: La Penseé Sauvage.

BROUSSEAU, G, BROUSSEAU, N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Bordeaux: IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1990) Utilidad e interés de la Didáctica de la Matemática para un profesor (Primera parte). *SUMA: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática,* 4, 5-12. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

[10] Douady (1984) establece la existencia de una *"dialéctica útil-objeto"*, según la cual, los conocimientos matemáticos intervienen dialécticamente como herramientas eficaces para resolver problemas y como objetos para ser estudiados dentro de una determinada teoría.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

BRUN, J., SCHUBAUER-LEONI, M.L. (1981). Recherches sur l'activité de codage d'operations additives en situation d'interaction sociale et de comunication. *IMAG ,* Université de Grenoble.

CHEVALLARAD, Y. (1992)*Elements de scenario pour le systeme d'etude de l'Institute Universitaire de Formation de Maìtres.* IUFM. Université d'Aix- Marseille.

DOUADY, R. (1984). *Le jeu de Cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des Mathématiques.* Thése de Doctorat d'Etat. Université de Paris VII.

DOUADY, R. PERRIN, M. J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathématics,* 20, 4, 387-424.

GRENIER, D. (1997) Rôle des variables didactiques dans l'analyse et la construction de situations d'apprentissage. En Comiti et col. (Eds), *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants.* (p. 345-351)

LABORDE, C. (1988) Divers aspects de la dimension sociale dans les recherches en didactique des Mathématiques. En C. Laborde et coll. (Eds.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathémqtiques et de l'Informatique,* (p. 67-80). Grenoble: La Pensée Sauvage.

LABORDE, C. (1989) L'enseignement de la geometrie en tant que terrain d'exploration des phénomenes didactiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 9.3, 337-364.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques.* Greboble: La Pensée Sauvage.

MUNGNY, G. (1986) *Psychologie sociale du développement cognitif.* Berna: Peter Lang.

PIAGET, J. (1973) *Introduction à l'épistemologie génétique.* Biblioteque de Philosophie contemporaine. París: PUF.

PIAGET, J. (1975) *L'equilibration des structures cognitives.* Etudes d'épistemologie génétique. Paris: PUF.

SCHUBAUER-LEONI, M. L, PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J. (1986) Processus psychosociolgiques, niveau operatoire et appropriation de connaissances. *Interactions diadctiques.*Université de Genéve. Suisse.

Las Matemáticas en la Carrera de Administración de la UAM-X.

Ana Elena Narro Ramírez
anarro@cueyatl.uam.mx
Universidad Autónoma Metropolitana.
División de Ciencias Sociales y Humanidades. Depto. de Política y Cultura.
Área de Desarrollo de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.
México

Resumen

La enseñanza de las matemáticas se ha topado tradicionalmente con muchas dificultades, pero éstas crecen cuando se trabaja con personas interesadas en las ciencias sociales. Si se pretende que los alumnos de estas disciplinas aprendan matemáticas, es necesario recurrir a todas las herramientas disponibles, entre otras cosas, es importante considerar la forma en que se construye el conocimiento, con el fin de estimular dicha tarea.

Para captar la forma en que se construye el conocimiento es necesario determinar el papel que desempeñan en su elaboración, la experiencia, por un lado, y las construcciones operativas, por otro; así como la naturaleza de las relaciones entre el sujeto y los objetos de su conocimiento; igualmente el tipo de instrumentos que utiliza para resolver problemas, de dónde surgen y cómo son elaborados. De la misma manera se requiere saber en qué medida un conocimiento nuevo está preformado sobre uno precedente o si surge de una construcción efectiva suceptible de estar predeterminada. Este estudio puede hacerse desde dos puntos de vista distintos pero complementarios: el de las condiciones de equilibrio y el de la construcción de estructuras.

Con base en los resultados de estas indagaciones se trata de impulsar a los alumnos a la construcción del conocimiento con un algoritmo que parte del mundo real concebido como un cúmulo de problemas que deben ser resueltos, temas eje de los módulos que conforman el plan de estudio de cada licenciatura, dado que en esta universidad se maneja el sistema modular; se echa mano de un proceso de abstracción para construir un modelo que represente la situación elegida para transformarla, (esta parte corresponde al encargado de matemáticas) se proporcionan instrumentos analíticos para resolver el modelo teórico, se interpretan los resultados trasladándolos a la realidad y se tratan de implantar estas soluciones.

En este trabajo se presenta la forma de manejar las matemáticas en la carrera de administración, sus contenidos y cómo se presentan a los alumnos para que sean captados por ellos con más facilidad y salgan listos para aplicarlos

Tradiciones y Paradigmas de Investigación en Matemática Educativa[11]

Rosa María Farfán
rfarfan@mail.cinvestav.mx
Área de Educación Superior, DME,
Cinvestav-IPN, México

Teoría y Metodología: Nivel Superior

Resumen

En los últimos años, específicamente en las dos décadas anteriores, ha habido un notable incremento de investigaciones concernientes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, una de las razones es el aumento en número de estudiantes de todas las áreas que cursan matemáticas como consecuencia de los cambios que los gobiernos establecen; empero los objetivos que señalan están lejos de cumplirse. Las reformas se suceden unas a otras generando la sensación de que el fondo de los problemas no se ha afrontado realmente. En este escrito distinguiremos las innovaciones de las propuestas curriculares fundamentadas en resultados de investigación en nuestra disciplina. Cantoral y Farfán (1998 a&b).

Señalamos anteriormente, Farfán (1997), que el fenómeno educativo es eminentemente social y compete globalmente a la cultura en la que se sucede, por tanto a los "puntos de vista" específicos del entorno social en el que se desarrolla, por lo que de manera natural, la investigación en matemática educativa se desarrolla bajo el abrigo de diferentes paradigmas. En este artículo nos proponemos hacer una revisión de los principales paradigmas de investigación en Matemática Educativa con el fin de proveer de las herramientas indispensables que permitan realizar pertinentemente el diseño e implementación de investigaciones en el aula de matemáticas.

Introducción

Las reformas se suceden unas a otras generando la sensación de que el fondo de los problemas no se ha afrontado realmente. Un ejemplo lo constituye la experiencia de los años 70's, la famosa "reforma de las matemáticas modernas" en donde el punto nodal estuvo en la introducción del rigor ligado a la consideración del "alumno - niño" conllevó a que los reformadores la impulsaran sobre dos supuestos ilusorios:

- ✓ Primero, la ilusión lírica. Las ciencias y las matemáticas podrían introducirse poco a poco sobre una espléndida arquitectura simple y elegante. Esta "belleza" era ocultada a las jóvenes generaciones por una "mala" pedagogía que les ocultaba su potencia. Luego entonces, la profunda estructura de la ciencia se presentaría a los estudiantes tan pronto fuese posible y todo iría mejor.

- ✓ Enseguida la ilusión romántica. Concerniente a la manera en cómo aprenden los alumnos. Por analogía, ellos son como la planta que "crece sola" si se le coloca en un "buen ambiente", es decir, el movimiento espontáneo de la evolución cognitiva del estudiante dirige y se antepone al conocimiento científico. Las dificultades se atribuyen al arcaísmo pedagógico que cultiva "la ruptura con la vida real", el "formalismo" y el "dogmatismo" y por tanto criticado sin consideración.

Los resultados son bien conocidos y puede desprenderse como lección histórica, que siempre que las reformas implementadas se basan en presupuestos *a priori*, lo que sucede mas frecuentemente de lo que se piensa, han provocado grandes decepciones. Producto del

[11] Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemática Avanzado. Estudios sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

fracaso de la reforma de las matemáticas modernas, ha surgido otro punto de vista “fatalista” de retorno al pasado como el movimiento norteamericano “back to basis”.

La matemática educativa nace como disciplina científica sobre presupuestos radicalmente opuestos a otras aproximaciones que conciernen a la enseñanza: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de abordar razonablemente, sistemáticamente, científicamente y con especificidad los fenómenos de enseñanza de las matemáticas. Arriesgando una definición uno podría decir que la matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión de la “cultura” propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende.

Un punto de inicio en esta problemática es la reflexión sobre los saberes. Es importante señalar que los conocimientos mediante los cuales se establecen las relaciones didácticas no son objetos muertos que el profesor “transmite” al alumno que los “recibirá” y se los “apropiará”. Por el contrario, la matemática educativa los concibe como objetos vivientes sujetos de evolución y cambio conforme la sociedad en donde ellos nacen o se enraízan. Particularmente, el estudio de las relaciones que el estudiante establece con los saberes que le son presentados, relaciones en si mismas de naturaleza eminentemente móviles, es el centro de una reflexión sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes. Ello conduce a una aproximación opuesta a la “pedagogía general”, en tanto que ésta ofrece reglas de aprendizaje y de la educación independiente de los contenidos enseñados. Al menos para las disciplinas científicas y las matemáticas, cuyos contenidos son altamente estructurados, es poco probable que un conocimiento pertinente pueda construirse para explicar los fenómenos de enseñanza dejando de lado los saberes de referencia.

Esto último induce un estudio epistemológico para entender cuáles fueron las causas que posibilitaron la generación de los saberes a fin de articularlos pertinentemente en el aula. Pero como ya señalamos anteriormente el fenómeno educativo es eminentemente social y compete globalmente a la cultura en la que se sucede, por tanto a los “puntos de vista” específicos del entorno social en el que se desarrolla, por lo que de manera natural, la investigación en matemática educativa se desarrolla bajo al abrigo de diferentes paradigmas.

Nuestro objetivo estriba en que el lector realice una distinción entre los principales paradigmas de investigación en Matemática Educativa junto con sus teorías y metodologías y que domine, vía ejemplos concretos, su aplicación dentro del aula de matemáticas con el fin de diseñar e implementar, pertinentemente, proyectos de investigación en la clase de matemáticas.

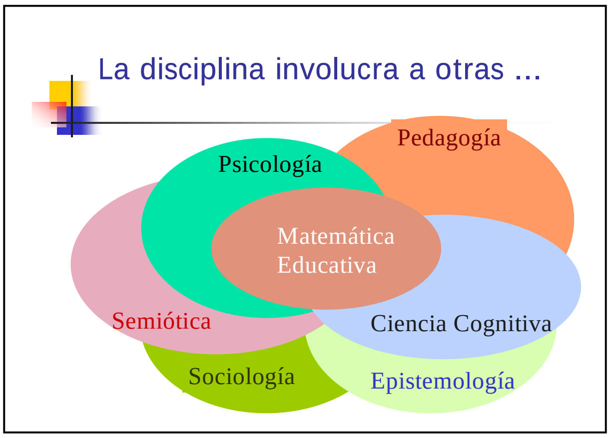
Algunas notas acerca de matemática educativa

Algunas precisiones de entrada serían convenientes. La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática. De modo que distinguimos, de inicio, las prácticas sociales de enseñar y aprender matemática de la matemática misma, de la matemática educativa e inclusive de la matemática escolar. Todos ellos, no constituyen los mismos cuerpos de conocimiento aunque, obvio es decirlo, guarden entre sí fuertes vínculos. El nombre de matemática educativa[12] da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual: digamos que geo-social. En el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de mathematics education, mientras que en la Europa continental le han llamado didactique des mathématiques o didaktik der mathematik por citar algunos de los grupos más dinámicos.

[12]El término matemática educativa al parecer se acuñó en México. La matemática educativa en tanto una disciplina del conocimiento es a todas luces una disciplina emergente y, como tal, ha desarrollado sus paradigmas mucho mas recientemente de lo que podría creerse.

Fuera de nuestro medio, Fischbein[13], suele creerse que bastan una suficiente cultura matemática y una intuición didáctica adecuada para ser capaces de diseñar currículas, elaborar textos y programas escolares y conducir y evaluar el aprendizaje de nuestros alumnos y el funcionamiento de nuestros sistemas de enseñanza. De enseñar una y otra "novedosa" presentación de los conceptos y procesos matemáticos en el aula, sin sentirse persuadidos de la necesidad de evaluar los efectos de sus "innovaciones" en los aprendizaje de los alumnos. Al interior de nuestra comunidad por el contrario, cada vez es mas claro que la complejidad de los fenómenos estudiados y los crecientes hallazgos (en espera de su eventual utilización en el enfrentamiento de problemas didácticos) requieren con mayor urgencia de profesionales del campo; investigadores y profesores no solo interesados en los problemas educativos, sino formados para enfrentarlos. En este sentido se ha creído que la maestría en el dominio científico de los contenidos matemáticos -aunque indispensables ¡quién podría dudarlo!- no es suficiente para estudiar y afectar el funcionamiento de los fenómenos didácticos de manera ventajosa.

En esta época se acepta como una premisa funcional el que nuestra disciplina estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Pues como se señala, la disciplina se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No nos reducimos a la búsqueda de una "buena manera de enseñar" una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber, incluso aunque esta actividad se vea desviada de su objetivo de partida. La investigación en nuestro campo se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas.



Metodológicamente disponemos de varios medios complementarios: entrevistas individuales o en grupo, cuestionarios, análisis de textos, rediseño del discurso matemático escolar y sobre todo observaciones de actividades didácticas concebidas en un cierto marco teórico y realizadas con diversos fines: verificar hipótesis, hacer aparecer ciertos comportamientos o reproducir ciertos hechos detectados. En suma, buscamos tener una mayor gestión sobre las regularidades funcionales de las situaciones de enseñanza, y pretendemos dotar a la enseñanza y al aprendizaje con enfoques y formas nuevas. No sólo tratamos con la matemática como un tema escolar, sino también, tratamos de entender cómo es que los que aprenden se postran ante la matemática. Normalmente se asume que el aprendizaje de la matemática tiene su propia sicología, que los estudiantes y los profesores llevan sus propias ideas de la matemática a cualquier situación de aprendizaje y que los maestros estarán mejor equipados para enseñar matemáticas si ellos pueden entender cómo el tema es mirado desde la perspectiva de sus estudiantes.

[13] Ver [Fischbein, 1990].

En este sentido, no sólo buscamos que los discursos didácticos sean lógicamente coherentes, sino que sean cognitivamente coherentes. La opinión del alumno y del maestro, la realidad de la escuela, se ha redimensionado sorprendentemente. La vieja visión de que la didáctica de la matemática era sólo una colección de trucos para el "bien enseñar" ha sido modificada por otra aun mas vasta y profesional, la de que se trata de una espacio en el cual los estudios de investigación en el campo están siendo usados para construir unidades de conocimiento organizado que puede apoyar las prácticas sociales de referencia.

De los resultados en la matemática educativa

Para evaluar un estudio como investigación en nuestro campo, independiente de la tradición, el consenso establece que debe contener tres componentes esenciales, a saber:

- **Interrogantes** e indagaciones que conciernen a la causa fundamental para la realización de la actividad de investigación. Lo que representa una búsqueda sistemática del conocimiento, la fuente para el entendimiento proporcionando dinamismo a la actividad. Ello induce a que la investigación sea una indagación con intencionalidad.
- **Evidencias** necesarias para relacionar la investigación con la realidad de la situación de la educación matemática bajo estudio. Pueden ser situaciones de clase, currículas, libros de texto o documentos históricos. Es necesario mostrar evidencias de la realidad que es el centro de la teorización (modelización).
- La **teoría** es el sitio donde se reconoce la existencia de valores, hipótesis y generalizaciones y sus relaciones. Es la forma de representar el conocimiento y el entendimiento que se tiene de cualquier estudio de investigación. La teoría es el producto central de la actividad de investigación por lo que hacer teoría es su objetivo principal.

Indagación (plantear preguntas), evidencias y teoría son las tres componentes principales que establecen la diferencia entre la investigación y la especulación. Sin embargo el establecimiento de prioridades, relaciones e inferencias es distinto entre un investigador y otro de diferentes países o escuelas (contrastar un artículo de M. Artigue con uno de D. Tall por señalar autores ya conocidos por el lector). De la lectura desprendemos fácilmente distinciones aunque ambos presenten rigurosamente su investigación, ello proviene de la existencia de distintas tradiciones de investigación. Entendemos que una escuela del pensamiento está en curso de constitución, cuando un colectivo humano acepta compartir y negociar significados, usos y explicaciones sobre las distintas nociones, conceptos, procedimientos, marcos teóricos y sistemas de validación.

Una visión global de las distintas tradiciones de investigación

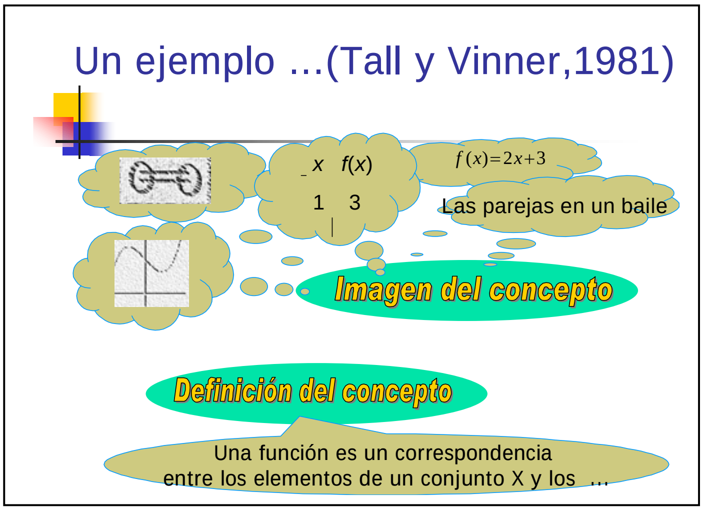
Una tradición de investigación es diferente de un paradigma de investigación. Uno no puede elegir una tradición de investigación pues es el resultado de la formación, educación, cultura y preparación para la investigación; de alguna manera se nace con una tradición determinada. En tanto que el paradigma es posible adoptarlo voluntariamente puesto que un paradigma es una colección de conocimientos (explícitos o implícitos) de un individuo o de un grupo de individuos acerca de: los tipos de cosas que se hacen cuando se conduce una investigación en un campo determinado, los tipos de preguntas que se tienen que hacer; los tipos de respuestas esperadas y los métodos que son empleados en la búsqueda de estas respuestas (ver la definición de T. Khunn). Internacionalmente se reconocen tres diferentes tradiciones de investigación: la tradición pedagógica, la tradición empírica - científica y la tradición filosófica – académica (este análisis esta relacionado con el de Habermas de 1972, extendido al campo de la investigación educativa por Carr en 1985 quién señala las tradiciones Histórica – Hermeneútica, Empírico – Analítica y ciencia Crítica así como el valor de sus marcos teóricos.

La tradición Pedagógica

Esta es la mas antigua, los nombres de Socrátes, Comenius, Pestalozzi y Froebel se asocian a esta tradición a los que se añaden recientemente investigadores como Polya, Beberman, Gattegno, Dienes y Freudenthal. Para esta tradición, la investigación es una parte integral del ser un buen maestro, siendo los experimentos y la observación una componente clave de la investigación. El valor humanístico y personal con tendencia hacia un ideal educativo de tipo liberal – progresivo se constituye como un elemento central en esta tradición. Respecto de la teoría ésta se construye sobre el desarrollo de las ideas de los expertos profesores, siendo su validez intuitiva para el resto. La evidencia que se presenta es altamente selectiva y ejemplar mostrando incluso lo que un aprendiz lento es capaz de hacer.

El método de investigación es muy simple: ser un ingenioso e inventivo profesor, audaz, que ofrece a sus alumnos sus ideas con claridad y observar, observar... "aprender de los niños y ellos intentarán aprender contigo" es quizá una buena frase para ejemplificar las ideas que subyacen en esta tradición. Como ejemplo de este tipo de investigaciones pueden consultarse los trabajos del congreso anual CIEAM (Comisión para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas).

La tradición científico – empírica



Esta es mucho mas reciente en educación y una buena descripción se da en (Begle, 1969). En esta tradición es la evidencia la llave del conocimiento y el proceso de investigación centra su atención en los métodos para obtenerla y analizarla, incluso cualitativamente. La evidencia, tan rápida como sea posible, debe ser objetiva e indisputable. El análisis es prescrito y estandarizado para la comunicación de los resultados entre los investigadores.

En esta tradición la metodología de investigación es muy importante y extensa, tratando de minimizar la influencia de la individualidad del profesor. El objetivo final en esta tradición es el mejoramiento de la educación matemática; pero se llega a él por acumulación gradual de la evidencia relevante. Como Begle argumenta un radicalismo de este empírismo puede llegar a modificar la disciplina en una ciencia experimental como las ciencias naturales. Esta tradición es actualmente muy generalizada, ejemplos de éstos trabajos se presentan en el congreso anual PME (Psychology Mathematics Education) asi como los trabajos que se presentan en la revista The Journal for Research in Mathematics Education.

La tradición académica - filosófica

Esta tradición tiene una larga historia y tradición en educación del lado de las humanidades. Una de sus particularidades es el análisis racional y crítico que permea su acercamiento teórico en donde los profesores y el aula son manifestaciones imperfectas de la situación educativa teórica. Este acercamiento es usualmente atendido por matemáticos y educadores en donde el papel de la evidencia lo ejemplifica la siguiente cita de (Steiner, 1969):

...*Much of the complex mentioned above is left open for further development and experimentation. This is especially true for the use of systems of quantities in school mathematics. On the basis of a precise mathematical understanding, I am sure it will be possible to find adequate ways of teaching it...(p. 259)*

El mejoramiento de la educación matemática bajo esta tradición implica que la realidad imperfecta sea susceptible de acercarse a la teoría perfecta. El mejoramiento se reconoce como algo importante; pero el objetivo de la investigación es el de desarrollar conocimiento teórico vía el análisis y la crítica en donde la evidencia se supone conocida. Ejemplos que ilustran esta aproximación se presentan en el grupo de Theory of Mathematics Education (TME).

Una visión de conjunto que ilustra las diferentes aproximaciones en torno a los objetivos de investigación, el papel que juega la evidencia y la teoría se ilustra enseguida.

Tabla resumen de tradiciones

Tradición	Objetivo de la investigación	Papel de la evidencia	Papel de la teoría
Pedagógica	Mejoramiento de la enseñanza directa	Provee conductas selectas y ejemplares del que aprende	Acumulación de profesores expertos
Científico-empírica	Explicación de la realidad educativa	Datos objetivos que ofrecen hechos analizados y explicados	Exploratoria, validada a partir de la evidencia
Académica-filosófica	Establecimiento de una posición teórica argumentada rigurosamente	Se asume por conocida. En otro caso deberá desarrollarse	Situaciones ideales en las que la realidad educativa debe contribuir

Cabe aclarar que las fronteras no son estrictas y como usualmente sucede es posible encontrar diversos trabajos que retoman aspectos. Para nuestros fines hemos hecho una delimitación casi ideal. Para ampliar la lectura se sugiere leer (Bishop, 1994)

Un ejemplo de innovación en el aula usando los resultados de la investigación. El curso de precálculo

La investigación sobre las premisas que sustenta la instalación de un lenguaje gráfico que permita el tránsito entre varios contextos ha sido reportada en (Farfán, 1997; Cantoral y Farfán, 1998). En síntesis hemos sostenido que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

En términos escolares surge por la necesidad de modificar el curso de precálculo al inicio de los estudios universitarios y un diseño para la escuela lo presentamos en (Albert y Farfán, 1997). En lo que sigue expondremos *grosso modo* los elementos del análisis preliminar (en términos de ingeniería didáctica) así como los elementos sustantivos del diseño a fin de proporcionar un ejemplo de innovación para la escuela obtenida de la investigación en matemática educativa.

Estudio didáctico

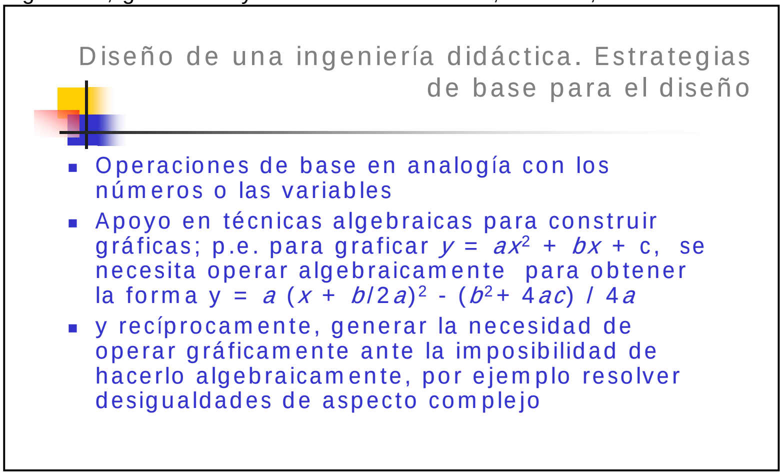
Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga, permea la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se auna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el status del profesor sea demeritado, si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso; el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y "aligera", eliminando dificultades subyacentes al contenido matemático.

Estudio epistemológico

La naturaleza del concepto de función es en extremo compleja, su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en [Sierpinska A., 1992].

Estudio cognitivo

Los objetos inmersos en el campo conceptual del cálculo (análisis) son particularmente complejos a nivel cognitivo pues, como en el caso que nos ocupa, la función se presenta como un proceso cuyos objetos son los números; este mismo concepto deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación (ó integración) y así sucesivamente. De modo que al iniciar un curso de cálculo el estudiante debe concebir a la función como un objeto y por ende susceptible de operación; de otro modo, ¿qué significa operar un proceso?. En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan a la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto



geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición como en la argumentación es posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema estriba en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, por lo que se acude al refugio algorítmico fácilmente.

A partir de estos elementos nos proponemos un diseño con el objetivo explicito de construir un lenguaje gráfico. La hipótesis central, después de un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en (Farfán, 1997) consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

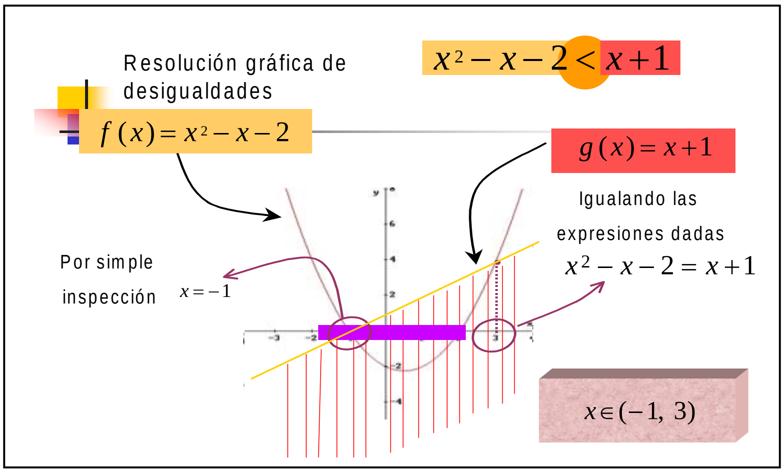
Esta hipótesis ha sido desarrollada tomando las dos siguientes directrices; en primer término se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales tales como:

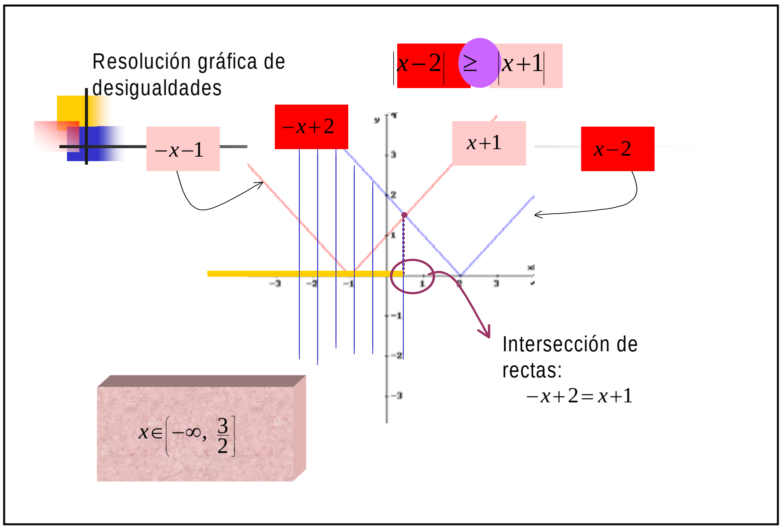
- ✓ $f(x)$ y $f(-x)$ Reflexión respecto del eje x y del eje y respectivamente
- ✓ $f(x + a)$ y $f(x - a)$ con $a >$ o Traslación en la dirección del eje x
- ✓ $f(x) + a$ y $f(x)-a$, con $a > 0$ Traslación en la dirección del eje y
- ✓ $af(x)$ Contracción o dilatación respecto del eje y
- ✓ $f^{-1}(x)$ Re flexión respecto de la recta $y = x$
- ✓ $1 / f(x)$ Invierte ceros en asíntotas y viceversa, y las abscisas tales que $|y|>1$ corresponderán con aquellos donde $|y|<1$ y viceversa, dejando intactos los puntos sobre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
- ✓ $|f(x)|$ y $f(|x|)$ Respectivamente reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas

El segundo aspecto relevante lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia: la identidad (f (x) = x), la exponencial f(x) = ax y la sinusoidal (f(x) = senx), todas ellas para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy. Respectivamente, ellas sirven para construir operando las gráficas a las funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales y las trigonométricas gráficamente.

En este acercamiento ha resultado importante plantear situaciones-problema que involucren enunciados algebraicos que favorezcan el uso del lenguaje gráfico, por ejemplo la tarea "resuelve la desigualdad (|x – a| + |x - b|) / (|x + b| + |x + *a*|) ≤ *kx*" es ampliamente desarrollada como estrategia de enseñanza en (Albert y Farfán, 1997). Para todo ello es necesario operar algebraicamente a fin de obtener la gráfica de las funciones involucradas para que finalmente sean comparadas y resolver de este modo los sistemas de ecuaciones a que haya lugar. Del mismo modo el buscar los extremos de funciones como $x / (ax^2+b)$ con a y b positivos, permite avanzar en la construcción del puente entre contextos, pues la tarea en el contexto gráfico sirve de guía a la sintaxis algebraica, de modo que ésta se refuerza en su significado.

Describimos enseguida dos ejemplos:





Discusión

El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por (Artigue, 1998). Esa ruptura además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

Referencias bibliográficas

Albert A. y Farfán R. 1997 *Resolución gráfica de desigualdades*. 2ªed. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue M. 1992. Didactic Engineering, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Selected Papers: 41-66. Traducción en español. En Gómez P. (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (1995) pp. 33-59. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C. V. & una empresa docente®, México-Colombia.

Artigue M. 1998. L'evolution d'une problematique en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Bishop A. J. 1992. International perspectives on research in mathematics education. En D. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 710-723). New York: Macmillan.

Cantoral R. y Farfán R. 1998 Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: retos de la educación superior. En F. Cordero (ed.) *Antologías No. 3*, pp. 47-104, Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior, Cinvestav: México.

Cantoral, R. y Farfán, R. 1998 Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *EPSILON* , No. 42 pp. 353 – 369, España.

Cantoral R. et al. 2000. *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas

Dubinsky & Harel (Eds.) 1992. *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes. 25

Farfán, R. 1997 *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. 1997 *Didáctica de las matemáticas*, Universidad Virtual del Instituto Tecnológico de Monterrey, México.

Romberg, T. A. 1992. Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 49-64). New York: Macmillan.

Tall, D. y Vinner, S. 1981 Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Special Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12: 151-169.

Una Introducción a la Derivada a través de la Variación. Curso Especial.

Dr. Crisólgo Dolores Flores
cdolores@prodigy.net.mx; cdolores@uagro.mx
Universidad Autónoma de Guerrero/CIMATE/CONACYT/México.

Medio Superior (Bachillerato)
Temática: Cálculo

1. Introducción: En este curso se pretende proponer y discutir una introducción intuitiva a la derivada. Se parte del planteamiento y resolución de situaciones variacionales elementales y se ubica a la variación como eje rector del cual se desprenden las ideas y conceptos, propiedades y procedimientos esenciales del cálculo.

2. Objetivos del curso: Analizar una aproximación didáctica hacia el concepto de derivada a través de la variación. Mediante la ejecución de actividades representativas, desarrollar habilidades en los profesores a fin de que profundicen su comprensión sobre la derivada a través de la formación de ideas variacionales. Dotar a los profesores de los elementos básicos para que puedan incorporarlos a su práctica docente y así mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial.

3. Estructura del curso: El curso está estructurado en dos partes principales. La Primera Parte: Las variables y las funciones, elementos básicos para el estudio de la variación, y la Segunda Parte: La derivada y la variación. En la Primera Parte incluye el estudio de situaciones de variación elementales, de las cuales se obtienen los conceptos de variable y función. La conexión entre sus expresiones analíticas y representaciones gráficas es utilizada para manipular los procesos de cambio, pues se considera que es muy difícil realizar operaciones con los cambios si no se cuenta con una fórmula matemática y una gráfica que ayude a representar el comportamiento de esos cambios. Sobre esta base se estudia el cambio y su medición en la Segunda Parte. La medición del cambio se obtiene por medio de las diferencias, éstas son los elementos matemáticos centrales en torno de las cuales se organiza el resto del trabajo. En principio se analizan los cambios que suceden a intervalos grandes, luego se estudian los cambios relativos como la rapidez media para después plantear la necesidad de cuantificar los cambios relativos en un instante por medio la velocidad instantánea. El problema de las velocidades instantáneas motiva el estudio de los procesos infinitos, en particular los procesos infinitos asociados al límite de las razones de diferencias que van haciéndose infinitamente pequeñas. Esta es la puerta de entrada al concepto de derivada que se define la postre como cociente de diferenciales. El proceso de búsqueda de las velocidades instantáneas es primero llevado al plano de las aproximaciones numéricas, luego al de representaciones geométricas y finalmente al plano algebraico. Los cálculos algebraicos hacen evidente la necesidad de que para obtener velocidades instantáneas o derivadas, el problema se reduce a la obtención de diferenciales. Finalmente se estudia la función derivada y su relación con el comportamiento variacional de la función de la que se obtuvo.

4. Metodología: Se Emplearán principalmente dos formas metodológicas de trabajo:
La informativa. En ella el conductor del curso dará a conocer los antecedentes del trabajo y estado que guarda la investigación sobre la enseñanza de la derivada en el mundo.
La Práctica. Esta consiste en la realización conjunta de actividades representativas a fin de desarrollar habilidades matemáticas ligadas al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Bibliografía básica

Dolores C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. Cuadernos didácticos Vol. 6. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.

Capacidad y Volumen.

Mayra Murillo
Departamento de Matemática
Universidad de Panamá

Resumen

Es importante desarrollar un mejor entendimiento de la noción de volumen, a nivel primario, por lo tanto es conveniente que los niños se expongan a múltiples experiencias con volumen de forma que comparen y midan con unidades estándar y no estándar. Este tipo de actividades están limitadas en el aula, ya que el maestro no cuenta con suficiente materiales didácticos, tiempo y guías de laboratorio, que lo apoyen en su labor docente.

Nuestro objetivo en este curso es desarrollar un mejor entendimiento en la noción de volumen, según Piaget el concepto de volumen causa dificultades crea una confusión entre cantidad de materia, que es algo concreto y el volumen físico, o sea, el espacio ocupado, que es algo abstracto.

Se discutirán problemas tipo laboratorio en la que se usaran envases de diferentes tipos y tamaños, entre ellos cubos y prismas rectangulares, se estudiaran el cambio de dimensiones de los envases, el cambio de posición y por ultimo que pasa cuando se coloca un objeto en un recipiente con agua.

Materiales: tijeras, regia, cartulinas, cintas adhesivas, goma, botellas de un litro, canicas, frasco de vidrio, retroproyector

Referencias bibliográficas

Castelnuovo, Emma. Didáctica de la Matemática. Editorial Trillas, México, 1970.

Lovell, K. Desarrollo de los conceptos básicos y matemáticos y científicos en los niños. Ediciones Morata, España, q99986.

Stemmark, Jean Kerm; Thompson, Virginia y Cossey, Ruth. Matemática para la familia. Estados Unidos

Van Cleave, Janice. Matemática para todos los niños y jóvenes. Editorial Limusa, México, 1997.

Didáctica de la Noción de Simetría.

Juan M. Nole, M. en C.
jmnole@sinfo.net
CIMECNE – FCNET, Universidad de Panamá
Panamá

Justificación.

En los nuevos programas de matemática de séptimo y octavo grado de la Educación Básica General de la República de Panamá se consideraron con relación al área de Geometría las nociones de simetría (axial y rotacional) y los poliedros regulares, excepto el icosaedro. Estas programaciones curriculares van a orientar la labor del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las mencionadas nociones, con un enfoque constructivista. Sin embargo se requiere de otras actividades de aprendizaje, así como también de técnicas metodológicas apropiadas que no se reflejan en dichos programas curriculares y que podrían contemplarse en el contexto de determinadas unidades didácticas sobre temas relacionados con algún tipo de simetría.

Por la anterior hemos preparado este curso con el propósito de proveer a los docentes-participantes de una metodología activa para la enseñanza de los tipos de simetría en el plano (axial, central y rotacional). Además extenderemos al espacio estas nociones, con la simetría rotacional alrededor de un eje y la simetría respecto a un plano.

Objetivo General.

Desarrollar en el contexto de diversas situaciones de aprendizaje experiencias de contenido geométrico relacionadas con los tipos de simetrías, con el propósito de que los participantes adquieran técnicas metodológicas.

Objetivos Específicos.

1) Analizar con los docentes los distintos tipos de simetrías del plano.
2) Diseñar actividades que promuevan el aprendizaje de los tipos de simetrías en figuras geométricas planas.
3) Analizar con los docentes la simetría rotacional alrededor de un eje y la simetría respecto a un plano.
4) Determinar todos los planos de simetría de los poliedros regulares.
5) Diseñar actividades que permitan describir la posición de los planos de simetría en un poliedro regular.
6) Determinar todos los ejes de rotación de los poliedros regulares.
7) Analizar el orden de los ejes de rotación de un poliedro regular.
8) Diseñar actividades que permitan describir los ejes de rotación de un poliedro regular y el orden de estos ejes.

Contenido.

1) La simetría como transformación.
2) La simetría axial o simetría respecto a una recta.
   - 2.1) Concepto.
   - 2.2) Figuras simétricas respecto a una recta.
   - 2.3) La transformación de simetría respecto a una recta preserva la distancia.
   - 2.4) Construcción de la figura simétrica de una figura dada con respecto a una recta.
3) La simetría central o simetría respecto a un punto.
   - 3.1) Concepto
   - 3.2) Figuras simétricas central
   - 3.3) La transformación de simetría respecto a un punto preserva la distancia.

  - 3.4) Construcción de la figura simétrica de una figura dada con respecto a un centro.
4) Rotación o simetría rotacional.
  - 4.1) Concepto.
  - 4.2) Las rotaciones o giros transforman puntos alineados en puntos alineados.
  - 4.3) Las rotaciones o giros preservan la distancia.
  - 4.4) La simetría rotacional alrededor de un eje como extensión de la simetría rotacional alrededor de un punto.
5) Simetría respecto al plano.
  - 5.1) Concepto.
  - 5.2) La simetría respecto al plano preserva la distancia .
  - 5.3) Figuras con plano de simetría.
6) Poliedros regulares.
  - 6.1) Planos de simetría.
    Determinación de los planos de simetrías de los poliedros regulares.
  - 6.2) Ejes de rotación y orden de estos ejes.
    Determinación de los ejes de rotación y su orden.

Metodología.

Este curso está organizado para ser realizado con la participación de docentes de matemática de los niveles medio básico y medio superior.

Como se pretende producir un cambio en los participantes motivándolos al uso y aplicación de metodología activa para la enseñanza de los tipos de simetría, en cada sesión de trabajo, estos serán analizados y se elaborarán actividades que promuevan su aprendizaje. En la primera sesión serán objetos de estudio las simetrías axial y central. En la segunda sesión se trabajará en la simetría rotacional y la simetría respecto a un plano. En la tercera sesión, se describirán los poliedros regulares poniendo énfasis en su simetría.

Actividades de Aprendizaje.

La simetría axial podría ser estudiada en octavo grado mediante el doblado de papel por el eje de simetría, pudiendo obtenerse de este modo experimentalmente algunas de sus propiedades. Se puede solicitar a los participantes, determinar si una figura creada en una de las dos mitades del papel es o no simétrica con relación al doblez de la hoja.

Para simular la simetría axial trácese una recta r, sobre una hoja de papel y dibújese en uno de los dos semiplanos determinados por la recta r una figura geométrica F; denotemos uno de los puntos de la recta r por A. Luego con un papel transparente calcamos la recta r, el punto A y la figura F. Levantamos el papel transparente y después de darle la vuelta apoyándolo por la otra cara sobre la hoja de papel de modo que la recta y el punto calcado se superpongan a la recta r y al punto A de la hoja de papel. En ese sentido se introduce experimentalmente la simetría axial con el auxilio de un papel transparente o semitransparente, sobre el cual se encuentra dibujada la figura cuya simetría (reflexión) va a considerarse.

Otra manera de considerar la simetría axial consiste en estudiar las imágenes formadas en los espejos. Para determinar los ejes de simetrías de figuras simétricas trabajaremos con un espejo.

Para construir la figura simétrica de una figura dada respecto a un eje bastará trazar desde cada punto A de la figura una perpendicular al eje y tomar sobre su prolongación en el semiplano opuesto un punto A a igual distancia del eje que el punto A. Sí la figura se compone de segmentos rectilíneos es suficiente hallar los puntos simétricos de los extremos de cada segmento, pues si A' es el simétrico de A y C' es el simétrico de C, el simétrico de cualquier punto P del segmento $\overline{AC}$ se encuentra sobre el segmento $\overline{A'C'}$.

Introduciremos la simetría central, como el producto de dos simetrías axiales, de ejes perpendiculares mediante el doblado de papel; el centro de esta simetría central es el punto de intersección de ambos pliegues perpendiculares (rectas perpendiculares).
Los participantes identificarán centros de simetrías de figuras geométricas.

Para construir la figura simétrica de una figura dada con respecto a un centro O, bastará unir sus diversos puntos M con el punto O y tomar en la prolongación del segmento $\overline{MO}$ el punto M′ tal que OM′ = OM. Cuando la figura se compone de segmentos rectilíneos es suficiente determinar los puntos simétricos de los extremos de cada segmento. Así, si A′ es el simétrico de A y B′ es el simétrico de B entonces los simétricos de los puntos del segmento $\overline{AB}$ se encuentran sobre el segmento A′B′.

Los participantes justificarán que dos segmentos simétricos respecto a un centro se hallan situados en rectas paralelas.

Las rotaciones o giros serán introducidas con ayuda del compás y también, experimentalmente de manera análoga que la simetría axial. Así, para simular la rotación o giro de centro O y amplitud 30 ° en el sentido de las agujas de un reloj, emplearemos dos hojas de papel, siendo una de ella transparente y la otra que contenga una figura. Después de calcar la figura en el papel transparente, fijemos ambas hojas de papel con una tachuela o chinche en un punto que designamos por O y giramos el papel transparente 30 ° en el sentido de las agujas del reloj.

Se efectuarán rotaciones o giros de figuras de cartón donde se desea que la figura adopte posiciones similares a la inicial. En ese sentido se le solicitará a los participantes que dibujen una figura a la que aplicarán un giro de una amplitud cualquiera, grande o pequeña alrededor de uno de sus puntos interiores, de manera que la figura permanezca en una posición similar a la inicial.

Se obtendrá en cartón una copia de cada figura geométrica dada en papel y se intentará encontrar en cuantas posiciones puede la figura de cartón cubrir a la de papel. En cada caso se medirá el ángulo que tiene que girar la figura de cartón para pasar de una de esas posiciones a la siguiente, y de esta a la que sigue, etc., hasta completar la vuelta.

Mediante un espejo se simulará un plano de simetría de un poliedro, ya que un trozo de poliedro se refleja exactamente en el otro trozo.

Los participantes construirán los poliedros regulares a partir de sus desarrollos, utilizando cartulina o cartoncillo. Luego, describirán sobre esos modelos la posición de los planos de simetría y los ejes de rotación

Referencias bibliográficas

[1] Alsina Catalá, Claudi; Fortuny Aymemí, Josep Mª; Pérez Gómez, Rafael. ¿ Por qué Geometría? Propuesta Didáctica Para la ESO. Editorial SÍNTESIS. 1997

[2] Gutiérrez, Ángel; Jaime, Adela. Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. Editorial Iberoamérica. Bogotá.1995.

[3] Guillén Soler, Gregoria. Poliedros. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial SÍNTESIS. España.1991.

[4] National Cuncil of Teachers of Mathematics. Simetría, Congruencia y semejanza. Editorial Trillas. México. 1973.

[5]] Nole, Juan y García G., Gonzalo. Construcción de Poliedros. Curso - Taller, Editado en las Memorias del IV Congreso de Matemática Educativa, Guatemala, 1999.

[6] Pogorelov, A.V. Geometría elemental. Editorial Mir. Moscú. 1974.

[7].Riveros R., Marta; Zanocco S., Pierina. Geometría: Aprendizaje y juego. Ediciones Universidad Católica de Chile. 1992.

[8] Roanes Macías, Eugenio. Didáctica de las Matemáticas II. Ediciones Anaya, S.A. 1969.

[9] Roanes Macías, Eugenio. Introducción a la Geometría. Manuales de Orientaciones Universitaria Anaya, Madrid. 1980.

[10] Waldegg, Guillermina; Villaseñor, Roberto; García, Víctor. Matemáticas en Contexto. Segundo Curso. Grupo Editorial Iberoamérica. 1998. México.

[11] Weyl, Hermann. La Simetría. Editorial Nueva Visión. Buenos Aires. 1958.

Propiedad del Valor Intermedio.

Jorge E. Hernández U.
herced@pty.com
Universidad de Panamá, Panamá

Nivel Superior.
Cálculo

Resumen

Una propiedad importante que satisfacen las funciones continuas es la siguiente:

(PVI): Sea f: [a,b] $\rightarrow$ R una función y sea x_1, $x_2 \in$ [a,b]. Si $f(x_1) < y < f(x_2)$, entonces existe un número real x entre x_1 y x_2
tal que f(x) = y.

En este curso discutiremos el principio del extremo superior de los números reales y lo relacionaremos con los otros principios de completitud, en particular con el principio de los intervalos encajados de Cantor (PIEC). Usando (PIEC) probaremos que la propiedad del valor intermedio es una condición necesaria para la continuidad. Posteriormente, estudiaremos con detalles las funciones que satisfacen (PVI) y estableceremos una condición suficiente para la continuidad de funciones que satisfacen (PIV), la cual se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema: Sea f: [a,b] $\rightarrow$ R una función que satisface (PIV) y supongamos que para cada y $\in$ R, el conjunto
Ey = {x $\in$ [a,b] : f(x) = y} es un subconjunto cerrado de R. Entonces f es continua en [a,b].

Finalmente estableceremos que la derivada de una función satisfacen (PVI) y presentaremos algunos ejemplos que ilustren la teoría presentada en el curso.

Referencias bibliográficas

Bartle, Robert. Introducción al análisis matemático de una variable. Editorial Limusa S.A. México. 1984.

Bressound, David. A Radical Approach to Real Analysis. Editorial The Mathematical Association of America. Washington, DC. 1994.

Fischer, Emanuel. Intermediate Real Analysis. Editorial Springer-Verlag. New York. 1983.

Stromberg, Karl. An Introduction to Classical Real Analysis. Editorial Wadsworth, Inc. California. 1981.

Swokowski, Earl y Otros. Calculus. Editorial PWS Publishing Company. Boston. 1994.

Decisiones, Juegos y Pensamiento Matemático

Uldarico Malaspina Jurado
umalasp@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú

Introducción

Es fundamental que nuestros alumnos, y obviamente nuestros docentes, tengan una formación matemática que incluya aspectos que tradicionalmente no se han considerado en niveles básicos, pero que cada vez resultan más importantes ante las diversas situaciones problemáticas que nos toca enfrentar como ciudadanos de una sociedad tecnificada y globalizada. En la vida permanentemente estamos tomando decisiones, por ello, como parte de la formación del pensamiento matemático de nuestros alumnos bien podemos brindarles algunos elementos que contribuyan a un mejor manejo de la información y a tener modelos referenciales para analizar las posibles decisiones que tengan que tomar en el futuro, y con mayor razón en el ejercicio técnico o profesional. El valor formativo es grande, pues se tiene la oportunidad de emplear herramientas matemáticas simples para analizar una decisión racional y también de relativizar con objetividad la adopción de ciertos criterios.

Habiéndose introducido el azar en el mundo de las matemáticas desde el siglo XVII con Pascal y Fermat, y siendo evidente que vivimos en un mundo con problemas determinísticos y aleatorios, es esencial que formen parte de la cultura del ciudadano del siglo XXI los aspectos básicos de los valiosos aportes matemáticos de John von Neumann, de Oskar Morgenstern y de John Nash, hechos en el siglo XX, a la solución de problemas en los que se tiene en cuenta lo probable y lo subjetivo.

En el curso, sin entrar en formalizaciones complejas y partiendo fundamentalmente de lo intuitivo, se examinarán problemas relacionados con decisiones que deben tomarse bajo riesgo y problemas de la teoría de juegos, tanto de suma nula como de suma no nula, empleando cuadros de doble entrada, elementos de probabilidades, operaciones con matrices y representaciones gráficas.

Elementos de la teoría de decisiones

<u>Problema 1</u>
Por participar en cualquiera de los siguientes juegos se paga lo mismo. ¿Cuál de ellos escogerías?.

Juego A: Lanzas un dado blanco y un dado negro y recibes en dólares la suma de los puntos que muestran los dados en sus caras superiores

Juego B: Lanzas 4 monedas y recibes en dólares el cuádruplo del número de caras que obtengas.

<u>Solución</u>
Algunos razonamientos para tomar la decisión:

I). ¿Cuánto se ganaría en promedio en un lanzamiento en cada uno de los juegos? ¿Promedio sobre qué?

Para el promedio examinemos todos los casos posibles en cada juego:

A: Casos posibles:
Dado blanco: 6 ; Dado negro: 6 ; En total 6 x 6 = 36 casos posibles:
{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), ...(6,5), (6,6)}

B: Casos posibles:
1ª moneda: 2; 2ª moneda: 2; 3ª moneda: 2; 4ª moneda: 2
En total: *2* x *2* x *2* x *2 = 16* casos posibles:

cccc ccсs ccsc ccss cscc cscs cssc csss
sccc sccs scsc scss sscc sscs sssc ssss

Una manera de calcular una *"ganancia promedio"* en cada uno de los juegos:

En A:

Si se lanzaran 36 veces los dados y cada vez se obtuviera un caso diferente, de los 36 casos posibles, el pago total sería *2* x *1 + 3* x *2 + 4* x *3 + 5* x *4 + 6* x *5 + 7* x *6 + 8* x *5 + 9* x *4 + 10* x *3 + 11* x *2 + 12* x *1 = 252* (dólares)

En consecuencia el pago promedio por lanzamiento sería $\frac{252}{36} = 7$ (dólares)

y bien puede estimarse en esta cantidad de dólares lo que se podría ganar en promedio en un lanzamiento en el juego A.

En B:

Si se lanzaran 16 veces las monedas y cada vez se obtuviera un caso diferente, de los 16 casos posibles, el pago total sería

4 (4 x *1 + 3* x *4 + 2* x *6 + 1* x *4 + 0* x *1) = 128* (dólares)

En consecuencia el pago promedio por lanzamiento sería $\frac{128}{16} = 8$ (dólares)

y bien puede estimarse en esta cantidad de dólares lo que se podría ganar en promedio en un lanzamiento en el juego B

Desde este punto de vista, sería más conveniente optar por el juego B.

II). ¿Cuál sería el pago esperado en un lanzamiento en cada uno de los juegos?
¿Qué entendemos por *"pago esperado"*?
Pago esperado es un promedio ponderado de los pagos obtenibles, donde cada coeficiente de ponderación es la respectiva probabilidad de obtención de tal pago.

En A:

Pagos obtenibles: *2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12*

Llamemos X_i a cada uno de estos pagos y $p(X_i)$ a la probabilidad de obtenerlos; así

$p(2) = \frac{1}{36}$ (Sólo hay una manera de obtener 2 en los 36 casos posibles)

$p(3) = \frac{2}{36}$ (Hay dos maneras de obtener 3 en los 36 casos posibles)

$p(12) = \frac{1}{36}$

En consecuencia, Pago esperado en A =

$$2(\frac{1}{36}) + 3(\frac{2}{36}) + 4(\frac{3}{36}) + 5(\frac{4}{36}) + 6(\frac{5}{36}) + 7(\frac{6}{36}) + 8(\frac{5}{36}) + 9(\frac{4}{36}) + 10(\frac{3}{36}) + 11(\frac{2}{36})$$
$$+ 12(\frac{1}{36}) = \frac{252}{36} = 7$$

$$\left(\sum_{i=1}^{11} X_i p(X_i) = 7 \right)$$

En B:

Pagos obtenibles: *0, 4, 8, 12, 16*

Llamemos Y_i a cada uno de estos pagos y $p(Y_i)$ a la probabilidad de obtenerlos; así:

$p(0)= \frac{1}{16}$ (Sólo hay una manera de obtener 0 en los 16 casos posibles)

$p(4)= \frac{4}{16}$ (Hay 4 maneras de obtener 4 en los 16 casos posibles)

$p(8)= \frac{6}{16}$, $p(12)= \frac{4}{16}$ y $p(16)= \frac{1}{16}$

En consecuencia

Pago esperado en *B* = $0(\frac{1}{16})+4(\frac{4}{16})+8(\frac{6}{16})+12(\frac{4}{16})+16(\frac{1}{16})=\frac{128}{16}=8$

$\left(\sum_{i=1}^{5} Y_i\, p(Y_i)=8\right)$

Desde este punto de vista, que en verdad es una manera más formal de examinar el pago promedio considerado en (I), también es claro que sería más conveniente optar por el juego B.

Problema 2

Un promotor deportivo está organizando una competencia atlética para el próximo domingo. Por experiencias anteriores, él ganaría 10 mil dólares si no llueve y sólo 2000 dólares si llueve. Una compañía de seguros le ofrece pagar 7 mil dólares si llueve, pero tiene que comprar tal seguro por 3 mil dólares. Si la probabilidad de que llueva el domingo de la competencia es de 0.45 ¿le conviene o no al promotor comprar el seguro?

Solución

Examinemos las ganancias en los cuatro casos posibles. Un cuadro resume esta información:

	Llueve	No llueve
Sin seguro	2	10
Con seguro	6	7

Pago esperado sin seguro: $PE_{ss}= 2(0.45)+10(0.55)=6.4$

Pago esperado con seguro $PE_{cs}=6(0.45)+7(0.55)=6.55$

Sí le conviene comprar el seguro

Observación:

Hemos visto que el concepto de pago esperado, o de valor monetario esperado ayuda a tener criterios cuantificados para tomar una decisión; sin embargo la asignación de la probabilidad de ocurrencia de un suceso no siempre es objetiva y por otra parte hay diversas situaciones en las que el valor monetario no es lo más importante para tomar una decisión. Tal es el caso de situaciones en las que debe decidirse una sola vez y hay el riesgo de perder una gran suma de dinero que lleve a un fracaso financiero, aunque la probabilidad sea pequeña. Sin embargo hay otros casos más subjetivos, como el siguiente:

Problema 3

Juan es gran admirador de Pavarotti y ante su próxima visita a su país para dar un concierto, ha reunido con gran esfuerzo los 20 dólares que costará la entrada más económica. Son los últimos minutos de venta de boletos y muy cerca de la fila una persona le ofrece a Juan el siguiente juego: Lanza un dado y si el número de la cara superior es *1,2, 3 ó 4,* le pagará a Juan 100 dólares, pero si el número es *5* ó *6,* Juan debe pagarle 20 dólares. ¿Juan adoptaría el criterio de valor monetario esperado para decidir si acepta o rechaza el juego?

Examinemos:

$$PE_{Acepta}:\ 120\left(\frac{2}{3}\right)+0\left(\frac{1}{3}\right)=80\ ;\quad PE_{Rechaza}:\ 20(1)=20$$

Así, adoptando fríamente el criterio de pago esperado, convendría aceptar el juego; sin embargo considerando la gran ilusión de Juan por presenciar el concierto, es altamente probable que rechace el juego, pese a que su valor monetario esperado es significativamente menor que el correspondiente a aceptar el juego.

Así, pues, existen situaciones en las que está presente un aspecto que no estamos tomando en cuenta y que es el que finalmente determina el que tomemos una decisión u otra. El matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern, en 1953, iniciaron el estudio sobre la utilidad o “satisfacción” que adquieren las personas a partir de sus preferencias por ciertas cosas y los riesgos que están dispuestos a sumir para obtenerlas. Antes de entrar a algunos detalles de sus planteamientos, asumamos que es posible representar mediante una función los niveles de utilidad o de satisfacción de una persona por la obtención de ciertas cantidades de algo. Si tal función es como la que aparece en la Figura 1, podemos advertir que la utilidad aumenta al aumentar las unidades de aquello que se considere en el eje horizontal, pero que cuanto mayor es la cantidad, el incremento de la utilidad es menor, a tal punto que a partir de cierta cantidad la utilidad comienza a disminuir. Este tipo de funciones de utilidad (cóncavas) corresponde a las personas que *no son amantes del riesgo*. En cambio, si la función de utilidad es como la que se muestra en la Figura 2, podemos advertir que también la utilidad aumenta al aumentar la cantidad del bien considerado en el eje horizontal, pero que cuanto mayor es la cantidad, mayor es el incremento de la utilidad. Este tipo de funciones de utilidad (convexas) corresponde a las personas que son *amantes del riesgo*.

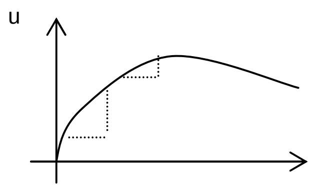


Figura 1

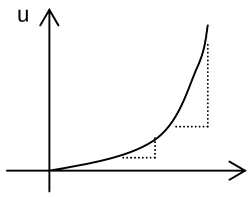


Figura 2

¿Cómo será la función de utilidad de Juan respecto a la cantidad de dinero, en el contexto de usarlo para estar presente en el concierto de Pavarotti? Considerando dólares en el eje horizontal, probablemente sea convexa de 0 a 20; tenga una discontinuidad fundamental en 20 (un salto) y luego sea cóncava a partir de 20. (La discontinuidad en 20 se explica considerando que al obtener los 20 dólares ya puede ingresar al concierto y eso le produce un salto en su nivel de satisfacción.)

El teorema de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern

Antes de enunciar el teorema, hagamos ciertas precisiones y adoptemos algunas notaciones:
En general, llamaremos una "lotería" a una expresión que nos resuma la información correspondiente a obtener ciertos "premios", con la probabilidad correspondiente para ello; así en el caso del Problema 4, tenemos dos loterías, que podemos representar por A y B:

A = [20, -1; 1/2 , 1/2] (Para el "premio" 20 se tiene la probabilidad 1/2 y para el "premio" -1 se tiene la probabilidad 1/2.)
B = [100 000, -50 000; 1/2 , 1/2]

En el Problema 6, Juan está ante una lotería que podemos representar por J:

J = [120, 0; 2/3 , 1/3]

En general, una lotería L en la que hay n posibles premios x_1, x_2, ... ,x_n con las n correspondientes probabilidades p_1, p_2, ... ,p_n de obtenerlos, estará representada por:

$L = [x_1, x_2, \ldots ,x_n; p_1, p_2, \ldots ,p_n]$

Si hay únicamente dos posibles premios, puede simplificarse la notación escribiendo sólo p en lugar de p_1 y p_2, pues obviamente, $p_2 = 1 - p_1$; así, es más sencillo escribir
A = [20, -1; 1/2] ; B = [100 000, -50 000; 1/2] ; J = [120, 0; 2/3]

Llamaremos Γ al conjunto de todas las posibles loterías de un individuo que está ante un problema de elección y asumiremos que en él se cumplen ciertos axiomas:

<u>Axioma 1</u>:
El individuo tiene en Γ *una relación de preferencia; es decir, una relación binaria que es completa y transitiva*.

La relación de preferencia la representaremos por $\succsim$; así,

$L_1 \succsim L_2$ significa que L_1 *no es peor* que L_2 , o L_1 *es por lo menos tan preferida como* L_2.

Esta comparación puede establecerse en cualquier par de loterías de Γ (es completa).
Si $L_1 \succsim L_2$ y $L_2 \succsim L_3$, entonces $L_1 \succsim L_3$ (es **transitiva**).

Además:

- Si $L_1 \succsim L_2$ y $L_2 \succsim L_1$ entonces el individuo *es indiferente* entre L_1 y L_2, lo cual denotamos por $L_1 \sim L_2$.
- Si $L_1 \succsim L_2$, pero no se cumple que $L_2 \succsim L_1$, entonces el individuo *prefiere* L_1 a L_2, y lo denotamos por $L_1 \succ L_2$.

Se puede demostrar que las relaciones $\sim$ y $\succ$ son también transitivas.

<u>Axioma 2.</u>
Si L_1 no es peor que L_2 y L_2 no es peor que L_3, entonces el individuo es indiferente entre la lotería L_2 y alguna lotería que tenga a L_1 y L_3 como premios.

En símbolos: si $L_1 \succsim L_2 \succsim L_3$, entonces existe alguna probabilidad p con la cual para el individuo se cumple $[L_1, L_3 ; p] \sim L_2$. (Suele conocerse como “axioma de continuidad”.)

<u>Axioma 3.</u>
Para toda lotería compuesta por otras loterías, existe una lotería no compuesta, tal que el individuo es indiferente entre la compuesta y la no compuesta.

Aclaremos con símbolos, considerando sólo loterías con dos premios:

Si $L_1 = [x_1, x_2; p]$ y $L_2 = [x_1, x_2; q]$, llamamos *lotería compuesta* a $M = [L_1, L_2; r]$.

El axioma nos dice que existe una lotería no compuesta N tal que $M \sim N$; es decir, el individuo es indiferente ante la lotería M o la lotería N.

<u>Axioma 4</u>.
Si el individuo prefiere la lotería L_1 a la lotería L_2 ,también preferirá una lotería compuesta que le ofrezca L_1 con probabilidad p ante cualquier otra que le ofrezca L_2 con la misma probabilidad p. Si el individuo es indiferente ante las loterías L_1 y L_2, también lo será ante una lotería compuesta que le ofrezca L_1 con probabilidad p y cualquier otra que le ofrezca L_2 con la misma probabilidad p.

En símbolos:

- Si $L_1 \succ L_2$ y $M_1= [L_1, L; p]$, $M_2=[L_2, L; p]$, donde L es una lotería cualquiera de Γ ,entonces $M_1 \succ M_2$.
- Si $L_1 \sim L_2$ y $M_1 = [L_1, L; p]$, $M_2= [L_2, L; p]$ donde L es una lotería cualquiera de Γ, entonces $M_1 \sim M_2$.

Con esta axiomatización introducida en el conjunto Γ de todas las loterías de un individuo, ya se puede demostrar el siguiente teorema de von Neumann y Morgenstern, que es un *“teorema de representación*”, al mostrar que una estructura no numérica puede ser representada numéricamente.

<u>Teorema.</u> *Existe una función u de valores reales definida en el conjunto Γ tal que*:

i) $u(L_1) > u(L_2) \Leftrightarrow L_1 \succ L_2$

ii) $u(L_1) = u(L_2) \Leftrightarrow L_1 \sim L_2$

iii) $u([x_1, x_2, ..., x_n; p_1, p_2, ..., p_n]) = p, u (x_1) + p_2 u(x_2) +p_n u(x_n)$

Observaciones:

1. Notemos que el teorema garantiza la existencia de una función de valores reales que

nos permite "traducir" a números la relación de preferencia establecida en las loterías; es decir, la posibilidad de asignar números a las loterías de modo que el individuo tenga una "escala de utilidades" que le permita "medir" sus preferencias. Así, prefiere una lotería a otra si y sólo si el número asignado a la primera es mayor que el asignado a la segunda, y que el individuo es indiferente ante dos loterías si y sólo si a ambas se le asignó el mismo número.

2. La propiedad (i) de la función de utilidad *u* se conoce como propiedad de *preservación del orden* y la propiedad (iii) como propiedad de *linealidad*. Ambas propiedades combinadas se conocen como propiedad de la *utilidad esperada*. Notemos que (iii) nos dice que la utilidad de una lotería es igual a su utilidad esperada.

3. Tiene sentido aplicar la función *u* a los premios x_i, pues cualquier premio x puede considerarse como una lotería: x = [x, x; p].

4. Un corolario natural de este teorema es que un comportamiento "racional" del individuo lo lleva a resolver sus problemas de elección entre loterías maximizando su utilidad esperada $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$, por lo cual el teorema es conocido también como *teorema de la utilidad esperada*.

5. Del teorema no debemos inferir que el individuo está conscientemente enterado de su función de utilidad. El teorema sólo establece que dados los cuatro axiomas, el individuo se comporta como si fuera un maximizador de los valores esperados de su utilidad. Al tomar una decisión bajo riesgo con este criterio, el individuo está optando por un acto (lotería) cuya utilidad esperada es la máxima de entre todas sus opciones, y como la utilidad del acto, siendo una lotería, es igual a su utilidad esperada, el individuo está optando por el acto de mayor utilidad; o sea, por el que más prefiere.

6. También se puede demostrar lo que podríamos llamar el recíproco de este teorema; es decir, que si existe una función de utilidad *u* que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii), entonces en Γ se cumplen los cuatro axiomas enunciados.

7. Una propiedad muy importante, que flexibiliza el uso de la función de utilidad, es que si $u = u(L)$ es una función de utilidad, también lo es $v = v(L) = a.u(L) + b$, donde a y b son números reales, con la única restricción de ser $a > 0$.

   Esto permite tener mayor libertad en la adopción de escalas de medida de las utilidades y aclarar que, por ejemplo si a una lotería se le asigna el número 2 en una escala y a otra el número 1, no significa que la primera sea doblemente preferida a la segunda, sino, simplemente, que la primera es preferida a la segunda, pues un cambio de escala podría cambiar la proporción, pero no que la primera es preferida a la segunda.

   Con estos nuevos elementos veamos ahora el problema de Juan, cuando sólo tiene 15 dólares y necesitando urgentemente 5 dólares adicionales para entrar a espectar el esperado concierto de Pavarotti se le presenta la oportunidad de participar en un juego en el que puede ganar 5 dólares con probabilidad 1/5 o perder 15 dólares con probabilidad 4/5. Los valores monetarios esperados, ante las opciones de aceptar o de rechazar el juego son:

$$PE_{Aceptar} = 20 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{4}{5} = 4 \text{ (dólares)}; \qquad PE_{Rechazar} = 15 \times 1 = 15 \text{ (dólares)}$$

Analicemos la situación considerando la valoración (subjetiva) que hace Juan a su felicidad en tres casos: a) Estar presente en el concierto (lo cual equivale a tener 20 dólares),
b) Tener 15 dólares ; y c) Perder sus 15 dólares. En ese sentido, supongamos que, en una escala de 0 a 100, hace las siguientes asignaciones:

A tener 20 dólares $\rightarrow$ 80; A tener 15 dólares $\rightarrow$ 10; A tener 0 dólares $\rightarrow$ 5

Sus loterías son, entonces, L_1 = [20, 0; 1/5] (el juego)

L_2 = [15, 15; 1] (mantener sus 15 dólares, sin arriesgarlos)

$u(L_1) = u([20, 0; 1/5])$ = $\frac{1}{5}u(20)+\frac{4}{5}u(0)=(\frac{1}{5})80+(\frac{4}{5})5=20$

$u(L_2) = u([15, 15; 1])$ = $1.u(15)+0.u(15)=(1)10+(0)10=10$

y decidiendo según la utilidad esperada máxima, Juan optaría por aceptar el juego.

Elementos de la teoría de juegos

Juego 1

Carlos propone a sus dos empleados, Arturo y Benito, lo siguiente:

Tengo 60 dólares disponibles para ustedes. Yo haré con ellos lo que ustedes me digan que haga. Sin ponerse de acuerdo, deben hacerme, por escrito, uno de los siguientes pedidos:

P1: Dele 30 dólares a mi compañero. P2: Deme 10 dólares.

¿Es predecible lo que pedirán Arturo y Benito, considerando que sus decisiones son muy racionales?

Veamos: tenemos dos jugadores, cada uno disponiendo de dos estrategias y con pagos que se pueden prever, de acuerdo a las posibles combinaciones de estrategias elegidas. El siguiente cuadro resume esta información:

		B	
		P1	P2
A	P1	(30, 30)	(0, 40)
	P2	(40, 0)	(10, 10)

La racionalidad de los jugadores los llevará a optar, a ambos, por la estrategia P2, con lo cual se aseguran un pago, pero no obtienen lo máximo que podrían obtener.

Este juego presenta una situación muy similar a la del conocido juego "el dilema de los prisioneros" y se llega a la situación de equilibrio (de Nash) observando que hay estrategias estrictamente dominadas y que por ello no serían elegidas por un jugador racional. En este caso P1 es estrictamente dominada por P2 tanto para A como para B, pues los pagos correspondientes siempre son menores.

Hagamos algunas precisiones, formalizando y generalizando:

Definición: Un juego de n jugadores está representado en su *forma normal*, si para cada jugador se especifican sus respectivos conjuntos de estrategias E_i, i = 1, 2, ..., n y sus respectivas funciones de pago u_i, i = 1, 2, ..., n. Tal juego se denota $J = \{E_i , u_i\}_{i = 1, 2, ..., n}$.

Definición: En el juego $J = \{E_i , u_i\}_{i = 1, 2, ..., n}$, consideremos las estrategias e'_i y e''_i del jugador i. (e'_i , $e''_i \in E_i$). Decimos que e'_i está estrictamente dominada por e''_i si para cualquier combinación factible de los otros jugadores, el pago para el jugador i, jugando su estrategia e'_i es estrictamente menor que el pago que obtendría jugando su estrategia e''_i.

Definición: (Generalizable para n jugadores.) En el juego $J = \{ E_i , u_i\}_{i= 1, 2}$, el par de estrategias (e_1^*, e_2^*) es un equilibrio de Nash si se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$u_1 (e_1^*, e_2^*) \geq u_1 (e_1 , e_2^*) \quad \forall\ e_1 \in E_1 \quad \text{y} \quad u_2 (e_1^*, e_2^*) \geq u_2 (e_1^* , e_2) \quad \forall\ e_2 \in E_2.$$

John Nash introdujo este concepto de equilibrio en la teoría de juegos, en 1950, e hizo grandes aportes a esta teoría. Demostró que en cualquier juego finito (tanto el conjunto de jugadores como el conjunto de estrategias de cada uno de ellos son conjuntos finitos) existe por lo menos un equilibrio de Nash. (Debe aclararse que tal equilibrio podría ser con *estrategias mixtas*.) Los valiosos aportes a la teoría de juegos y sus aplicaciones a la teoría económica, hicieron que en 1994 se le otorgue el Premio Nobel en Economía a John Nash, compartido con John Harsnayi y Reinhard Selten.

Otro juego muy conocido, “la batalla de los sexos”, muestra que existen juegos con más de un equilibrio de Nash. Es muy interesante trabajar con estrategias mixtas, introduciendo probabilidades, tanto para este tipo de juegos como para los de suma nula.

Referencias bibliográficas

Binmore, K. : Teoría de juegos. Mc Graw Hill. 1993.

Dutta, P.: Strategies and games. Theory and practice. MIT. 1999.

Feibes, W.: Introducción a las matemáticas finitas. Limusa. 1979.

Resnick, M.: Elecciones. Una introducción a la teoría de la decisión. Gedisa. España. 1998.

Precálculo con Laboratorio.

Julia E. Rodríguez
Departamento Matemática-Física
Universidad de Puerto Rico
Recinto de Cayey

Resumen

En este curso corto, estaremos trabajando con algunas secciones de un libro que actualmente utilizamos en tres grupos del curso de Precálculo, en el Recinto de Cayey de la Universidad de Puerto Rico. Por varios años, el Profesor Waldo A. Torres estuvo ofreciendo el curso de Precálculo usando el concepto de función como herramienta principal en la solución de problemas. A la misma vez, fue escribiendo los apuntes para el curso, el cual desarrolló desde un punto de vista diferente de lo convencional, basándose en la descripción y análisis del cambio, usando el concepto central de razón de cambio. En el libro, se introduce el estudio de las funciones matemáticas como una herramienta para la construcción de modelos, la observación de patrones y la solución de problemas. Los problemas son planteados con cantidades discretas o continuas y a menudo, requieren métodos de aproximación y estimación. También es necesaria la calculadora gráfica como instrumento para explorar y analizar datos y gráficas para resolver problemas. En un documento separado, el profesor ha escrito múltiples actividades de exploración y análisis que se utilizan en lo que él llamó Laboratorios de Precálculo. Estas experiencias de laboratorio se ofrecen semanalmente y tienen dos horas de duración. Los laboratorios profundizan los conceptos tratados en el libro y ofrecen las condiciones necesarias para el aprendizaje cooperativo, la formulación de hipótesis, la argumentación y el análisis.

El curso corto tratará de temas y experiencias de laboratorios de lo que nosotros llamamos Precálculo I (que se ofrece mayormente durante el primer semestre académico de cada año), ya que el curso es de un año de duración. Iniciaremos con algunos temas del Capítulo 1 – El Cambio y las Funciones donde se presenta el concepto de función y todos los conceptos fundamentales necesarios para el estudio de Precálculo. Durante el segundo día, trabajaremos con temas del Capítulo 2 – Cuando el Cambio es Constante, donde se modela la razón de cambio constante con la función lineal. Finalmente en el tercer día, trabajaremos con temas del Capítulo 3 – Cuando el Cambio es Exponencial, donde veremos problemas donde el cambio es cada vez mayor o cada vez menor. Durante el curso corto estaremos trabajando con experiencias de laboratorio que complementarán los temas que presentaremos durante cada día. Además les informaremos sobre los resultados que obtuvimos con nuestros estudiantes al examinarlos en cada capítulo.

Bosquejo del curso corto: Pecálculo con Laboratorio

- Capítulo 1: El Cambio y las Funciones; Funciones y sus representaciones; Dominio, campo de valores y evaluación; Funciones y la medida del cambio; Laboratorio: Funciones al azar; El examen y sus estadísticas.
- Capítulo 2: Cuando el Cambio es Constante; Cambio constante y funciones lineales; Punto de vista gráfico; Punto de vista numérico-algebraico; Regresión lineal; Laboratorio: La ruta es según el color; El examen y sus estadísticas.
- Capítulo 3: Cuando el Cambio es Exponencial; El cambio exponencial; Gráficas de funciones exponenciales; Modelos de crecimiento; Laboratorio: Rebotes; El examen y sus estadísticas.

Aplicación de las Destrezas del Pensamiento en el Aprendizaje de la Matemática para Maestros del Nivel Primario/Elemental/Básica.

Carmen Evarísta Matías de Rodríguez
Carmen.matias@codetel.net.do
Universidad Autónoma de Santo Domingo, UASD.
República Dominicana

Introducción

Para los maestros de educación Primaria/Elemental/Básica es una preocupación permanente el aprendizaje de la matemática de sus alumnos en el salón de clase, por todos los mitos que se han creado entorno a ella, mitos falsos o verdaderos que obstaculizan la mejor manera de obtener el aprendizaje de la misma.

En este curso se pretende ofrecer algunas herramientas al maestro de educación básica para posibilitar la discusión, el debate sobre los modelos presentados sobre la importancia de desarrollo de la destrezas del pensamiento en el aprendizaje de la matemática.

Desarrollo

Para presentar las destrezas del pensamiento es conveniente señalar que desde el siglo XIX, el educador Eugenio María de Hostos, decía “Hay que educar la razón” y educar la razón, no es más que conducir a las personas a pensar.

Esto conlleva desarrollar un método asociada a la naturaleza del individuo “...si el organismo racional es una resultante de facultades y operaciones del entendimiento que constituyen reunidas la capacidad de funcionar y las funciones para poder contribuir a su desarrollo” con esto Hostos señala que hay que conocer el funcionamiento del entendimiento (inteligencia) para desarrollar el pensamiento, pues no todos los seres humanos tienen la misma capacidad (facultad) para desarrollar el pensamiento.

Los especialistas de la pedagogía buscan alternativas para facilitar el aprendizaje de los alumnos, y en el caso específico, el área de Matemática Educativa. Entre las alternativas están las metodologías para el desarrollo de las destrezas del pensamiento.

Los seres humanos aprenden a pensar, a usar sus destrezas de pensamiento, cuando se enfrentan a situaciones nuevas, problemáticas o interesantes que los retan e imitan a pensar. (Villarini 91).

Según el Dr. Villarini el pensamiento requiere de estructura y energía. Energía para activarse y estructura para organizarse. Las destrezas del pensamiento se aprenden pensando, a través de la continua práctica en situaciones significativas y pertinentes, nos invitan a observar, analizar, razonar, etc. Mientras más oportunidades se le proporcione al estudiante para ejercitar sus destrezas, mayor probabilidad tiene para desarrollarlas.

Una de las maneras más efectivas en que ocurre el desarrollo natural de las destrezas de pensamiento es cuando el niño experimenta la necesidad de comunicarse o interacturar con otros seres humanos, la cooperación es una forma de las fuerzas más efectiva para el desarrollo de las destrezas. También nos plantea, que cuando sus errores al observar, interpretar, analizar, encuentra algo así como un entrenador intelectual que le ayuda a mejorar sus destrezas de pensamiento.

En una situación de aprendizaje se debe tomar en cuenta el entorno natural y social (Piaget) y el contexto histórico – cultural (Vigostky) estos aspectos afectan de forma positiva o negativa en el aprendizaje de los alumnos, así como estamos interesados en desarrollar las destrezas del pensamiento para que ocurra un aprendizaje auténtico, estos planteamientos de Vigostky y Piaget son determinantes.

Para las destrezas del pensamiento hay que utilizar metodologías y métodos para su efectividad en el salón de clase.

Según Hostos "...es necesario desarrollar el método natural de la razón y el sistema bajo el cual se ha concebido ese método natural, en modos, medios o métodos particulares que son y deben ser en realidad los recursos prácticos a que son y deben ser en realidad los recursos prácticos a que se apele para aplicar el sistema filosóficas que se haya concebido y para exponer y explanar el método natural, o lo que vale, el conjunto de medios de que la naturaleza se ha valido para organizar el entendimiento humano y para dirigirlo en busca y adquisición de nociones y conocimientos".

Con esta cita del educador Eugenio María Hostos se sintetiza la importancia vital que él le da al entendimiento humano (inteligencia(y los diferentes modos que provee la naturaleza para desarrollar el pensamiento. Por lo tanto no ha perdido urgencia estos planteamientos del final del siglo XIX, sino que se ha integrado a los nuevos enfoques de la actualidad, adecuándolo a la realidad actual de la formación que se realiza en el aula.

Las metodologías tienen como propósito crear en el salón de clase las condiciones que sucitan el desarrollo del pensamiento. El estudiante aprende a pensar a través de la metodología y haciéndola suya. El fin último es que el estudiante se entrene a si mismo, aprenda a preguntar, a metacognezar y aprenda a enseñar, y aprenda de sus compañeros (Villarini, 1991).

Las metodologías para el desarrollo del pensamiento son procedimientos para organizar las interacciones y comunicaciones entre educadores y educadoras de modo que se active y fomente el modo sistemático del desarrollo de las destrezas del pensamiento.

Las metodologías que se presentan en este trabajo tienen en común:

1. Activan y estructuran el proceso de pensamiento del estudiante.
2. Fomentan la creación de un clima de libre expresión y reflexibilidad.
3. Facilitan la interacción, retrocomunicación y evaluación entre el educando y educadores al hacer público el proceso de pensamiento.
4. Permiten el modelaje intelectual y la interiorización de modelos.

Para la aplicación de las destrezas en el aprendizaje de los alumnos es fundamental conocer las diferentes metodologías para el desarrollo del pensamiento, entre esas metodologías podemos citar:

1. Estrategia de enseñanza ECA (Exploración –Conceptualización-Aplicación).
2. Metodología de la pregunta.

La estrategia de enseñanza <u>ECA</u> es un marco conceptual general para plantear problemas, determinar necesidades y tomar decisiones educativas de manera experimental, sistemática y estratégica (Villarini 1991).

La estrategia <u>ECA</u> parte de los siguientes supuestos acerca de la naturaleza y las condiciones del aprendizaje:

1. Aprender es un acto de pensamiento.
2. El conocimiento es algo que el estudiante construye a partir de los estímulos e información recibida.
3. La información que le suministre al estudiante, debe ser significativa para él.

La estrategia <u>ECA</u> está compuesta por tres fases importantes: Exploración – Conceptualización y Aplicación.

Fase de Exploración:

Tiene como propósito realizar una evaluación como se encuentra el estudiante, al iniciarse el proceso de enseñanza – aprendizaje. Por medio de las actividades de exploración el estudiante piensa y se prepara para procesar la nueva información. Las actividades exploración estimulan el uso del pensamiento y la metacognición a través de su propia participación, el estudiante reconoce su capacidad de pensar, de procesar información y fortalecer su autoestima como persona capaz de pensar, producir conocimiento y aprender.

Fase de Conceptualización:

Se facilita a que el estudiante desarrolle o enriquezca un concepto, destrezas o valor. A partir del conocimiento activado en la exploración, el/la maestro (a) presenta la información o guía al estudiante en su búsqueda, para que éste enriquezca o desarrolle su concepto respecto al asunto que se está estudiando.

La conceptualización es un proceso de enseñanza aprendizaje donde el estudiante busca o recibe y organiza información para producir nuevos conceptos mediante el ejercicio de las destrezas y actitudes. El resultado de la conceptualización es un mejoramiento de las destrezas, un fortalecimiento de las actitudes y un desarrollo de conceptos nuevos o previos. En esta fase se desarrolla la evaluación formátiva.

Fase de Aplicación:

En la fase de aplicación se consolida el desarrollo del concepto. La información presentada por el/la maestro (a) ha sido procesada y transformada en concepto. Si en efecto el estudiante ha desarrollado el concepto, puede aplicar o transferir lo aprendido a nuevas situaciones y problemas.

La fase de aplicación consiste en enfrentar al estudiante a tareas intelectuales, como descubrir, explicar, analizar o solucionar problemas, utilizando el concepto desarrollado. En esta fase está presente la evaluación sumativa.

Metodología de la Pregunta:

El constructivismo está basado a que los alumnos construyan su conocimiento, pero Socrátes en la antigüedad planteaba que la tarea del educador era ayudar al estudiante a parir sus ideas y la forma en que esto se lograba era a través de preguntas. El uso de la pregunta y el diálogo socrático actualmente encuentran la expresión en diversas corrientes del movimiento del pensamiento critico.

Dentro de la taxonomía que presenta Villarini (1990 – 1991) se observa:

1. Estilo al que responda las preguntas: Inhibe respuesta o estimula respuesta.

Las preguntas inhibidoras son aquellas que sirven de mecánica de control y autoritario con el que el/la maestro (a) consciente o inconscientemente asocia a su rol profesional, mientras que las preguntas estimuladoras, por el contrario, responden a un estilo orientado hacia el diálogo, la participación y la solidaridad. Este estilo de pregunta crea en el salón de clases una atmósfera de autoestima cognitiva de libre inquirir de expresión y riesgo. Este estilo crea pues una de las condiciones para activar y desarrollar el pensamiento.

2. Propósito de la pregunta.

El maestro puede estar interesado en que los estudiantes proporcionen una respuesta a corto plazo o puede estar interesado en provocar en el estudiante un proceso de búsqueda de inquirir, de descubrimiento o solución de problemas. En este caso no espera una respuesta inmediata sino que estimula al estudiante a investigar, a pensar.

3. Tipos de preguntas.

Las preguntas pueden ser clasificadas en términos de su tipo, es decir de la clase de proceso de pensamiento y respuesta que suscitan.

Preguntas $\begin{cases}\text{Convergentes}\\ \\ \text{Divergentes}\end{cases}$

Preguntas **convergentes** limitan o cierran el ámbito de acción del pensamiento, lo encarrilan hacia respuestas determinadas que el maestro anticipa. La pregunta convergente tiene la ventaja de que facilitan la cuantificación, calificación y control de aprendizaje, es por ello dominan en sistema que miden eficiencia en términos de resultados medibles cuantitativamente y buscan discriminar, para promoción social y educativa.

Preguntas **divergentes** liberan o abren la radio de acción del pensamiento, lo estimulan a la búsqueda de diversas respuestas y caminos para llegar a ellas. Están asociados a las conjeturas matemáticas cuyos problemas no responden u obedecen a una sola respuesta.

Es una pregunta que alimenta la curiosidad, creatividad y criticidad del estudiante. Este tipo de pregunta es propia de proyectos de investigación, de ejercicios de laboratorios y del diálogo socrático.

4. Nivel de Preguntas.

El/la maestro (a) que busca orientar su enseñanza al desarrollo del pensamiento eficaz y crítico debe hacer preguntas que estimulen la activación, no solo de las destrezas simples, sino también de las destrezas complejas.

Preguntas de Destrezas Simples: Recordar/observar/comparar y contrastar/ordenar.

El nivel de estas preguntas es recopilar, organizar e informar.

Ejemplo: ¿Qué tiene de semejanza un cuadrado y un rectángulo?

¿ Cuál de los siguientes números es múltiplo de 5: 21, 32, 25, 31?

Preguntas Destrezas Complejas: Inferir/Analizar/Evaluar/Solucionar Problemas/ Tomar Decisiones.

El nivel de estas preguntas es ir más allá de la información (reorganizar).

¿Cuál de los siguientes procedimientos matemáticos es más efectivos para determinar ...?

En la aplicación de las destrezas del pensamiento en el aprendizaje de matemática, seguiremos el modelo presentado por Movimiento Pensamiento Crítico Puertorriqueño.

En primer lugar trabajaremos con las destrezas básicas del pensamiento. En estas destrezas las clasificaremos en dos (2) categorías. Destrezas Básicas.

1. Categoría Destreza: Percibir.
a) Observar/Recordar b) Comparar/Contrastar.

Actividad de Exploración

Paso I. Se elige una tirilla cómica para describir lo que se observa en cada cuadro (Ver figura, Pág. 2)
Paso II. Se compara con la situación de un estudiante en la escuela.
Paso III. Se determinan las similitudes y diferencias con respecto a lo que observa en

tirillas en el salón de clases el alumno (situación de aprendizaje).

Conceptualización

Destreza: Percibir

a) Observar/Recordar

1. Las destrezas de observación se desarrollo a través de los sentidos.
2. Se establecieron las características generales o específicas que serán observadas.
3. Establece relación entre lo observado y las experiencias previas.

b) Comparar/Contrastar

1. Significa examinar ideas para demostrar sus parecidos y diferencias.
2. Su propósito es organizar las ideas del concepto que ya fueron observadas y recordadas.
3. Se recomienda que sea el alumno y no el maestro quien ejercite las destrezas de comparar y contrastar, utilizando los conocimientos y experiencias previas.

Actividad de Aplicación.

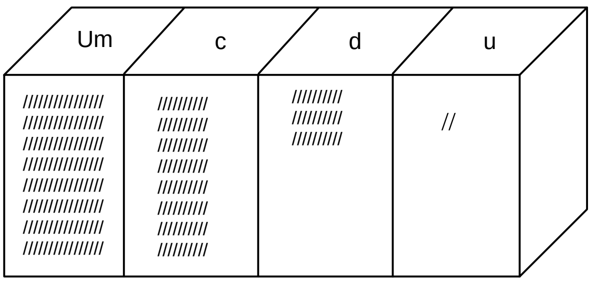
Elegir un tema de matemática para desarrollar la destreza Observar/Recordar – Comparar/Contrastar.

2da. Categoría Destreza: Concebir.
1. Ordenar
2. Agrupar/Rotular
3. Clasificar

Tema: Sistema de Numeración.

Exploración de la Destreza Concebir

Sistema de numeración. **Valor de posición.**
Recurso: Caja de valores descripción. Se coge una caja (20 cm. X 30 cm.) y realiza tantas divisiones como valores de posición se desee enseñar.



u = Unidad
d = Decena
c = Centena
Um = Unidad de Mil

Luego los alumnos salen al entorno a recoger palitos o el maestro puede proporcionar palitos.

Se formarán paquetes de diez unidades (usando para esto hilo/banditas).

1°. Paso. Cada alumno tendrá en sus manos de 12 a 14 palitos. Los palitos sobrantes se colocan en la caja de valores en el lugar correspondiente a las unidades.

2°. Paso. Los paquetes de diez unidades se colocarán en el lugar de las decenas.

3°. Paso. Se contarán cuantos palitos se colocarón en el lugar de las unidades; si pasan de diez se formará un paquete de diez (usando hilo/bandita) y se colocará en el lugar de las decenas; los palitos sobrantes se dejan en el lugar de las unidades.

4°. Paso. Se contarán los paquetes (diez unidades) que se encuentran en el lugar de las decenas y si llega de diez los paquetes se pasarán al lugar de las centenas en caso de quedar algunos paquetes se dejan el lugar de las decenas.

5°. Paso. Así sucesivamente se hará con las centenas y las unidades de mil. También podrán hacer equivalencia entre:

- 10 unidades = 1 decena.
- 10 decenas = 1 centena = 100 unidades.
- 10 centenas = 1 unidad de mil = 1000 unidades.

Conceptualización

Destreza: Concebir

- El factor clave en esta destreza está en anticipar qué criterios secuenciales se utilizaran para organizar ideas relacionadas entre sí para la formación de un concepto.
- Es recomendable que el estudiante ordene la mayor cantidad posible de características a partir de sus experiencias y conocimientos.
- Formar grupos a partir de características comunes esenciales.
- Se recomienda que el estudiante discuta su agrupación con el rotulo asignado con compañeros de clase y hasta con el maestro, si hubiera confusión en la ejecución.
- Explicar con razones la agrupación formada en relación al nombre asignado.
- Es recomendable que el estudiante reflexiones sobre las razones que tiene para agrupar y al rotular haya correspondencia con el criterio general establecido en el procedimiento.
- Describir el sistema o principio organizador utilizado para la clasificación.
- Seleccionar uno de los grupos y explicar cómo se distingue de los demás.

Estas destrezas permitirán ordenar – agrupar – rotular y clasificar según el valor de posición que se desee enseñar y es una excelente actividad para aprender el valor de posición que tanta dificultad ofrece a nuestros estudiantes.

Además nuestros alumnos podrán verificar el sistema de numeración decimal, encontrarán la respuesta de el por qué el sistema numeración es decimal.

Aplicación

Seleccionar un contenido matemático aplica los pasos para el desarrollo de la destreza del pensamiento concebir.

Destrezas Complejas de Pensamiento

Estas destrezas tratan de que el alumno profundice su reflexión y pueda utilizar su pensamiento para un mejor aprendizaje en las matemáticas.

Actividad de Exploración

Tema: Números Enteros.

Estas son las temperaturas promedios de algunas ciudades del Continente Americano del mes de Febrero 2000. (Fuente: Periódico El Siglo, R.D.)

Ciudades	**Temperaturas**
América del Norte	
1. Atlantic City	-3
2. Boston	-2

3.	Chicago	-1
4.	Los Angeles	6
5.	Washington	-4
6.	Ciudad de México	7
América Central		
7.	Guatemala	11
8.	Santo Domingo	19
9.	Puerto Rico	22
América del Sur		
10.	Bogota	11
11.	Santiago de Chile	11
12.	Río de Janeiro	23

a) Organizar las temperaturas de mayor a menor
Contesta las siguientes preguntas: ¿Cuál fue la mayor temperatura? ¿Cuál fue la menor y por qué? ¿Hubo valores por debajo de cero? ¿Cuándo existían valores menores que cero que nombres recibían? – Representa las temperaturas en la recta numérica.
b) Explica el cambio de valores de las temperatura ¿Cuáles son las ciudades que la posición bajó a cero? ¿Hay algunas diferencias entre los números? ¿Cuáles?
c) Saca sus conclusiones.
d) Discute con tus compañeros sus respuestas y sus conclusiones.

Conceptualización. Destreza: Inferir – Preguntar.

- A partir de la información recopilada y organizada se va más allá de los datos ofrecidos y se produce nueva información.
- El estudiante debe haber recopilado y procesado cierta información para luego seleccionar aquellas ideas del concepto que sean pertinentes inferir.
- El estudiante debe mostrar autonomía intelectual para hacer inferencias requeridas y, a su vez, debe comparar sus inferencias con compañeros para enriquecerlos o modificarlos.
- Somete preguntas a si mismo (estudiantes) o al maestro para solicitar la información que se requiere en la clarificación del concepto bajo estudio.
- Con la destreza de preguntar el estudiante aplica lo que sabe a lo que no sabe, basándose en lo observado, recordado y procesado.
- El estudiante debe someter preguntas dirigidas mayormente a obtener información al nivel de procesamiento, de inferencias o de metacognición y no de recopilar datos; de lo contrario el nivel de preguntas se delimita al nivel más bajo del pensamiento.
- Hacer preguntas por parte del estudiante es con el propósito de hacer preguntas, es descubrir nuevos conocimientos a partir de lo que se conoce por consiguiente es el estudiante el que debe ir en búsqueda de la contestación de la pregunta.

Aplicación

Formular un modelo de las destrezas de pensamiento Inferir – Preguntar en el área de matemática.

2da. Categoría Destrezas Complejas

Destrezas: Solución de problemas - Análisis - Razonar – Evaluar –Toma de decisiones

Actividad de Exploración

Investiga
Los ingresos mensuales de tus padres o tutores, además investiga los gastos mensuales del hogar formado por ustedes.

1. Haz una lista de los gastos fijos y necesidades que se presentan en el hogar durante un mes.
2. Calcula los ingresos de tus padres o familiares que trabajan en el mes.
3. ¿Qué cantidad de dinero aportan par cubrir las necesidades del hogar durante el mes.
4. ¿Qué propondría si no hay equilibrio entre los ingresos/aportes y los gastos fijos/necesidades del hogar?

Conceptualización

Destrezas: Predecir y Análisis/Razonamiento/Solución de problemas.

- Predice
  - Anticipa las posibles implicaciones de conocimiento que va adquiriendo.
  - Predice posibles consecuencias a una situación nueva.
  - Enuncia las razones para que una consecuencia pueda ocurrir.
  - Dice las condiciones bajo las cuales va a ocurrir.

- Análisis
  - Separa las partes constitueyentes de una idea.
  - Se establece el objetivo sobre el concepto.
  - Describe la estructura que hace el concepto.
  - Explica razones del progreso seguido.

- Razonamiento
  - Infiere una verdad que implica otra.
  - Da razones para sostener lo que piensa.
  - Tiene una estructura, premisa y conclusión.

- Solución de Problemas
  - Consiste en un método de investigación sistemática, para dar contestación a interrogantes o dudas.
  - Este proceso conlleva: Reflexión – creatividad – aplicación práctica.
  - El planteamiento teórico – práctico o moral.
  - Este proceso consiste en clarificar: Problemas – Investigación.

Etapas para resolución de un problema.

Dentro de la solución de problemas también presentamos las etapas para resolución de un problema de los matemáticos costarie Víctor Bujan y María de los Ángeles Jiménez.

a) Entender el problema.
b) Diseñar un plan para resolución.
c) Aplicar el plan y resolver el problema.
d) Repasar la solución y el problema mismo.

Fuentes (Víctor Bujan y María de los Ángeles Jiménez) “Estos citan a Polya (1980) y Leblanc (1980).

Primera Etapa

En la etapa del entender el problema, el maestro podría formular preguntas tendentes a lograr que el niño enfoque su atención en la información y en las condiciones dada en el problema.

Segunda Etapa

1. Diseñar un plan para la resolución
2. El maestro debe dar a conocer al niño el mayor número posible de estrategias de

resolución y debería conseguir tome conciencia consciente del tipo de estrategia que esta a punto de aplicar.

Después de resolver varios problemas el maestro tratará de que el alumno sugiera formas de resolver el problema, o sea proporcionar su propia estrategias. El maestro puede pedir a sus alumnos algunas ideas de cómo resolver el problema.

Tercera Etapa

Aplicar el plan y resolver el problema

El plan seleccionado en la etapa anterior se llevará a cabo. Aquí la selección esta expuesta a tres riesgos:

1. Que los niños quedan convencidos de que los más importante en la resolución de problemas, es la tercera etapa y la eficiencia de la brevedad con que resuelvan el problema.
2. Que el maestro caiga en la tentación de enfatizar demasiado la importancia de esta etapa restando importancia a las otras etapas.

Cuarta Etapa

Esta es la etapa más importante en la educación del niño en la resolución de problemas matemáticos.

En ella deberán hacerse dos cosas:

1. Una, y la más importante y la que no debería faltar nunca, consiste en repasar cuidadosamente y conscientemente los pasos dados en la resolución del problema.
2. La segunda consiste en crear variaciones del problema que acaba de ser resuelto o crear problemas totalmente nuevos sugeridos por el que los niños acaban de resolver.

Referencias bibliográficas

ANGEL VILLARINI, P.H.D. Manual para la enseñanza de destreza de pensamiento.

Proyecto de educación liberal liberadora (PELL) San Juan, Puerto Rico (1991) (PELL).

RUBEN ESTREMERA, Ed.D. Conocimiento declarativo y procesal para el desarrollo de la destreza de pensamiento. Colección praxis Editorial biblioteca pensamiento critico, 1993.

ANGEL VILLARINI, P.H.D. La enseñanza orientada al desarrollo del pensamiento, según Eugenio María De Hostos. Colección praxis fundamento del curriculum tomo II. Naturaleza de las áreas transversales. Sene INNOVA 2000. Plan Decenal de Educación en acción SEEC 1994.

La Investigación en Resolución de Problemas: Vigencia y Perspectivas.

Dr. Fredy E. González
fgonzalez@ipmar.upel.edu.ve,
fredygonzalez@hotmail.com

Resumen

El desarrollo de las habilidades que poseen los estudiantes para resolver problemas es uno de los propósitos considerados como esenciales del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias en general y de la Matemática en particular. Esto, en cierto modo, explica la presencia de metas asociadas con la resolución de problemas en los programas de las asignaturas pertenecientes a las áreas de Biología, Química, Física y Matemática que se desarrollan en los diferentes niveles y modalidades del Sistema Educativo. De aquí que resulte imprescindible que los docentes que administran tales asignaturas posean una sólida formación en los aspectos teórico-conceptuales y práctico metodológicos que subyacen en el proceso de búsqueda de solución a problemas.

Con base en lo antes expuesto se plantea a la resolución de problemas como una vigente y fructífera área de indagación en el campo de la investigación educativa, particularmente la que asume como su ámbito específico a la educación en Ciencias y Matemática. Se trata de la sistematización, búsqueda, creación, producción y validación de conocimientos, cuyo uso en el aula pueda coadyuvar al mejoramiento de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias y de la Matemática. En esta conferencia se expondrá la resolución de problemas como campo de indagación en el contexto más amplio de la Matemática Educativa como campo profesional de producción de saberes.

Se ofrecerán tres perspectivas, no exhaustivas ni mutuamente excluyentes para el Abordaje de la Resolución de Problemas como Línea de investigación:

(a) Perspectiva Estructural. Aquí se incluyen las investigaciones que asumen a los problemas propuestos como su objeto de estudio; se trata de trabajos en los que el interés principal está colocado en las características específicas del problema (tipo, extensión, ubicación de las incógnitas, relaciones entre sus elementos, etc.) y cómo éstos se asocian con las habilidades de quienes intentan resolverlos;

(b) (b) Perspectiva Didáctica: la resolución de problemas como medio, modelo y fin del trabajo en el aula de matemáticas; y,

(c) (c) Perspectiva Cognitiva: la resolución de problemas desde la perspectiva de los procesos superiores de pensamiento (cognitivos y metacognitivas) que activa el estudiante de matemática cuando se enfrenta a la acción de resolver un problema concebido éste como una tarea intelectualmente exigente

REPORTES DE INVESTIGACIONES

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Análisis del Nivel Académico de los Ingresantes a la Universidad

Delia Belgrano Rawson
deliab@tutopia.com , deliab@frm.utn.edu.ar
Guillermo Herrera Manchón
gwherrera@tutopia.com , gherrera@frm.utn.edu.ar
Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

Resumen:

En la Universidad Tecnológica Nacional se imparte, a los aspirantes a ingresar a la Universidad, un curso -llamado SEMINARIO UNIVERSITARIO- donde se revisan temas considerados necesarios para el desempeño en los estudios y que están incluidos en los cursos regulares de los colegios secundarios. La relación entre egresados e ingresantes es muy baja y preocupante, de modo que se están realizando estudios en dos direcciones: cómo mejorar el sistema para aumentar su eficiencia y estudiar métodos que nos permitan predecir el futuro desempeño académico del aspirante. Para ello se han desarrollado dos tipos de exámenes: uno de ellos trata de medir conocimientos y los otros tratan de medir habilidades, similares a los SAT utilizados en E.E.U.U. En el curso de ingreso 2000 se han sometido a los dos tipos de exámenes a los ingresantes. Con respecto al de habilidades, se espera a fin de año recolectar la información del desempeño académico y establecer alguna relación.

En el presente trabajo se ha tratado de estudiar con detalle la situación inicial y final de los alumnos, con relación a sus conocimientos y capacidades, dentro de la especialidad Matemática, utilizando a tal fin los exámenes de conocimientos previos al curso. Se ha observado una clara relación entre dichos conocimientos y el desempeño posterior en el mismo curso de ingreso. Se han visto confirmadas las conclusiones de otros trabajos anteriores sobre la importancia fundamental de las expectativas y disposición del alumno. Por otro lado, se confirma la previsión de que los exámenes de control discriminan, en mayor o menor grado, el desempeño académico. Se señala la conveniencia de establecer tales exámenes de ingreso, con mayor discriminación con respecto a los conocimientos específicos necesarios.

Objetivos:

En la Universidad Tecnológica Nacional se imparte, a los aspirantes a ingresar a la Universidad, en las carreras de Ingeniería Civil, Electromecánica, Electrónica, Química e Informática, un curso -llamado SEMINARIO UNIVERSITARIO- donde se revisan temas considerados necesarios para el desempeño en los estudios y que están incluidos en los cursos regulares de los colegios secundarios. En el presente trabajo se ha tratado de estudiar con detalle la situación inicial y final de los alumnos, con relación a sus conocimientos y capacidades, dentro de la especialidad Matemática. A tal fin se han implementado exámenes al inicio del curso y durante su desarrollo. Se ha confrontado el resultado con las finalidades establecidas para dicho Seminario. Se ha tratado de establecer una previsión de los resultados del curso, en función de los resultados iniciales. Este estudio es parte de un plan de investigación más completo, que incluye la evaluación del rendimiento académico en la Universidad, las previsiones de desempeño universitario en base a los conocimientos, actitudes y aptitudes previas al ingreso y la importancia que tienen.

Análisis Seminario Universitario 2000 - Curso de Matemáticas

Una vez finalizado el curso, era conveniente una revisión de las actividades realizadas y el resultado final obtenido. A tal efecto, describimos a continuación los objetivos establecidos para el curso y la planificación correspondiente de la actividad del Seminario 2000. En esa planificación se consignaban como objetivos:

1. Introducir al alumno en la actividad universitaria, en cuanto a nivel de conocimientos necesarios, exigencias de rendimiento y libertad acompañada de la inevitable dosis de responsabilidad.
2. Establecer pronósticos del futuro desempeño académico de los aspirantes ya en la Universidad.
3. Habituar al alumno a desarrollar habilidades en cuanto a lectura comprensiva, razonamientos por analogía, alto nivel de abstracción.
4. Comprensión de la importancia de la decisión y voluntad de los participantes para obtener éxito en las tareas emprendidas.

Para ello, se proponían exámenes iniciales, un calendario, un plan de trabajo y los controles correspondientes. Lo propuesto era:

1. Un horario más extenso que en el secundario, con temas más concentrados, exigiendo mayor esfuerzo y decisión, confrontando las expectativas que el alumno pueda tener con el sistema universitario de estudios;
2. Que el peso del esfuerzo estuviera sobre todo en el alumno, ya que la revisión de los temas por parte del docente, sería más reducida que en los otros niveles. El trabajo de aula ponía el acento en la aplicación de los conocimientos matemáticos. Como además se trataba de una revisión de temas del secundario, sin agregar conceptos nuevos, el docente dedicaría un 30 % del tiempo disponible a recordar los conceptos teóricos y el resto se volcaría a la resolución de ejercicios de aplicación, con una importante participación del alumno.
3. Mayor número de controles y exámenes más estrictos.
4. En cuanto a horario, se proponía cuatro semanas, dedicadas a Matemáticas, con clases de martes a viernes, con seis módulos de 45 minutos por día. Se fijaron tres exámenes parciales que se realizarían los días lunes al finalizar la 2º, 3º y 4º semana. Habría dos exámenes globales adicionales. Para la aprobación del curso, el alumno debía obtener como puntaje en cada uno de los tres exámenes parciales, un total mayor o igual al 65 % del puntaje total posible. Para aquellos alumnos que no cumplieran los requisitos anteriores, se establecieron asimismo dos oportunidades adicionales, que se acostumbra designar como Recuperaciones. El temario de estos exámenes adicionales abarcaba todos los temas del seminario, era por consiguiente más extenso, pero requería el mismo porcentaje para su aprobación. Se programaba para 7 y 14 días posteriores a la terminación del Seminario.
5. Los temas incluidos en el seminario eran los siguientes: Operaciones con números reales. Ecuaciones de 1º y 2º grado, sistemas de dos ecuaciones lineales. Operaciones con polinomios y fracciones algebraicas. Coordenadas en el plano. Ecuaciones de 2º grado, circunferencia y parábola. Funciones y sus gráficas, lineales, cuadrática, exponencial y logarítmica. Funciones trigonométricas, aplicaciones a la resolución de triángulos rectángulos.

Previo a la iniciación de las actividades, se tomaron dos evaluaciones, obligatorias, pero no computables para la calificación. La primera evaluación -llamada de diagnóstico- se tomó el primer día de clases, y versó sobre los temas comunes al secundario, el seminario y los cursos regulares. Fue una prueba de conocimientos y tenía las mismas divisiones para su calificación que los exámenes parciales. El procesamiento de esta información sirvió como elemento de diagnóstico de la situación inicial de los aspirantes, nos dio indicaciones de posibles reajustes de la planificación del seminario, permitió medir la eficiencia global del curso de ingreso y el progreso individual de los alumnos.

La segunda -llamada de pronóstico- se concretó el segundo día de clases y consistía en una evaluación de aptitudes, no de conocimientos. Se medía la capacidad de lectura comprensiva, de abstracción, de razonamiento analógico y de razonamiento matemático. Se estructuró en forma similar a los exámenes SAT (Scholastic Aptitude Test) comunes en los E.E.U.U. Estos resultados se utilizarán para establecer un diagnóstico del probable desempeño académico futuro del aspirante, y en este momento están en proceso de elaboración.

Los resultados finales del Seminario Universitario fueron los siguientes:

DATOS GLOBALES

Alumnos inscritos:	1548		
Alumnos presentados al examen de diagnóstico	1080	aprobados	4
Alumnos presentados a algún examen parcial	1160		
Alumnos presentados al primer examen parcial:	1143	aprobados	299
Alumnos presentados al segundo examen parcial:	970	aprobados	276
Alumnos presentados al tercer examen parcial:	837	aprobados	314
Alumnos presentados a la 1º recuperación	732	aprobados	327
Alumnos presentados a la 2º recuperación	359	aprobados	170
APROBADOS TOTALES:			691

RENDIMIENTO ACADÉMICO POR ESPECIALIDAD

Especialidad	Aprobados	Examinados	Relación Aprobados / examinados
CIVIL	68	114	59.6%
ELECTROMECÁNICA	98	141	69.5%
ELECTRÓNICA	98	128	76.6%
QUÍMICA	63	97	65.0%
SISTEMAS	364	665	54.7%

RESULTADOS POR ESPECIALIDAD

En los gráficos a continuación (1 a 4), en ordenadas está representado el puntaje obtenido por los alumnos, separados por especialidad. De abajo arriba, el valor mínimo, el 1º cuartil, la mediana, el 3º cuartil y el valor máximo.

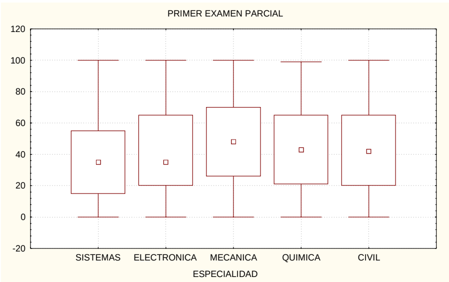


Grafico 1 – 1º parcial – cuartiles

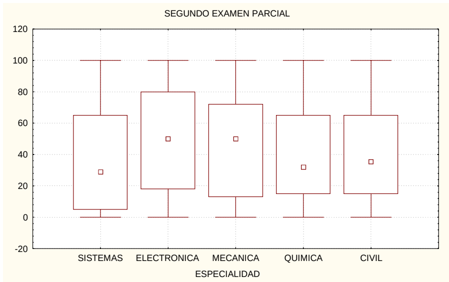


Grafico 2 – 2º parcial - cuartiles

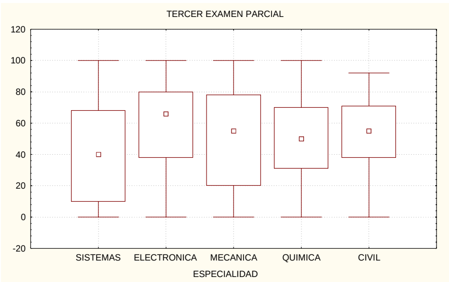


Gráfico 3- 3º parcial – cuartiles

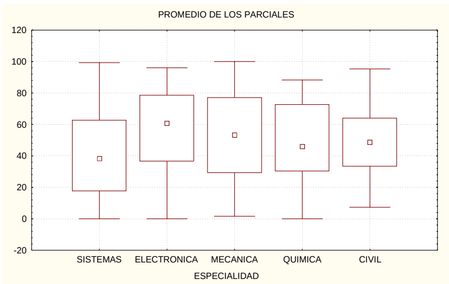


Grafico 4 – Promedio – cuartiles

En los cuadros de texto que acompañan a los gráficos, se comparan, por el método de Duncan, los valores medios. Se marcan con un asterisco aquellos cuya diferencia es significativa, a nivel del 0.05, es decir, la probabilidad de que la diferencia sea debida a diferencias reales de la población es del 95% o mayor. En particular, en el caso de Electrónica y Sistemas, la probabilidad de error al afirmar que son poblaciones diferentes es del 0.04 %

Duncan test; Variable: PROMEDIO (al2000.sta)

Promedio	Sistemas	Electrónica	Mecánica	Química	Civil
	40.954	55.731	52.597	49.632	48.656

Valor p – Las diferencias significativas a nivel p < .0500 están marcadas con asterisco

Valor p	Sistemas	Electrónica	Mecánica	Química	Civil
Sistemas		0.0004*	0.0051*	0.0345*	0.0488*
Electrónica	0.0004*		0.4228	0.1415	0.0990
Mecánica	0.0051*	0.4228		0.4480	0.3454
Química	0.0345*	0.1415	0.4480		0.8029
Civil	0.0488*	0.0990	0.3454	0.8029	

Puede apreciarse rendimientos académicos diferentes entre la especialidad Sistemas, con respecto a Civil, Electrónica, Electromecánica y Química. Estos resultados confirman los otros obtenidos a lo largo de los cursos regulares de nuestra Universidad, y corroboran la conclusión de que la actitud y expectativas de los alumnos son dominantes en el rendimiento académico. [1]

Pero además, podemos señalar que esa actitud, es previa al ingreso a la Universidad. Si consideramos los resultados de los alumnos aspirantes en 1999, (gráfico 5) vemos la similitud de comportamiento. La tabla siguiente corresponde al curso de ingreso de 1999.

Duncan test; Variable: PROMEDIO (pre99-al.sta)

Promedio	Civil	Mecánica	Electrónica	Química	Sistemas
	41.975	43.246	53.821	54.828	36.426

Valor p – Las diferencias significativas a nivel p < .0500 están marcadas con asterisco

Valor p	Civil	Mecánica	Electrónica	Química	Sistemas
Civil		0.7126	0.0009*	0.0004*	0.1075
Mecánica	0.7126		0.0022*	0.0011*	0.0607
Electrónica	0.0009*	0.0022*		0.7702	0.000003*
Química	0.0004*	0.0011*	0.7702		0.000004*
Sistemas	0.1075	0.0607	0.000003*	0.00004*	

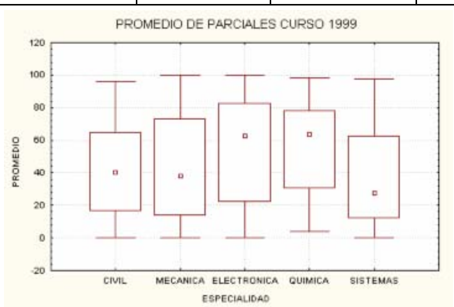


Grafico 5 – Ingreso 1999 – promedio por especialidad

1 Delia Belgrano Rawson - Guillermo W. Herrera Manchón: "Promoción Directa en la Universidad Tecnológica Nacional - Argentina" - Jornadas Académicas 1999 - Instituto Politécnico Nacional - México; "Rendimientos Académicos en Matemática en la UTN" EMCI VIII (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) - Olavarría - 1999 - Argentina

Podemos abundar con otros ejemplos. Los cursos 3 y 19 -durante el Seminario 2000- fueron dictados por el mismo profesor, igual que el 5 y el 20 como asimismo el 6 y 26. Sin embargo, los resultados obtenidos fueron muy diferentes.

Podemos además, comparar rendimientos de profesores con experiencia y capacidad probadas, con profesionales que recién inician su actividad. Por ejemplo, un profesor de probada experiencia dicta dos cursos, con promedios de rendimiento 56.7 y 41.3, otro docente de muchos años sobre todo a nivel secundario, obtiene un promedio de 33.9, mientras dos profesores en su primera tarea docente, que necesitaron ayuda durante el desarrollo del curso, obtuvieron promedios de 41.4 y 40.5, o lo que es lo mismo, la influencia del profesor no parece tan importante como las expectativas y la actitud del alumno al ingresar.

RENDIMIENTOS ACADÉMICOS POR TEMAS

Los gráficos son similares a los anteriores, pero están categorizados por temas. De modo que se separan gráficos (gráfico 6) para el parcial 1 tema 1 (p1t1%), indicando los rendimientos en porcentaje respecto del puntaje máximo posible, y así con el resto de los temas (p1t2, p1t3, etc.) (Gráficos 7 y 8)

PARCIAL 1

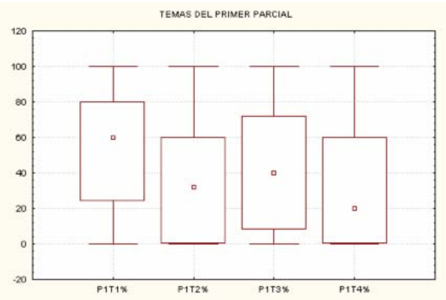


Gráfico 6 – Primer Parcial por temas

Se observa a simple vista que los rendimientos en los temas 1 son superiores a los logrados en los temas 2, 3 Y 4.

TEMA 1: Números reales, operaciones, propiedades, expresión decimal, exponentes y radicales.
TEMA 2: Polinomios en una indeterminada, operaciones, divisibilidad, factorización. Expresiones algebraicas, operaciones, máximo común divisor, mínimo común múltiplo.
TEMA 3: Desigualdades y valores absolutos. Intervalos. Sistemas de ecuaciones de primer grado. Inecuaciones.
TEMA 4: Coordenadas en el plano. Recta, ecuación forma punto-pendiente, forma intersección-pendiente. Rectas paralelas y perpendiculares. Gráficas de ecuaciones de 2º grado: circunferencias y parábolas. Traslaciones.

PARCIAL 2

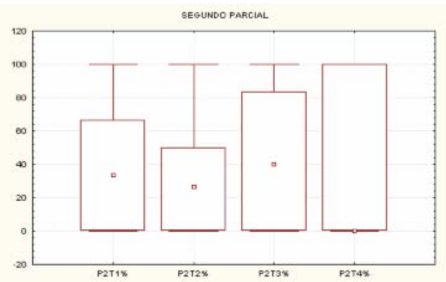
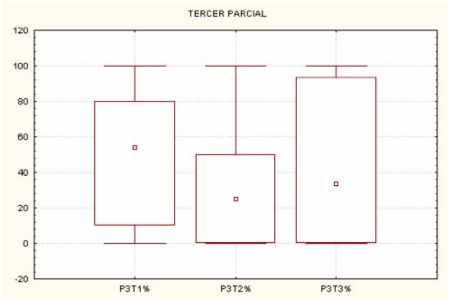


Gráfico 7 – 2º Parcial por temas

TEMA 1: Funciones y sus gráficas: función constante, función lineal, función afín, función cuadrática.
TEMA 2: Función exponencial.
TEMA 3 Función logarítmica.
TEMA 4: Trigonometría. Angulos: sistemas de medición sexagesimal y radial.

PARCIAL 3



TEMA 1: Funciones trigonométricas.
TEMA 2: Identidades trigonométricas
TEMA 3: Aplicación a resolución de triángulos rectángulos.

***Gráfico 8 – 3º** parcial por temas*

La condición para un rendimiento académico eficaz es que la mayoría de los alumnos conozcan los pre-requisitos. Al decir mayoría, se piensa en el orden del 70 a 80 % de los alumnos. A pesar del rendimiento eficaz del seminario, puede observarse que en algunos temas los aspirantes tienen conocimientos muy pobres. Hemos tomado la mediana como medida del rendimiento académico, por la gran dispersión de los resultados de los exámenes. Excepto en el primer punto del programa, operaciones con números reales, y las funciones trigonométricas, en el resto de los temas, el rendimiento promedio está por debajo del 50%, es decir, el 50% de los alumnos obtiene una calificación que va del 0% (parcial 2 tema 4) al 40% o menos (para p1t3 y p2t3).

Para determinar el punto de partida de la situación académica de los alumnos, el primer día del curso se tomó una prueba de diagnóstico, que incluía los mismos temas del seminario, con el mismo grado de dificultad y el valor obtenido se comparó con el promedio de la calificación obtenida por los alumnos en los exámenes parciales. Se excluyó a todos los alumnos que no rindieron la prueba de diagnóstico y/o los tres exámenes parciales. Los resultados se muestran en el siguiente gráfico nº 9

Como puede observarse, la mejoría ha sido significativa.

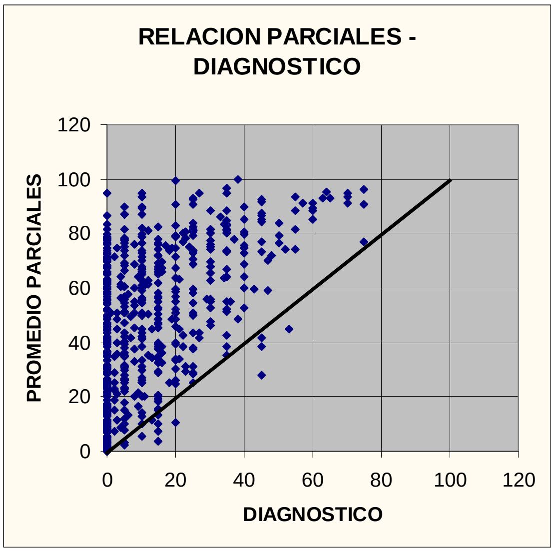


Gráfico 9 – Relación promedio - diagnóstico para el mismo alumno

Es importante ver la evolución futura en base a las pruebas iniciales que rinden los alumnos. En cuanto a las pruebas de pronóstico, éstas serán objeto de un análisis futuro, una vez cumplido el primer año de universidad para los ingresantes. Por ahora, podemos analizar la relación entre la prueba de diagnóstico y los resultados del curso de ingreso. A tal fin, hemos considerado para cada alumno el resultado de su prueba de diagnóstico y si ha conseguido aprobar el curso de ingreso, obteniendo el exigido 65 % de promedio de los exámenes parciales durante el desarrollo del Seminario, sin recurrir a las opciones adicionales. Los resultados analizados se indican a continuación.

En la primera columna figura el resultado del examen de diagnóstico, en la segunda, el valor medio correspondiente, en la tercera, el número de alumnos que han obtenido ese porcentaje, en la cuarta el número de alumnos de ese grupo que aprobó el curso de ingreso en primera instancia y el porcentaje de aprobados de dicho grupo en la última.

diagnostico	media	Total	Aprobados	%aprobados
0<= x < 10	5	708	46	6.5
10<= x < 20	15	144	33	18.6
20<= x < 30	25	85	28	32.9
30<= x < 40	35	54	22	40.7
40<= x < 50	45	29	16	55.1
50<= x < 60	55	11	9	81.8
60<= x < 70	65	7	7	100
70<= x < 80	75	6	6	100

Como puede apreciarse en el gráfico nº 10, del grupo de alumnos que obtuvo menos del 10% en el examen de diagnóstico, sólo aprobó el examen de ingreso el 6.5 %. Si bien existieron exámenes adicionales, estos alumnos necesitaron más tiempo para superar las dificultades, y muchos de ellos no lo lograron. De modo que es evidente que los exámenes de ingreso tiene algún grado de eficacia en la discriminación de la calidad de los alumnos. Puede ser discutible su eficiencia, ya que hay alumnos que obtuvieron menos del 10% y superaron las dificultades, y alumnos que no pudieron mejorar su rendimiento. Pero sin dudas un mal examen de diagnóstico predice un pobre desempeño académico, con un margen de error del orden de 7%, de acuerdo a los presentes resultados.

Considerando ahora los promedios de los resultados de los parciales de los alumnos, y relacionándolos con el examen de diagnóstico, obtenemos la gráfica nº 11 de la derecha.

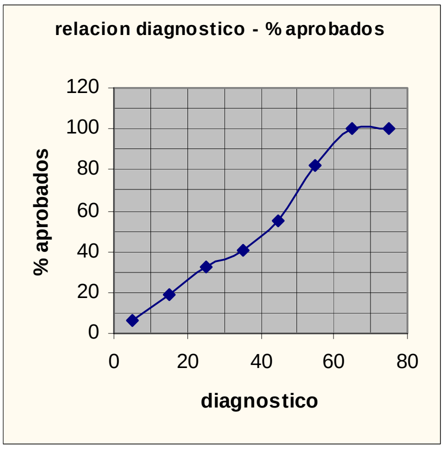


Gráfico nº 10 – Aprobados en 1º instancia – diagnóstico

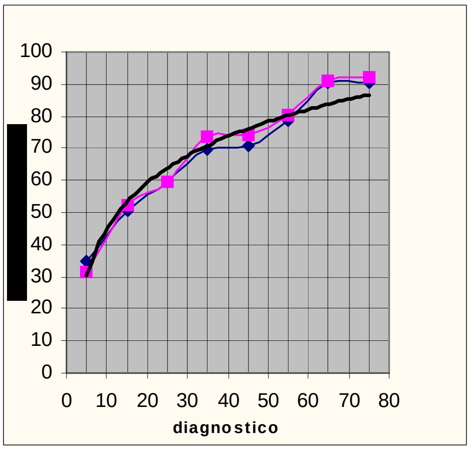


Gráfico nº 11 – relación promedio - diagnóstico

La curva en trazo grueso es la curva de aproximación por mínimos cuadrados. Los puntos de distinto color corresponden, los más oscuros a la media, y los más claros a la mediana. Si efectuamos una regresión lineal, nos daría un coeficiente de correlación R = 0.978 y la ecuación es PROMEDIO = 0.77 * DIAGNOSTICO + 37.3 La correlación es significativa.

Conclusiones

1. Existe una relación clara entre los conocimientos que el alumno aporta cuando asiste a los primeros cursos en la Universidad, con su rendimiento posterior. Es posible mejorar el examen de diagnóstico, incluyendo más temas, con mayor gradación en las dificultades, de modo de lograr una mejor discriminación, y por tanto una mayor eficiencia en la selección de los alumnos que ingresan a la Universidad.

2. Es posible deducir que el rendimiento más alto está en los niveles más elementales de conocimientos, y algunos temas, de gran importancia en las aplicaciones prácticas, son casi desconocidos para la mayoría de los alumnos. Al respecto cabe señalar que la disponibilidad de mayores medios no asegura una mayor comprensión de los temas. Años atrás el tema Logaritmos y Trigonometría exigía el uso de tablas, donde era necesario un aprendizaje previo del manejo de ellas. Ahora, los alumnos disponen de calculadoras y computadoras. Pero no se nota una mejor comprensión del tema.

3. Como hemos señalado en trabajos anteriores, la predisposición es muy importante, sobrepasando la influencia del profesor. Los alumnos están dispuestos a estudiar lo que a ellos les interesa y no lo que ellos necesitan. Por otro lado, como la dificultad se nota sobre todo en las materias llamadas “duras”, es evidente la falta de esfuerzo para sobrepasar las dificultades.

4. Los alumnos, en un porcentaje importante, no parecen estar capacitados para cursos intensivos y necesitan más tiempo para el aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Delia Belgrano Rawson- Guillermo Herrera Manchón - RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICA EN LA UTN – EMCI 8 (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería) – Olavaria – Buenos Aires – R. Argentina – 1999

Delia Belgrano Rawson- Guillermo Herrera Manchón - EVALUACIÓN DEL SISTEMA DE PROMOCIÓN DIRECTA EN LA UTN - JORNADAS ACADÉMICAS – INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL – MÉXICO Mayo 1999

Delia Belgrano Rawson- Guillermo Herrera Manchón - ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN LA UTN – PROMOCIONES 96, 97 Y 98 – JORNADAS ACADÉMICAS – INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL – MÉXICO – Mayo 1999

Aplicaciones de Grafo a la Arquitectura e Ingeniería

Ing. Norma del Valle Quiroga,
Lic. María E. González e Ing. Juan E. Jamroz
Facultad de Arquitectura y Urbanismo y Facultad Regional Tucumán
Tucumán, Argentina

¿Cómo es posible que la Matemática, siendo después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?
Albert Einsten (1878-1955)

Introducción

La teoría de grafos es una rama de la Investigación Operativa que se aplica en el tratamiento de diversos problemas del campo tecnológico, sociológico y económico. Históricamente está comprobado que el hombre ante el planteo de un problema, tiende a hacer un diagrama en el que los puntos (o círculos) representan actividades , etapas de un proyecto o de un proceso , individuos, localidades , etc, unidos éstos por medio de líneas que indican una cierta relación entre ellos. Un matemático alemán D. Konig, fue el primero en proponer en un trabajo publicado en 1936 que tales diagramas recibieran el nombre de grafos, haciendo un estudio sistemático de sus propiedades.

Las aplicaciones más comunes de la teoría de grafos en arquitectura e ingeniería se dan en:

a. Problemas topológicos: las condiciones topológicas en diseño son ciertas cualidades pregeométricas de las formas tales como la vecindad, conexión y la posición relativa respecto fronteras determinadas
b. problemas circulatorios
c. métodos del camino crítico (grafos dirigidos o digrafos)
d. procesos industriales, etc.

Planteo del Trabajo a realizar

El presente trabajo consta de los siguientes ítems:

Actividad 1

Dada una vivienda unifamiliar de dos plantas, ejemplo 2, (ver plano) .

A. Dada una serie de pautas de vinculaciones deseables en planta baja, realizar el grafo correspondiente y proponer una planta que responda al mismo.
B. Dado el plano de planta alta , realizar el grafo correspondiente que servirá de control a los requerimientos establecidos.

Actividad 2

Realizar la **planificación** de la vivienda unifamiliar propuesta en la actividad 2A.

ACTIVIDAD Nº 1

El aporte de la teoría de grafos en la elaboración de un proyecto se destaca fundamentalmente en las etapas previas al anteproyecto. Cuando se cuenta con el programa de necesidades suficientemente elaborado (con requerimientos de interrelaciones necesarias y áreas aproximadas de cada uno de los locales), es sumamente clarificador trabajar con un grafo que relaciones los distintos elementos constitutivos del futuro proyecto, ligando cada elemento con el resto a través de distintos tipos de vínculos, sean ellos:

a. Interconexiones de instalaciones.
b. Comparaciones de niveles acústicos o térmicos

c. Circulaciones
d. Conexiones funcionales (comunicaciones)
e. Servicios comunes
f. Conexiones ambientales (visuales + acústicas)

Una ayuda fundamental en la concreción del anteproyecto de una obra es la representación de un grafo en base a las exigencias del programa de necesidades.
Nuestro trabajo consistirá en:

A. Dada una serie de pautas de vinculaciones deseables en planta baja, realizar el grafo correspondiente y proponer una planta que responda al mismo.

Las pautas pueden ser:

1) Acceso vehicular vinculado al acceso peatonal o entrada principal.
2) Entrada principal vinculada directamente al hall de distribución
3) Hall de recepción relacionado vinculado con el escritorio, estar, comedor y escalera
4) Escritorio cercano a un toilette.
5) Comedor vinculado con zona de servicio: cocina, comedor de diario..
6) Zona de servicio con acceso directo a la puerta de entrada.

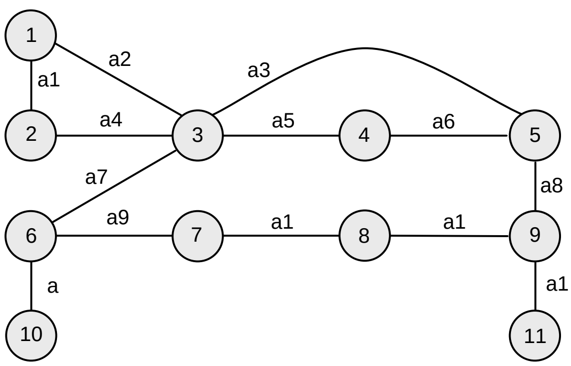
B. Dado el plano de planta alta, realizar el grafo correspondiente que servirá de control a los requerimientos establecidos.

Desarrollo de la Actividad

A) El grafo de planta baja que responde a las necesidades exigidas es:

Grafo A

GRAFO A

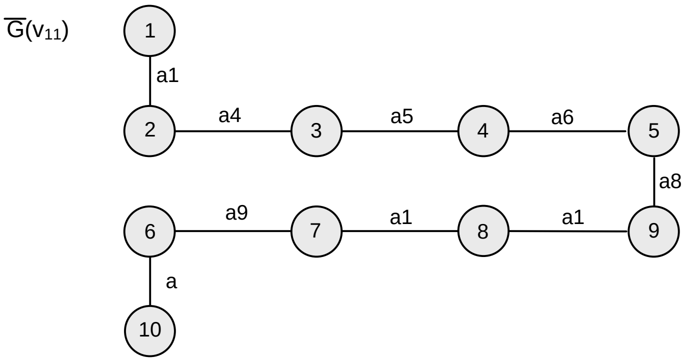


1. Escritorio
2. Toilette
3. Hall distribución
4. Estar
5. Comedor Ppal
6. Entrada Ppal
7. Lavadero
8. Cocina
9. Comedor diario
10. Jardín
11. Baño servicio

La planta correspondiente al grafo dado es:

El grafo es simple. Es conexo. No es ponderado. Es un grafo plano. Tiene 11 vértices y 13 aristas.
Se cumple la propiedad: $\sum g(vn) = 2. \# A$; $2+2+5+2+3+3+2+2+3+1+1 = 2. 13$; $26 = 26$.
Como tiene un número de vértices de grado impar mayor que 2 (hay 6 vértices de grado impar) no posee circuito ni camino euleriano.
Además no podemos determinar un camino hamiltoniano ya que no puedo pasar por todos los vértices una sola vez.

Si eliminásemos el vértice 11 o sea si formamos el **subgrafo** $G(v_{11})$ recién podríamos hacerlo. Este sería:

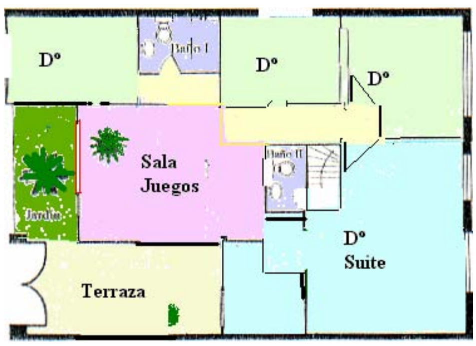


Camino hamiltoniamo: a1, a4, a5, a6, a8, a11, a9, a10, a9, a12.
Podemos realizar la representación del grafo A mediante una matriz de adyacencia (1)
y la matriz de incidencia (2):

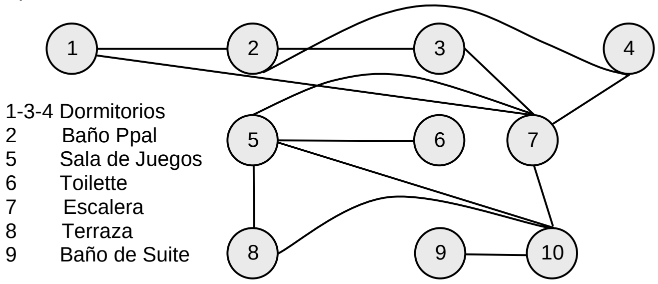
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	4
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	5
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	6
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	8
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	11

*a*1	*a*2	*a*3	*a*4	*a*5	*a*6	*a*7	*a*8	*a*9	*a*10	*a*11	*a*12	*a*13	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	8
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10

B) La planta que responde a las necesidades exigidas por el propietario es:



El grafo correspondiente a la misma es:

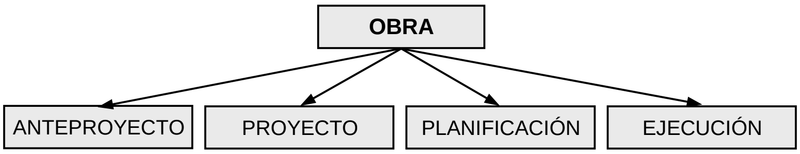


Acá podemos "controlar" que se cumplen las necesidades requeridas:

1. Dormitorios con baño principal, con escalera y salón de juegos-estar secundario
2. Dormitorio en suite con escalera, con terraza
3. Salón de juegos con toilette y terraza.

ACTIVIDAD Nº 2

La organización y conducción de una obra comprende los siguientes aspectos fundamentales a tener en cuenta:



En la <u>PLANIFICACIÓN</u> distinguimos los siguientes etapas:

1º.- <u>Planificación propiamente dicha :</u>

Consiste en la división de la obra en etapas de trabajo y subdivisiones de acuerdo al orden de ejecución de las mismas. En esta etapa se realiza un listado de actividades – Hoja 1 Listado de Actividades.

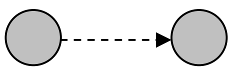
2º.- <u>Realización de la Matriz de secuencia</u> (hoja 2)

En ella se establece la interdependencia de las tareas detalladas en el listado de actividades. Es fundamental que esta matriz esté correctamente realizada ya que de ella depende el Diagrama Flechado (grafo dirigido o digrafo).

3º.- <u>Representación del Diagrama Flechado</u> (hoja 3) .

En él se establecen las secuencias de las actividades, es decir se establecen las actividades precedentes y posteriores a cada labor. En este diagrama se pone de manifiesto la interdependencia de las actividades. Cada flecha representa una actividad. Pueden haber actividades (flechas) que concurren a un nudo y otras que salen del nudo. La actividad precedente debe estar terminada para empezar la posterior. En el diagrama flechado aparecen además flechas ficticias, o virtuales el tiempo en las mismas es cero e indican dependencia y no corto tiempo.

También se emplea este tipo de flecha y es cuando el <u>tiempo de espera</u> es cero



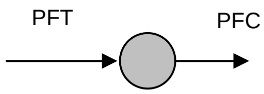
4º,. <u>Planilla de Presupuesto de Tiempos</u> (hoja 4)

En ella se estiman los tiempos que insumirá cada actividad y servirá de base para la realización del diagrama flechado ponderado.

5º.- <u>Diagrama Flechado Ponderado</u> (hoja 5).

Este diagrama permite determinar el cálculo del tiempo libre de la obra. Tiempo libre en una obra es el excedente que tiene cada tarea, sobre tiempo:
a)Si el tiempo libre (TL) es positivo la tarea se denomina tarea no crítica.
b) Si el tiempo libre (TL) es 0 , esta es una tarea crítica , o sea una tarea fundamental en la etapa de ejecución de la obra.
El conjunto de las diferentes tareas críticas se conoce como **Camino Crítico.**

TL = UFT – PFT
PFC: primera fecha de comienzo
PFT: primera fecha de terminación
UFC: última fecha de comienzo
UFT: última fecha de terminación



5º.- <u>Tabla de Computación</u> (hoja 6)

En ella se ponen en evidencia los tiempos parciales y totales de cada actividad, tiempo libre, etc. La confección de esta tabla se hace en base al diagrama flechado ponderado.

HOJA 1 LISTADO DE ACTIVIDADES

Nº ACTIVIDAD	ITEM	UNIDAD	CANTIDAD
1	Limpieza de terreno	Global	1
2	Replanteo	Global	1
3	Excavación de cimientos	M^3	51,61
4	Relleno de cimientos	M^3	51,61
5	Mampostería bajo capa	M^3	13,62
6	Capa aisladora horizontal	M^2	37,40
7	MAMPOSTERÍA EN ELEVACIÓN	M^3	
7ª	Sobre capa aisladora		55,22
7b	Sobre nivel dintel		27,61
8	ESTRUCTURA DE Hº Aº	M^3	
8ª	Vigas de encadenado inferior		3,94
8b	Vigas de encadenado nivel dintel		3,94
8c	Vigas de encadenado nivel losa		5,30
8d	Columnas de encadenado		2,04
8e	Losas macizas		15,95
9	REVOQUE	M^2	
9ª	Revoque exterior		242,90
9b	Revoque grueso interior		296,73
9c	Revoque fino interior		296,73
10	Contrapisos	M^2	105,10
11	Revestimiento de azulejos	M^2	28,82
12	Cielorraso de yeso	M^2	99,10
13	Pisos de mosaico	M^2	99,10
14	Zócalos graníticos	M	120,20
15-16	Contrapiso de losa	M^2	128,64
17	CARPINTERÍA	Global	
17ª-17b	Puertas y ventanas		1.00
18	PINTURAS	M^2	
18ª	Al látex interior		275,33

18b 18c 18d 18e-18f	Al látex exterior Al látex especial cielorraso Esmalte para marcos Carpintería de madera y metálica		242,90 242,90 21,83 85,92
19	Vidrios	M^2	11,22
20 20ª 20b 20c 20d	INSTALACIÓN ELÉCTRICA Caños y cajas en losa Caños y cajas en paredes Cables y llaves Artefactos de iluminación	Global	 1,00 1,00 1,00 1,00
21 21ª 21b 21c	INSTALACIÓN SANITARIA Instalación cloacal Agua fría y caliente Artefactos y accesorios	Global	 1,00 1,00 1,00
22 22ª 22b	INSTALACIÓN DE GAS Cañerías, piezas y llaves. Caños de ventilación	Global	 1,00 1,00
23	Base para tanque de reserva	Nº	1,00
24	Tanque de reserva	Nº	1,00
25	Mesada granítica	Nº	1,00

HOJA 4 PRESUPUESTOS DE TIEMPOS

Nº ACTIVIDAD	ITEM	TIEMPO	FLECHA	Designa-ción
1	Limpieza de terreno	3 días	1-2	A
2	Replanteo	1 día	2-3	B
3	Excavación de cimientos	5 días	3-4	C
4	Relleno de cimientos	8 días	4-5	D
5	Mampostería bajo capa	3 días	6-7	F
6	Capa aisladora horizontal	2 días	7-8	H
7 7ª 7b	MAMPOSTERÍA EN ELEVACIÓN Sobre capa aisladora Sobre nivel dintel	 19 días 9 días	 8-9 10-11	 I L
8 8ª 8b 8c 8d 8e	ESTRUCTURA DE Hº Aº Vigas de encadenado inferior Vigas de encadenado nivel dintel Vigas de encadenado nivel losa Columnas de encadenado Losas macizas	 4 días 4 días 5 días 2 días 15 días	 5-6 9-10 11-12 6-14 14-15	 E J M G P
9 9ª 9b 9c	REVOQUE Revoque exterior Revoque grueso interior Revoque fino interior	 12 días 11 días 6 días	 16-18 15-19 29-31	 T R K ‘
10	Contrapisos	4 días	13-20	O
11	Revestimiento de azulejos	7 días	22-26	C ‘
12	Cielorraso de yeso	11 días	16-17	S
13	Pisos de mosaico	8 días	20-23	B ‘
14	Zócalos graníticos	4 días	23-27	D ‘
15-16	Contrapiso de losa	11 días	15-16	Q
Carpint. 17a-17b	Puertas y ventanas	11 días	19-25	Y
Pinturas 18a 18b	Al látex interior Al látex exterior	10 días 9 días	27-32 18-28	J ‘ V

18c 18d 18e-18f	Al látex especial cielorraso Esmalte para marcos Carpintería de madera y metálica	6 días 3 días 5 días	27-30 25-34 25-35	I ‘ F ‘ G ‘
19	Vidrios	1 día	34-35	O ‘
Ins.Eléct. 20a 20b 20c 20d	Caños y cajas en losa Caños y cajas en paredes Cables y llaves Artefactos de iluminación	3 días 3 días 3 días 3 días	12-14 19-21 31-33 33-35	N W L ‘ N ‘
Inst.Sanit. 21a 21b 21c	Instalación cloacal Agua fría y caliente Artefactos y accesorios	7 días 5 días 3 días	9-13 19-22 26-29	K X H ‘
Inst.Gas 22a 22b	Cañerías, piezas y llaves Caños de ventilación	4 días 1 día	19-29 31-35	Z M ‘
23	Base para tanque de reserva	2 días	16-24	U
24	Tanque de reserva	1 día	24-35	E ‘
25	Mesada granítica	1 día	19-35	A ‘
	Flecha ficticia	0 día	17-20	P ‘
	Flecha ficticia	0 día	23.-26	S ‘
	Flecha ficticia	0 día	21-22	Z ‘
	Flecha ficticia	0 día	17-29	Q ‘
	Flecha ficticia	0 día	28-34	T ‘
	Flecha ficticia	0 día	28-33	U ‘
	Flecha ficticia	0 día	21-29	R ‘
	Flecha ficticia	0 día	30-34	X ‘
	Flecha ficticia	0 día	32-34	Y ‘
	Flecha ficticia	0 día	32-33	W ‘
	Flecha ficticia	0 día	30-33	V ‘

HOJA 5 TABLA DE COMPUTACIÓN

FLECHA	Designac	TIEMPO	Primera FC	Primera FT	Ultima FT	Ultima FC	Tiempo Libre
1-2	A	3	0	3	3	0	0
2-3	B	1	3	4	4	3	0
3-4	C	5	4	9	9	4	0
4-5	D	8	9	17	17	9	0
5-6	E	4	17	21	21	17	0
6-7	F	3	21	24	24	21	0
6-14	G	2	21	23	66	64	43
7-8	H	2	24	26	26	24	0
8-9	I	19	26	45	45	26	0
9-10	J	4	45	49	49	45	0
9-13	K	7	45	52	99	92	47
10-11	L	9	49	58	58	49	0
11-12	M	5	58	63	63	58	0
12-14	N	3	63	66	66	63	0
13-20	O	4	52	56	103	99	47
14-15	P	15	66	81	81	66	0
15-16	Q	11	81	92	92	81	0
15-19	R	11	81	92	101	90	9
16-17	S	11	92	103	103	92	0

16-18	T	12	92	104	116	104	12
16-24	U	2	92	94	127	125	33
17-20	P ‘	0	103	103	103	103	0
17-29	Q ‘	0	103	103	116	116	13
18-28	V	9	104	113	125	116	12
19-21	W	3	92	95	106	103	11
19-22	X	5	92	97	106	101	9
19-25	Y	11	92	103	123	112	20
19-29	Z	4	92	96	116	112	20
19-35	A ‘	1	92	93	128	127	35
20-23	B ‘	8	103	111	111	103	0
21-22	Z ‘	0	95	95	106	106	11
21-29	R ‘	0	95	95	116	116	21
22-26	C ‘	7	103	110	113	106	3
23-26	S ‘	0	111	111	113	113	2
23-27	D ‘	4	111	115	115	111	0
24-35	E ‘	1	94	95	128	127	33
25-34	F ‘	3	103	106	127	124	21
25-35	G ‘	5	103	108	128	123	20
26-29	H ‘	3	111	114	116	113	2
27-30	I ‘	6	115	121	125	119	4
27-32	J ‘	10	115	125	125	115	0
28-33	U ‘	0	113	113	125	125	12
28-34	T ‘	0	113	113	127	127	14
29-31	K ‘	6	114	120	122	116	2
30-33	V ‘	0	121	121	125	125	4
30-34	X ‘	0	121	121	127	127	6
31-33	L ‘	3	120	123	125	122	2
31-35	M ‘	1	120	121	128	127	7
32-33	W ‘	0	125	125	125	125	0
32-34	Y ‘	0	125	125	127	127	2
33-35	N ‘	3	125	128	128	125	0
34-35	O ‘	1	125	126	128	127	2

Referencias bibliográficas

Arq. A. Nótolli. NOTAS DE MATEMÁTICA.

Kenneth Ross- Charles R.B. Wright. MATEMÁTICAS DISCRETAS.

Bernard Kolman – Robert C. Busby. ESTRUCTURAS DE MATEMÁTICAS DISCRETAS PARA COMPUTACIÓN.

Wild Friedemann. CONSTRUCCIONES INDUSTRIALES.

____________ . ARQUITECTURA Y CONSTRUCCIÓN.

Broadbent Geofrey. DISEÑO ARQUITECTÓNICO.

Vera W. Spinadel. TRABAJO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA MATEMÁTICA PARA ARQUITECTURA Y DISEÑO.

"El Concepto de Inecuación Lineal en Alumnos Ingresantes Universitarios"

María Rosa Berraondo Marcos
Departamento de Matemática Universidad Nacional de San Luis
Luz Eloisa Caicedo
Colegio Sagrado Corazón, Villa Mercedes San Luis-
Mirta Beatríz Miguel
Colegio Nº1 "Juan Crisostomo Lafinur", San Luis
Argentina

Resumen

Esta investigación surge en una carrera de Postgrado que estamos cursando juntas. Nos propusimos investigar como han construido el concepto de inecuación lineal los alumnos de 5º Año de Nivel Secundario de Establecimientos de difer4ntes modalidades; que potencialmente van a ingresar a la universidad el próximo año.

Este conocimiento nos permitirá planificar mejor nuestros cursos de primer año de varias facultades de la Universidad Nacional de San Luis Argentina.

Esta investigación se realizó en el marco de la Matemática Educativa y usando la metodología de Ingeniería Didáctica. Se analizan una actividad y una situación problemática planteada en esta primera etapa a alumnos de 5º Año de la modalidad Bachiller Contable-Impositivo del colegio Sagrado Corazón de la Ciudad de Villa Mercedes de la Provincia de San Luis en la República Argentina.

Problema a investigar

Nos proponemos investigar como han construido el concepto de "**inecuación lineal**" los alumnos de 5º Año del Nivel Secundario (17 años) de establecimientos de diferentes modalidades, que potencialmente van a ingresar a la Universidad el próximo año.
Este conocimiento nos permitirá planificar mejor nuestros cursos de 1º Año tanto de la Facultad de

Ciencias Físico - Matemática y Naturales como de la Facultad de Química Bioquímica y Farmacia de la Universidad Nacional de San Luis de la Provincia de San Luis de la República Argentina.

Objetivos

- Descubrir la génesis histórica de los conceptos de variable, ecuación e inecuación lineal.
- Encontrar los obstáculos epistemológicos en la historia del concepto, para buscarlos en la clase.
- Crear situaciones a-didácticas que me permitan la investigación.
- Observar y describir la forma en que se han construido estos saberes.
- Analizar como usan estos saberes para resolver situaciones problemáticas.

Marco teórico

La **Dra. Rosa María Farfán Márquez**, define la **matemática educativa** como "La ciencia que estudia para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su enseñanza, las condiciones de la transmisión "de la Cultura" propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende".

El punto de partida de esta problemática es la reflexión sobre los saberes. En este trabajo nos propusimos observar y anotar todo lo que sucedía en la situación aúlica. Con el fin de reflexionar sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes.

El campo a teorizar de la matemática educativa parte de los problemas que surgen de la interacción entre los objetos de la matemática escolar y los sujetos partícipes del ciclo escolar. **Ricardo Cantoral** expresa que "La palabra transponer, del latían Transponere" significa poner una cosa más allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término **transposición didáctica** se refiere al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer una saber hacia un sitio didáctico, es decir "Llevar el saber al ámbito escolar".

Quien realizó estudios en este campo de la matemática fue **Ives Chevallar** y los ha llamado **transformación didáctica**. Se puede describir la **transposición didáctica** como un trabajo que lleva el saber erudito al saber a enseñar, que aparece en los distintos textos escolares, e impregna todos los actos de la enseñanza.

Los directivos de las instituciones escolares, los expertos de curriculum, los padres cultivados, las autoridades políticas que se interesan por la enseñanza, forma lo que **Chevallar** llama la noosfera, lugar donde se piensa el funcionamiento didáctico, la esfera de los que saben.
La epistemología cumple un papel protagónico en el nivel teórico y metodológico de la disciplina, a partir de la consideración de la noción de **obstáculo epistemológico**, retomada de **Bachelard** en su explicación sobre la construcción del conocimiento científico.

Los objetivos de los estudios de la didáctica consiste en describir y explicar las actividades ligadas a la comunicación de conocimientos y las transformaciones de los sujetos protagonista de esta comunicación, así como las transformaciones del conocimiento mismo.

Guy Brousseau, introdujo la **teoría de situaciones didácticas** en ella se toma como objeto de estudio todo el sistema didáctico y se desglosan las "situaciones".

El educador debe de presentar al educando "situaciones problemáticas" que lo hagan trabajar, hablar, reflexionar, evolucionar, etc; y que una vez aceptada como propios le permitan adquirir un nuevo conocimiento. El educando debe construir una noción a partir de un conjunto de problemas en donde la misma funciona, o sea el alumno aprenderá adaptándose a un medio, factor de dificultades y desequilibrio. En la década de los 80 surge la **ingeniería didáctica** la cual se sustenta en las teorías de la transposición didáctica y de las situaciones didácticas.

En nuestro estudio hemos pensado en la **Ingeniería didáctica** como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase.

Investigación

Nos proponemos la investigación en educación matemática usando la metodología de Ingeniería Didáctica la cual consta de tres grandes fases:

FASE I Análisis preliminar de la situación a abordar

Nos planteamos este año analizar una Escuela Bachiller con orientación "Auxiliar Contable Impositiva".

El Colegio Sagrado Corazón es una escuela con más de cien años en la República Argentina que empezó en Villa Mercedes con el Jardín de Infantes y hace alrededor de 40 años que se creó la parte secundaria en este Colegio en Villa Mercedes.

Es un colegio privado de orientación religiosa Católica Apostólica Romana dirigido y administrado por la congregación cabriniana de Hermanas del Sagrado Corazón, ubicado en la ciudad de Villa Mercedes (segunda ciudad) de la Provincia de San Luis de la Provincia de San Luis en la República Argentina.

El Colegio Sagrado Corazón es una escuela con dos orientaciones para el bachillerato, una es Contable Impositiva y la otra Auxiliar en Comunicación Social.

- **Estudio didáctico**

El concepto de **inecuación** aparece en el curriculum oficial en 3º año del nivel secundario, o sea que los alumnos lo estudiaron hace dos años aproximadamente. Si bien desde 1º año trabajan con variables resuelven ecuaciones lineales.

No sabemos al principio si lo estudiaron, pero luego conversando con algunos docentes y con la directora de la escuela, verificamos que sí.

Tampoco sabemos como lo vieron, pero según los docentes manejan el concepto fundamentalmente nos preguntamos sobre el curriculum logrado.

En general, en la escuela Argentina se tiende a valorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización por sobre los argumentos geométricos y visuales.

Nos propusimos plantear a los alumnos situaciones problemáticas en una clase y ver como trabajan estos alumnos. También observar si nuestras concepciones son correctas.

- **Estudio epistemológico**

Entendiendo que la naturaleza del concepto de **ecuación** e **inecuación lineal** es compleja, nos propusimos buscar su génesis . En realidad en la historia encontramos que los griegos utilizaban las letras de su alfabeto para escribir números $\alpha = 1$, $\beta=2$, $\chi = 3$,etc.

También los romanos usaban letras para representar números, pero en ambos casos cada letra representaba un número bien determinado.

Cuando los matemáticos empezaron a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con "cualquier número", más que por los mismos números nació el álgebra.

En un principio (babilonios, egipcios, etc.) las operaciones generales con números cualesquiera se describían con un montón de palabras.
Naciendo así la llamada **álgebra retórica.**

Posteriormente, se inventó una especie de taquigrafía para decir lo mismo, pero en menos espacio.

Se usaban palabras fijas para plantear y resolver los problemas, rehaciendo así la llamada **álgebra sincopada**, es decir abreviada.

Por ejemplo "**la cosa**" (palabra italiana que significa objeto), era el término técnico para la incógnita según cuenta **Miguel de Guzmán** escribían: Tres veces **cosa** más diez, es **cosa por cosa**. ¿Cuánto es la **cosa**?

Hacia el siglo XVI, los matemáticos ya se habían dado cuenta de que sería mejor tener símbolos para la **cosa** buscada, es decir la incógnita (x) y para los números que intervenían en las ecuaciones cuando no importaba qué números concretos debían ser, nace así el **álgebra simbólica**.

El francés **François Viète** (1540-1603) hombre de leyes que se dedicó como aficionado a las matemáticas, fue quien dio el paso decisivo de representar números arbitrarios por letras en las ecuaciones y fórmulas algebraicas. **Viéte** propuso utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada y una constante en cambio para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado Aquí nos encontramos por primera vez en álgebra una distinción clara entre el importante concepto de parámetro y la idea de incógnita. El álgebra de Viéte era aún imperfecta y tenía grandes insuficiencias.

Fue opacada rápidamente por el Álgebra de Descartes.

Durante el siglo XVII se produce un viraje en las matemáticas, cambia el contenido interno de las matemáticas, el cual adquiere cada vez más el aspecto de matemáticas de las variables. El punto de viraje de las matemáticas fue "la variable" de **René Descartes** (1586-1650) eminente sabio francés.

En los fundamentos de toda la "Geometría" de **Descartes** se sitúan dos ideas: la Introducción de la magnitud variable y la utilización de las coordenadas rectangulares (cartesianas).

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos > y < se llaman desigualdades y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman inecuaciones.

Fue **Thomas Harriot** (1560-1621) contemporaneo de Viéte, quien introdujo los signos > y < para "mayor que " y "menor que" símbolos que se han mantenido hasta nuestros días.

- **Estudio cognitivo**

Al iniciarse en estos conceptos el estudiante debe concebir primero el concepto de ecuación y el de variable como un proceso cuyos objetos son los números. Luego entender las desigualdades y el orden para poder finalmente, concebir el concepto de **inecuación lineal** en donde la novedad es que hay muchos objetos que verifican la misma y geométricamente aparece la semirecta.

FASE II Construir la situación adidáctica

Finalmente nos propusimos crear situaciones en dos niveles y recabar opinión.

- **Primera Actividad** (solo en el nivel operativo).

Encontrar la o las soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $3x < 21$
b) $2x - 7 > 25$
c) $4x + x < 45$

- **Segunda Actividad** Una situación problemática usando desigualdades.

Resolver el siguiente problema:

El total de horas extra mensuales que pueden realizar en la sección de una empresa no puede superar las 253 hs, ni ser menor que 238 hs.

Solo Mirta, Inés y Pablo hicieron horas extra en el mes de marzo.

Mirta hizo el triple de horas que Inés, Pablo hizo 7 hs menos que Inés y cada día que se quedó a hacer horas extra durante el mes, trabajó 4 horas extra.

¿Cuántas horas extra hizo cada empleado de la sección en el mes de marzo?

- **Tercera Actividad** (opinión)

Discutan sus opiniones, impresiones etc. sobre las dos actividades anteriores, y les pedimos que nos cuenten las mismas ya sea grupalmente o individualmente.
En relación con el contrato didáctico pensamos proponer el trabajo a los alumnos pidiéndoles que nos ayuden en la investigación para mejorar las clases en la universidad.

También pedirles que anoten todas las cuentas que hacen y las resoluciones para poder ver las estrategias que usan para resolver.
Plantear el trabajo en forma anónima y grupal. Trabajar con técnica de taller y hacer un cierre o puesta en común al finalizar cada actividad. Finalmente pedirles autorización para filmar y grabar el trabajo del grupo.

FASE III Experiencia en el aula

- **Experiencia en el aula**

Por último viajamos a Villa Mercedes para dar la clase en el "Colegio Sagrado Corazón" de esa ciudad en la orientación antes mencionada.

Los alumnos se prestaron de muy buen agrado a colaborar o sea se pudo establecer el contrato didáctico previsto.

Se organizaron en 8 grupos, la mayoría de 4 alumnos, rápidamente juntaron las mesas y con mucho entusiasmo se pusieron a trabajar. Todos resolvieron analíticamente la primera actividad,

Pasando varios alumnos a resolverlo en el pizarrón y se abocaron a la segunda actividad que resolvieron, casi todos, analíticamente. Pasó primero al pizarrón una alumna que planteó una solución intuitiva, 11 días, sin hacer cuentas y verificando que es correcta.

Luego pasa un alumno de otro grupo y plantea una ecuación para el máximo, otra para el mínimo y entre ellos busca el múltiplo de cuatro.

Finalmente pasa otra joven que plantea la desigualdad y encuentra la solución.

Hasta ahora todas las soluciones que aparecen son analíticas, entonces la coordinadora pregunta si nadie pensó en buscar una solución gráfica en la recta numérica y pasa un alumno ha hacerla en el pizarrón, marca una recta, en ella el origen y comienza marcando una escala de 10 en 10 , y en la misma analiza los máximos y mínimos encontrados (es el alumno de la 2º solución).

Finalmente la coordinadora cierra la explicación marcando las semirrectas encontrando la intersección de las mismas.

Aquí se plantea nuevamente como un favor especial, o sea la opinión sobre las dos actividades anteriores.

Todos los grupos discuten y escriben sus opiniones entregando las hojas.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Luego nos empezamos a reunir para analizar las hojas, el video y nuestras notas, así como para desgravar, y llegamos a las siguientes conclusiones:

- **GRUPO I** Es un grupo muy prolijo.
  Actividad 1: Resuelven bien las desigualdades analíticamente, no escriben las soluciones. Dicen que esta actividad: "**No nos presentó dificultad**".
  Actividad 2: Consideran ambas igualdades, la superior y la inferior. Luego rápidamente escriben la solución no dicen como la encuentran, esta bien.
  Dicen de esta actividad: "**Tuvimos que razonar un poco más y buscar más detalles pero pudimos llegar a la idea de la solución**".
  Actividad 3: Dicen: "**Son actividades interesantes y didácticas. Gracias**.
- **GRUPO II** Son cuatro muchachos.
  Actividad 1: No hacen ningún planteo, solo escriben los conjuntos soluciones en el conjunto de los números naturales (N).

De esta actividad dicen: "**Resultó fácil, cuestión de recordar un poco**".
Actividad 2: Plantean ambas igualdades encuentran las dos soluciones, luego analizan entre 42 y 45 los múltiplos de cuatro y llegan al resultado correcto.
Dicen: "**Fue un poco más complicada, ya que tenía valores variables**".

- **GRUPO III**
  Actividad 1 Empiezan a probar con distintos valores numéricos, luego de tres intentos, que siempre verifican la desigualdad escriben en palabras (no en símbolos) la condición que debe cumplir la variable.
  Dicen de esta actividad: "**Nos pareció interesante, pero nos costó un poco**".
  Actividad 2: No pudieron hacerla y así lo escribieron.
  Dicen: "**No habíamos repasado lo de años anteriores**".

  Actividad 3: Gracias.

- **GRUPO IV**
  Actividad 1 Solo hacen tres tanteos que siempre verifican, no formalizan ni escriben soluciones.
  Actividad 2 Sacar la diferencia 253 – 238 = 15 hs (son los únicos) , luego plantean una igualdad, a posteriori (encima) la convierte en desigualdad y al lado hacen la otra desigualdad, resuelven ambas igualdades y al valor de Pablo lo dividen por cuatro, ninguno le da entero.
  Luego plantean los valores de Pablo con desigualdades y llegan a la solución.
  Actividad 3 Dicen en general que la actividad les pareció interesante y que les costó realizarla, ya que eran temas que vieron en 3º año.

- **GRUPO V**
  Actividad 1 Solo escriben las desigualdades, no dan soluciones.
  Actividad 2 Mágicamente aparece 11 días. Ellos encuentran la solución y la verifican.
  Actividad 3 De esta actividad dicen: "**Nos gustó, nos ayudó a refrescar la memoria, porque la dificultad estuvo en acordarnos**".

- **GRUPO VI**
  Actividad 1 Escriben tres soluciones en cada caso y luego las disigualdades.
  Actividad 2 Escriben cada afirmación usando variables, no pueden escribir la **ecuación o inecuación** pertinente. Hacen algunos tanteos. Intentan dividir por tres, tanto 253 como 238 , pero en ambos casos no da exacta la división y no saben que hacer. No encuentran la solución.
  Actividad 3 Ellos dicen "**Fue bueno pero no me gustó**".

- **GRUPO VII**
  Actividad 1 Resuelven las desigualdades, dicen "**X debe ser cualquier valor hasta llegar al tope de 7**" – X < 7 escribe en el sentido de la desigualdad en palabras, no dan soluciones concretas.
  Actividad 2 Les costó, escriben usando variables las afirmaciones, escriben Inés X, Mirta 3X , Pablo – 7 X .
  Luego se dan cuenta que es X – 7 y plantean ambas igualdades, pero resuelven una mal y la otra bien, luego corrigen la que está mal y encuentran ambas soluciones.
  Finalmente aparece un análisis de múltiplo de 4 entre 42 y 45 y entonces la solución.
  Actividad 3 Dicen: "**Las operaciones nos parecieron muy interesantes desde el punto de vista que nuestro desenvolvimiento será tomado en cuenta para que no haya una brecha entre la secundaria y la facultad**".

- **GRUPO VIII**
  Actividad 1 Transforman las desigualdades en igualdades y resuelven las igualdades.
  Luego dan tres soluciones bien (ya sean mayores o menores). De esta actividad dicen: "**Fue fácil**".

Actividad 2 Plantean bien ambas igualdades y encuentran ambas soluciones, luego de la galera sale la solución final bien. Dicen "**Fue un poquito más complicada pero la pudimos solucionar**".
Actividad 3 Dicen: "**Crítica constructiva, fue bueno. Y ponen sus iniciales G-P-L-H**".

Conclusiones

- La modelización es un proceso clave muy poco trabajado en el aula.
- La mayoría de los alumnos tiene internalizado el concepto de variable.
- No todos tienen tan claro el concepto de **inecuación**, ni su uso.
- La reflexión sobre el trabajo debería ser una tarea cotidiana.
- Rescatar la historia para ayudar a los profesores a comprender mejor como se construyen los conceptos.
- Las situaciones problemáticas clave de la enseñanza, nos permiten "ver" como piensan los alumnos, en que estado se encuentran y como están adquirido los conocimientos.
- La mayoría de los alumnos habían hecho aprendizaje significativos.

Referencias bibliográficas

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamericana 1995 México - Colombia.

BACHELARD, Gastón. La formation de l'esprit scientifique. Paris 1938. Traducción en español Editada Siglo XIX, México.

BOYER, Charles

BROUSSEAU, Guy. Problèmes de didácticque des décimaux. Traducción en español F.A.M. A..F. 1995 Córdoba.

CANTORAL, Ricardo y FARFÁN Rosa. Elementos metodológicos para la reconstrucción de una didáctica del análisis en el nivel superior. Editorial Publicaciones centroamericanas 1989.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor 1997 Bs. As.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Grupo Editorial Iberoamericana 1995 México - Colombia.

FARFÁN MÁRQUEZ, Rosa María. Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio. Iberoamericana 1997 México.

FARFÁN MÁRQUEZ, Rosa María. Perspectivas, y Métodos de Investigación en Matemática Educativa Nº2 de la Serie: Antologías Programa Editorial Área de Educación Superior. CINVESTAV-I.P.N. México.

RIBNIKOV, K. Historia de las matemáticas Editorial MIR 1987(traducción al español) Moscú

¿El Promedio, que Mide?

Carmen Torrente de Abuin, Berta J. Chahar
Dardo Escalante Figueroa, dardo@fm.unt.edu.ar
Adriana Correa Zeballos.
Universidad Nacional de Tucumán
Argentina.

Media y Superior
Evaluación Institucional

Introducción

Este trabajo forma parte del Proyecto Evaluación Curricular del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Tucumán, CIUNT, y es una continuación del ya presentado "Definición de algunos indicadores para medir el rendimiento académico de alumnos de la Facultad de Medicina de la UNT". En éste se definieron dos indicadores llamados **eficiencia** y **proporción de materias aprobadas** como modificadores del **promedio aritmético** usado tradicionalmente como medida del rendimiento académico del alumno.

El objetivo a alcanzar es poder encontrar el o los factores de corrección más adecuados sobre el promedio, de manera que éste revele el real rendimiento académico del alumno. Esta inquietud se origina en el hecho de encontrar egresados con altos promedios pero que permanecieron en la carrera un tiempo sensiblemente mayor al estipulado por la currícula o egresados con promedios iguales pero con distintas variabilidades en la distribución de notas.

Metodología

Para la investigación realizada se considera la base de datos de 125 egresados al 31 de diciembre de 1999 de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional de Tucumán.

Algunas universidades calculan los promedios de sus egresados considerando los aplazos y otras no. En estas últimas los egresados tienen promedios superiores a las primeras, hecho que genera situaciones de desigualdad a la hora de medir el rendimiento académico de los alumnos, para acceder a becas, pasantías en los hospitales, etc. Por lo tanto consideramos para nuestro estudio, los promedios de cada alumno sin tomar en cuenta los aplazos registrados, debido a que se quiere evaluar el nivel de conocimientos adquiridos, el que queda enmascarado con la inclusión de los aplazos en el promedio.

Se calculan los indicadores eficiencia y proporción de materias aprobadas definidos como:

$$\text{Eficiencia} = 1 - \frac{\text{número de aplazos}}{\text{exámenes rendidos}}$$

$$\text{Prop. de mat. aprob.} = \frac{\text{Suma de exám. aprob. hasta el tiempo T}}{\text{Suma de exám. exigidos por la currícula hasta el tiempo t}}$$

Para evaluar el segundo indicador, se considera como "T" el tiempo de permanencia del alumno y como "t" los 7 años que establece el plan de estudios.

Se hace la ponderación de los promedios con cada uno de los indicadores con el objeto de evaluar al alumno tanto en conocimientos, en la eficiencia de acuerdo al número de aplazos que tuvo en su carrera como así también en su permanencia.

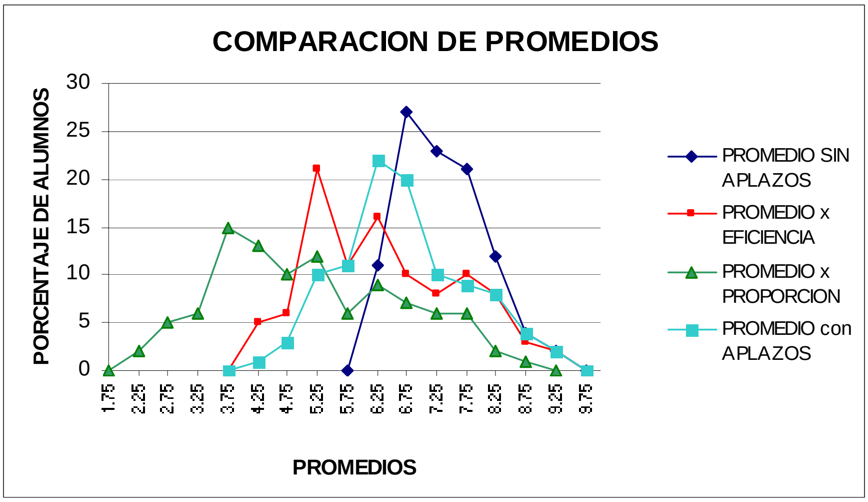
RESULTADOS

Tabla 1. Distribución de frecuencias y distribución de porcentajes de promedios y promedios corregidos de los egresados de la Fac. de Medicina de la U.N.T. Año 1999

	PROMEDIO sin APLAZOS		PROMEDIO x EFICIENCIA		PROMEDIO x PROPORCIÓN		PROMEDIO con APALZOS	
Promedio	Numero de alumnos	% de alumnos	Numero de alumnos	% de alumnos	Numero de alumnos	% de alumnos	Numero de alumnos	% de alumnos
[1,5 – 2)								
[2 - 2,5)					3	2		
[2,5 – 3)					7	5		
[3 - 3,5)					7	6		
[3,5 – 4)					19	15		
[4 - 4,5)			6	5	16	13	1	1
[4,5 – 5)			8	6	12	10	4	3
[5 - 5,5)			27	21	15	12	13	10
[5,5 – 6)			14	11	8	6	28	11
[6 - 6,5)	14	11	20	16	11	9	20	22
[6,5 –7)	33	27	12	10	9	7	16	20
[7 - 7,5)	29	23	10	8	8	6	15	10
[7,5 –8)	26	21	12	10	7	6	11	9
[8 - 8,5)	15	12	10	8	2	2	10	8
[8,5 – 9)	5	4	4	3	1	1	5	4
[9 - 9,5)	3	2	2	2			2	2
[9,5 –10)								
TOTAL	125	100%	125	100%	125	100%	125	100%

Fuente: Base de Alumnos de la fac. de Medicina de la U.N.T

Fig 1. Polígono de porcentajes de promedios de alumnos egresados en 1999 de la Fac. de Medicina de la U.N.T.



En la Fig. 1 se representan las distribuciones del promedio y de los promedios corregidos por los indicadores. Las distribuciones corregidas presentan desplazamiento, hacia la izquierda de los promedios y una mayor dispersión. Los promedios superiores a 8, que son muy pocos, se afectan mínimamente por la acción de los indicadores.

Se observa que las dos distribuciones, promedio con aplazos y promedio sin aplazos, se diferencian en las medidas de posición y variabilidad. En la primera los promedios de la distribución disminuyen con respecto a la otra, con rango de valores entre 4 y 9,75 mientras que al no considerar los aplazos el rango de valores oscila entre 6 y 9,75. El 70 % de los alumnos tienen promedio calculado sin aplazos entre 6,5 y 8 y el 52% de los alumnos tienen promedios con aplazos entre 5,5 y 7.

Tabla2. Tabla de promedio, promedios corregidos vs. permanencia.

PERMANENCIA	PROMEDIO	PROMEDIO * EFICIENCIA	PROMEDIO * PROPORCIÓN
6	8,47	8,17	8,47
7	8,01	7,70	7,97
8	7,56	6,89	6,87
9	7,11	5,99	4,90
10	7,01	5,64	4,20

Fuente: Base de Alumnos de la fac. de Medicina de la U.N.T

Fig 2. Gráfico de promedio, promedios modificados vs. permanencia.

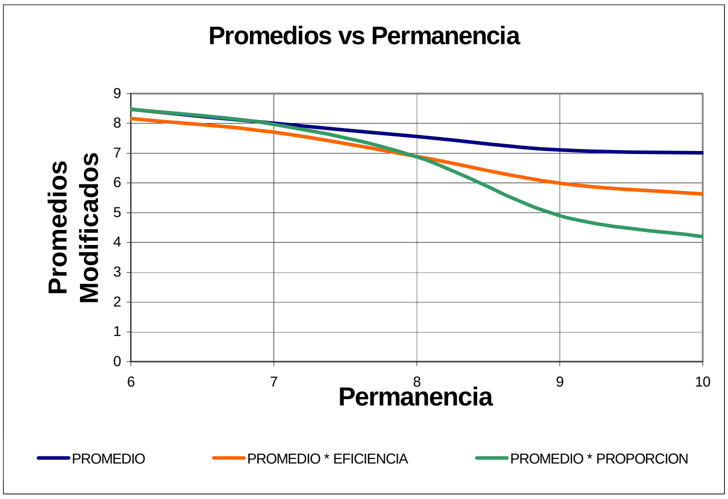


Fig. 2. En esta figura se observa que aquellos alumnos que completan sus estudios en el tiempo establecido por la currícula los valores en todos los casos son similares. A medida que aumenta la permanencia los promedios comienzan a diferenciarse, siendo sustancialmente menor el promedio por la proporción.

Tabla 3. Tabla de promedio, promedios corregidos vs. aplazos.

APLAZOS	PROMEDIO	PROMEDIO con APLAZOS	PROMEDIO x EFICIENCIA	PROMEDIO x PROPORCIÓN	PROMEDIO con APLAZOS x PROPORCIÓN
0	8,33	8,33	8,33	7,71	5,11
1	7,98	8,16	7,93	7,83	4,67
2	7,06	7,56	7,16	5,97	4,54
3	7,24	7,69	7,09	5,94	5,39
4	7,07	7,69	6,89	6,36	5,37
5	6,41	7,04	6,16	4,96	4,81
6	6,32	7,06	6,03	5,33	4,81

7	6,28	7,15	5,96	5,02	6,05
8	6,32	7,33	5,97	4,18	6,74
9	5,81	6,74	5,37	4,51	6,05
10	5,65	6,82	5,31	4,95	6,23
11	5,60	6,88	5,25	4,55	6,34
12	5,61	6,89	5,13	4,13	6,09
13	5,22	6,44	4,71	4,23	6,31
14	5,31	6,69	4,78	4,01	6,69
15	5,08	6,43	4,51	4,23	6,37
16	5,69	7,51	5,16	5,80	7,51
17	5,17	6,89	4,68	3,25	6,89
18	4,99	6,57	4,35	4,40	6,52
20	4,80	6,44	4,14	3,40	6,44

Fuente: Base de Alumnos de la fac. de Medicina de la U.N.T

Fig 3. Gráfico de promedio, promedios modificados vs. aplazos

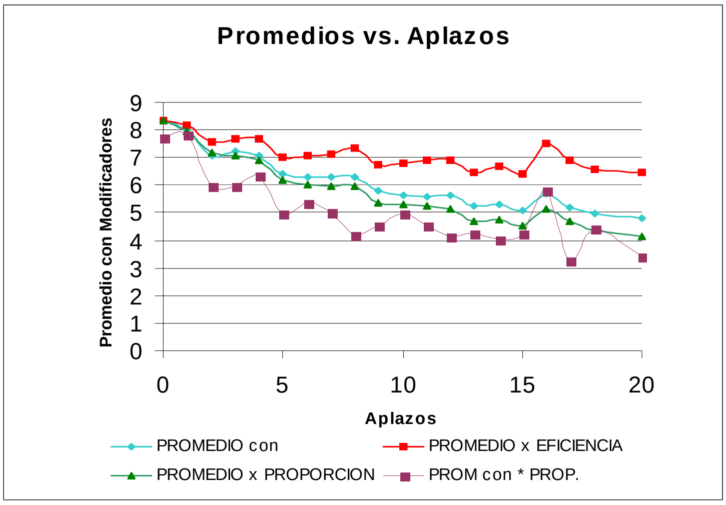


Fig.3. Se observa que para aquellos alumnos que no tienen aplazos, las fluctuaciones de los promedios son despreciables y a medida que el número de aplazos aumenta hay una tendencia decreciente en los promedios, siendo más acentuado en los promedios corregidos.

Comentarios y Conclusiones

El proyecto prevé la construcción de un modelo de evaluación continua del curriculum, que podrá ser aplicado a todo el ámbito universitario. Esto puede constituir un punto de partida para el mejoramiento de los planes de estudio lo cual conduciría a obtener egresados con una mejor formación profesional y con capacidad para dar respuestas a los requerimientos de la sociedad. El análisis de los factores que influyen en las dificultades que surgen en la marcha del proceso educativo, permitirá realizar, de manera oportuna los ajustes necesarios, disminuyendo así los costos económicos y sociales que de ellos se derivan.

Estimamos que los indicadores serían una herramienta útil dado que permitirían una evaluación institucional de la marcha de los planes de estudios en vigencia con respecto al rendimiento académico del alumno y efectuar los ajustes pertinentes.

Por otra parte, con el indicador proporción se podría realizar un seguimiento temporal del alumno y detectar problemas que el mismo pudiera tener. Si la "demora" de los alumnos se produce en forma sistemática dentro de algún tiempo del cursado podría servir como advertencia a la institución para observar si el plan de estudio en ese momento presenta alguna dificultad por ejemplo concentración de materias.

A partir de este trabajo se sugiere que se reemplace el promedio, que actualmente se computa con aplazos, por el promedio sin aplazos para que los alumnos tengan igualdad de oportunidades a la hora de acceder a estudios superiores y residencias en otras facultades del país.

Los factores de corrección propuestos sería aconsejable que se empleen, de manera interna por la institución, para dilucidar cualquier situación de “empate” en los promedios, permanencia del alumno en la carrera, actividades del alumno en la facultad (ayudantía, prácticas hospitalarias), elementos de gran utilidad al momento de asignar una pasantía, la bandera, premios, becas, etc.

Referencias bibliográficas

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Versión castellana de: **Álvarez Falcón, J. M. y Casado Rodrigo, J.** (1992). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.

Santana, M. S. y Mentz, G. B. (1996). “Estudio de la Deserción Usando Modelos de Sobrevida”. Trabajo presentado en el Segundo Congreso Internacional de la Calidad. Tucumán. República Argentina.

Camillioni, A. (1998). Sistemas de calificación y regímenes de promoción. En Camillioni y otros (Eds), *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico. (*pp133-176). Buenos Aires: Ed. Paydós.

Camillioni, A. (1998). La calidad de los programas de evaluación y los instrumentos que lo integran. En Camillioni y otros (Eds), *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico. (*pp67-92). Buenos Aires: Ed. Paydós.

Castro Pimienta, O. (1999). *Evaluación integral. Del paradigma a la práctica.* La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Crocker, L. y Algina, J. (1986). *Introduction to classical and modern test theory.* Orlando – Florida: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.

Díaz Barriga, A. (1990). *Currículo y Evaluación Escolar*. Buenos Aires. Rei Argentina S.A. Aique Grupo Editor.

Dixon, W. y Massey, F. J. Jr. (1965). *Introducción al Análisis Estadístico.* Ed. McGraw – Hill.

Gimeno Sacristán, J. y Pérez Gómez, A. (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Ed. Morata.

Popham, W. J. (1990). *Modern Educational Measurement. A Practitioner´s Perspective.* EEUU: Ed. Allyn and Bacon.

Pérez Lindo, A. (1993). *Teoría y Evaluación de la Educación Superior*. Buenos Aires. Aique Grupo Editor.

Villagra de Burgos, A. (1990). La problemática de la evaluación en la universidad. En: Modelo Didáctico. Metodología, Medios y Evaluación. Módulo III. Segunda parte. Curso de formación pedagógica para docentes universitarios. Tucumán: Imprenta UNT.

Zeisel, H. (1974). *Dígalo con números.* México. Fondo de Cultura Económica.

Intersecciones entre la Matemática y la Economía

Jesús Alberto Cevallos,
María Rosa Rodríguez de Estofán
mestofan@herrera.unt.edu.ar
María Angélica Pérez de del Negro
Facultad de Ciencias Económicas, Uni. Nac. de Tucumán
Argentina

Introducción

Esta ponencia considera el aspecto epistemológico de la relación Ciencias Formales-Ciencias Económicas. La economía, al igual que cualquier otra ciencia, explica y predice. Si esta explicación y esta predicción aspiran a ser científicas, deben cumplir con ciertos principios epistemológicos y normas metodológicas, entre los que se destacan fundamentalmente las establecidas por las ciencias formales: la lógica y la matemática.

Toda ciencia tiende a un ideal de rigor conceptual que se logra mediante la formalización y matematización de sus enunciados legales. Así, ninguna ciencia puede prescindir de la lógica y de la matemática.

La economía, ciencia que busca resolver problemas que surgen en la interrelación de los recursos escasos-medios con fines alternativos, se ajusta también a estos cánones epistemológicos. Para analizar científicamente sus problemas, las teorías económicas recurren a modelos matemáticos, explicando así la "realidad económica". Por medio de ellos describen la manera en que toman decisiones los individuos, explican el comportamiento de las empresas y predicen aproximadamente la forma en que éstos interactúan para establecer los mercados.

Igual que cualquier otra teoría, una teoría económica está compuesta por grupos de principios y leyes causales, que dan cuenta de las relaciones entre los "hechos" o variables relevantes, presentes en el problema económico considerado.

Toda teoría necesita de proposiciones fundamentales, llamadas axiomas o postulados, sobre las cuales se constituye. Por lo tanto, el primer paso en la construcción de una teoría específica es definir sus postulados. El segundo paso es la observación de "hechos" relacionados con el problema sobre el que se quiere teorizar. Casi en forma simultánea, el tercer paso es la aplicación de las reglas de la lógica a los hechos observados, para establecer relaciones causales entre ellos, recurriendo a razonamientos deductivos, inductivos, probabilísticos, que expresen las relaciones causa-efecto enunciadas en las hipótesis. El cuarto paso consiste en someter las hipótesis a la prueba de falsabilidad, que determinará su adecuación con los hechos y brindará buenas explicaciones y predicciones. En general, si éstas prevalecen, se les llaman leyes científicas, que, si se deducen lógicamente de los principios básicos de la teoría, serán incorporadas al modelo teórico.

Un grupo de enunciados nomológicos no se puede considerar como verdad absoluta. El proceso de comprobación en economía y en otras ciencias, nunca termina. La teoría económica no es un conjunto de leyes inamovibles: está en continuo desarrollo y crecimiento.

La aplicación de la lógica y de la matemática en cualquier ámbito científico responde a estrictas reglas de interrelación y contextualización, pero en las ciencias económicas se requiere de argumentos más rigurosos que justifiquen su pertinencia; lo que implica conocimientos sólidos de la teoría matemática que se propone aplicar y una formulación precisa de los conceptos económicos, a los cuales dicha teoría pretende "modelar". Si no se tuvieran los suficientes recaudos en la aplicación de un lenguaje formal al universo del discurso económico, se podría incurrir en falencias u omisiones.

Para el análisis de la intersección de la matemática y la economía se recurrió a la investigación bibliográfica y a encuestas por medio de un cuestionario escrito. Estas permitirán confrontar las hipótesis sobre la información que se tiene de los contenidos matemáticos requeridos para el aprendizaje de la economía.

Análisis bibliográfico

El análisis bibliográfico se realizó en el texto más consultado por los alumnos que cursan Introducción a la Economía en esta Facultad, *"Sistemas de Precios y Asignación de Recursos"* de Richard H. Leftwich y Ross D. Eckert.

El texto está organizado en **cinco partes**; que cubren los siguientes temas: *Revisión de los Principios Básicos, Los Fundamentos de la Demanda, Las Bases de los Costos y la Oferta, Precios de Niveles de Producción de Bienes y Servicios* y *La Determinación de los Precios de los Recursos y sus Funciones*".

Revisión *de los Principios Básicos*:

En esta parte los autores brindan un repaso de la naturaleza y los fines del análisis microeconómico.

Para definir matemáticamente *oferta* y *demanda*, utilizan los conceptos de: función de una variable, función lineal, función inversa, gráfica de funciones y funciones de varias variables. El precio de equilibrio y la cantidad demandada se obtienen al resolver un sistema formado por las ecuaciones que definen la oferta y la demanda.

La elasticidad-precio de la demanda se define utilizando los conceptos de: variación de una función, variación porcentual y cociente de variaciones. La elasticidad puntual, mediante el concepto de derivada de una función.

Este último y la relación de su signo con el crecimiento o decrecimiento de una función, se utilizan para establecer la relación entre los cambios de precios, la elasticidad y el importe total en efectivo gastado en un bien, y para analizar los factores que influyen en su precio.

Los Fundamentos de la Demanda:

Aquí consideran que todo el impulso de la actividad económica en las economías donde predomina la empresa privada, se dirige a la satisfacción de los deseos humanos, de una manera tan completa como lo permiten los recursos y la tecnología.

Cuando se define la función de preferencia o mapas de indiferencias del consumidor, se aplican los conceptos de: funciones de dos variable y de curvas de nivel. En el análisis del comportamiento de las curvas de indiferencias se utilizan los conceptos de derivada de primero y segundo orden y sus relaciones al variar sus signos. Analizan en sus gráficas, las distintas combinaciones entre el ingreso del consumidor y las posibles unidades demandadas, donde el concepto de pendiente de una curva le permiten explicar sobre los tipos de demandas, inelástica o elástica.

Para maximizar la satisfacción del consumidor bajo las limitaciones de su presupuesto, a través de una función lineal que expresa la relación entre dos bienes, apela al método de los multiplicadores de Lagrange.

Se recurre al concepto de números índices para analizar cómo la inflación influye en las preferencias del consumidor.

Al definir la ecuación de la curva de Engel, particular función de demanda de un bien en término de los ingresos posibles de los consumidores manteniéndose fijo los demás factores, se utilizan los conceptos de función de una o más variables independientes y gráfica de funciones.

La elasticidad-ingreso de la demanda se define por medio de variación de una función, variación porcentual y cociente de variaciones.

El efecto sustitución de precio y el efecto ingreso ante un cambio de precio y la relación entre ellos, se explican por medio de los conceptos de funciones de más de una variable, diferencial total y método de los multiplicadores de Lagrange. Este último se usa para minimizar la función de preferencia del consumidor a través de la curva de demanda para un bien cualquiera, con ingreso real constante.

El concepto del excedente del consumidor, importe que una persona podría pagar por una cantidad de un artículo menos el importe que el mercado le exige pagar, se explica mediante el cálculo del área de una región, utilizando el concepto de integral definida.

Para definir los conceptos de utilidad y utilidad marginal, se usan funciones de una o más variables y elementos del cálculo diferencial. También es frecuente el uso de las definiciones de extremos libres y extremos condicionados para maximizar la utilidad sujeta a restricciones presupuestarias y obtener relaciones entre la utilidad marginal y el precio de un bien.

Las Bases de los Costos y la Oferta:

Para explicar los conceptos de costos y oferta comienza con los principios de la producción.

La función producción en término de los insumos se define con los conceptos de funciones de una y de varias variables, recurriendo a la gráfica de una función de dos variables como una superficie en el espacio tridimensional. Las distintas combinaciones de recursos que se requieren para que una empresa alcance cierto nivel de producción se representan a través de curvas de nivel, llamadas isocuantas. Para el análisis del comportamiento de estas últimas se utilizan los conceptos de derivada de primero y segundo orden y las interpretaciones de la variación de sus correspondientes signos.

La tasa marginal de sustitución técnica se mide como la cantidad de un insumo que la empresa está en posición de ceder a cambio de una unidad adicional de otro, sin que se produzcan pérdidas en la producción. Cualquier combinación de insumos se mide mediante la pendiente de la isocuanta en el punto que representa esa combinación.

Mediante el análisis del crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad y puntos de inflexión de la curva producto total por mano de obra, se describen las curvas producto promedio y producto físico marginal de ese factor. Además, se explican las tres etapas del insumo mano de obra por unidad de capital. Con idéntico procedimiento se tratan las curvas de producto para el capital y sus correspondientes etapas.

La ley de los rendimientos decrecientes, principio que afirma que, si uno de los insumos aumenta en incrementos iguales por unidad de tiempo mientras que las cantidades de los otros insumos se mantienen constantes, la producción aumentará; pero habrá algún punto más allá del cual disminuirá el producto físico marginal del insumo variable. Es decir los aumentos en producción resultantes se volverán cada vez más pequeños. Para formular esta ley se utilizan los conceptos de: promedio, incremento, derivada, relación entre el signo de la derivada y el crecimiento o decrecimiento de una función de una variable.

Las curvas de producción permiten el análisis de las eficiencias técnicas de los recursos, para diversas combinaciones de ellos, que pueden ser utilizadas en la fabricación del producto. La eficiencia técnica de cualquier recurso está representada por el concepto de producto promedio del recurso: cuanto mayor sea la producción por unidad de recurso se dice que es mayor la eficiencia técnica del recurso.

Los cambios, en una determinada proporción de todas las cantidades de los recursos usados, producen variaciones de la producción. Una función de producción que aumenta en una proporción determinada en todos los insumos, incrementará la producción en la misma proporción. Mediante la definición de función homogénea de grado “n”, se explican los conceptos económicos de rendimientos constantes, crecientes y decrecientes a escala, dependiendo cada uno de ellos del grado de homogeneidad de la función de producción. En suma, los conceptos de función homogénea y sus propiedades explican en forma matemática el comportamiento de la función de producción para los diferentes tipos de rendimientos.

Cuando se combinan los recursos, el objetivo de la empresa es usar los de menor costo, con el fin de minimizar el costo para cualquier nivel determinado de producción. Esto se explica gráficamente con las curvasde nivel llamadas curvas de isocostos, que muestran las combinaciones de dos recursos que puede comprar una empresa con un determinado costo, según los precios de los recursos. Para que una empresa minimice los costos al lograr un determinado nivel de producción, la tasa marginal de sustitución técnica entre cualquiera de sus recursos, tiene que ser igual a la razón entre los precios de esos recursos, obteniéndose la trayectoria o senda de expansión. Esto se realiza gráfica y analíticamente mediante el estudio del comportamiento de los isocostos, en el que se incluyen los conceptos de derivadas de primero y de segundo orden, pendientes, crecimientos decrecimientos, extremos y concavidad de una curva.

En la última etapa de un proceso económico, para obtener una distribución óptima o eficiente de los recursos, aunque se recurra a distintos métodos, se siguen utilizando los mismos conceptos matemáticos ya mencionados anteriormente.

Precios de Niveles de Producción de Bienes y Servicios:

Explica cómo se organiza la producción mediante los precios y las ganancias en una economía de empresa privada puramente competitiva. Además se exponen las formas en que un monopolio modifica las operaciones y los resultados del sistema.

La explicación de estos conceptos, desde el punto de vista matemático, se realiza utilizando contenidos ya mencionados en partes anteriores.

La Determinación de los Precios de los Recursos y sus Funciones:

Explica cómo se determinan los precios de los recursos y sus niveles de utilización cuando prevalece la competencia pura en los mercados, tanto de productos como de recursos. Se consideran las bases de una competencia pura, que luego influyen en la fijación del precio y en la utilización de algún recurso variable. Los principios de la producción brindan las bases para el análisis de costos, ofertas y demandas; de la fijación de precios, la utilización y distribución de los recursos; además de la distribución de ingresos y de productos.

Nuevamente, la explicación de estos conceptos, desde el punto de vista matemático, se realiza utilizando contenidos ya mencionados en partes anteriores.

Encuestas

Con el fin de recabar información, se realizó una encuesta anónima a los alumnos que cursaron la asignatura *Introducción a la Economía* durante el primer cuatrimestre del ciclo lectivo 1999.
La muestra consistió de setenta (70) encuestas, que requería información acerca de:

- Carrera, año de ingreso y materias que cursa.
- Situación académica en *Lógica y Metodología de la Ciencia* y en *Análisis Matemático*.
- Temas de estas áreas que se aplican en la asignatura objeto de la encuesta.
- Dificultades que encontró en dichas aplicaciones.

Resultados:

Luego del procesamiento de los datos, elegimos para el presente trabajo sólo las variables mas relevantes referidas a los items c) y d).

Parte de la información proporcionada por las encuestas se presentan en tablas y/o gráficos para una mejor comprensión y visualización.

Con respecto al **Item c)**, los conocimientos que los alumnos identifican y aplican en *Introducción a la Economía* y que fueron adquiridos en las asignaturas *Álgebra*, *Lógica y Metodología de la Ciencia*, *Introducción al Análisis Matemático* y *Análisis Matemático*, son:
Álgebra: Números reales, Operaciones elementales y sus propiedades, Factoreo, Ecuaciones lineales y cuadráticas, Sistemas de ecuaciones, Desigualdades, Símbolo suma, Gráficas de rectas y parábolas, y Valor absoluto.
Lógica y Metodología de la Ciencia: Simbologías, Implicancias y/o inferencias, Razonamiento, Métodos deductivo e inductivo, Interpretación y formalización de enunciados, Principios y reglas de axiomatización, Lógica proposicional, cuantificacional y de clases, y Relaciones.
Introducción al Análisis Matemático: Función de una variable, Gráficos, Derivada, Interpretación geométrica, Puntos críticos, Extremos, Criterios para localizarlos y Puntos de inflexión.
Análisis Matemático: Función de dos variables, Curvas de nivel, Gráficos, Funciones homogéneas, Función de Cobb-Douglas, Derivadas parciales, Derivación implícita, Extremos libres, Extremos condicionados e Integrales.

El porcentaje de alumnos que identifican los temas señalados se muestra en la siguiente tabla:

Tabla Nº1: Frecuencia Porcentual de la Identificación de temas.

IDENTIFICAN APLICAR TEMAS DE:	**%**
Álgebra	100.0
Lógica y Metodología de la Ciencia	40.0
Introducción al Análisis Matemático	94.0
Análisis Matemático	77.0

El total de los encuestados contesta que aplica temas de Álgebra y también de alguna de las otras asignaturas.

Se observa que los alumnos identifican la aplicación de la mayoría de los temas aprendidos en las asignaturas que corresponden a las ciencias formales. Es de destacar que Introducción a la Economía requiere de todos estos conocimientos para su aprendizaje y la interpretación de sus aplicaciones. Los alumnos supieron individualizar estas aplicaciones.
3.1.2.- En cuanto al **Item d)**, cuando los alumnos tuvieron que aplicar conceptos matemáticos, 47 (67%) dijeron hacerlo sin dificultad y sus razones se expresan en la siguiente tabla:

Tabla Nº2: Frecuencia Porcentual de las Aplicaciones.

Sin dificultad porque:	**%**
Los recordé	47.0
Los entendí	62.0
Relacionó los conceptos de matemática y economía.	23.0

En esta pregunta los alumnos dieron más de una razón a su respuesta.

De los 23 (33%) alumnos que dijeron haber tenido dificultades, los motivos se expresan en la tabla siguiente:

Tabla Nº3: Frecuencia Porcentual de las Dificultades.

Con dificultad porque:	**%**
Los olvidé	48.0
No los entendí	13.0
No relacionó los conceptos de matemática y economía.	34.7
No contesta	4.3
Total	100.0$_{(23)}$

La dificultad que predomina (48%) radica en que olvidaron los conceptos estudiados, y algunos manifestaron que ello se debe a que: “Las materias son dictadas muy rápidamente sin permitir su asimilación”. En segundo término aparece el porcentaje de los que no relacionaron los conceptos.

Con respecto a la pregunta si necesitó de otros conceptos que no fueron tratados en las asignaturas consideras, el 10 % contestó que “sí necesitó” y ellos fueron: Interpretación de gráficos, interpretación gráfica de los problemas y procedimientos probabilísticos. En la encuesta también se solicitó información sobre los medios, a los que los alumnos recurren, para su estudio. Se observó que los recursos mas usados son apuntes de clase y textos (70%); estudian sólo de apuntes de clase un 24% y los restantes no dieron ninguna respuesta.

Conclusiones

De las encuestas a los alumnos, y sobre todo, del análisis bibliográfico surge el grado de intersección entre la lógica, la matemática y las ciencias económicas.
Existe una marcada coincidencia entre los conceptos, indicados por los alumnos, que fueron adquiridos en el tratamiento de las ciencias formales y los que surgieron del análisis bibliográfico.

De este último se infiere que la metodología usada en economía, como en otras ciencias, consiste en el desarrollo de grupos de principios mediante la formulación y comprobación de hipótesis. Estas, a su vez, son consecuencia de la lógica aplicada a las premisas básicas y a las observaciones de los hechos.

Esta ponencia permite confrontar las hipótesis sobre la información que se tiene de los contenidos matemáticos requeridos para el aprendizaje de la economía. Cabría agregar, por último, que para lograr la explicación y la predicción del comportamiento de los fenómenos económicos es imprescindible tener conocimientos lógicos y metodológicos acerca de la axiomatización y los sistemas logísticos, con los metateoremas de la completitud, la consistencia, la decidibilidad y la independencia.

Este trabajo es parte del proyecto de investigación que se desarrolla en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán y cuyos resultados permitirán que los docentes reflexionemos una vez más acerca de los objetivos de “nuestra asignatura”, según la Facultad en la que esta inserta.

Referencias bibliográficas

Richard H. Leftwich y Ross D. Eckert (1995) *“Sistemas de Precios y Asignación de Recursos”*. México, Editorial: Mcgraw-Hill.

Johnson, Robert. (l996) *“Estadística Elemental”.* México. Editorial: Iberoamérica.

Weinberg, S.L. y Golberg, K.P. (l982) *“Estadística Básica para las Ciencias Sociales”*. México. Editorial Interamericana.

Young, Robert K. y Veldman, Donald J. (1968) *“Introducción a la Estadística Aplicada a las Ciencias de la Conducta”* México. Editorial Trillas S. A.

Cook, T. D. y Reichardt, Ch. (1995) *“Métodos Cualitativos y Cuantitativos en la Investigación Educativa”*: Madrid. Editorial: Morata.

La Enseñanza de la Matemática. Sistema de Habilidades Lógicas y su Relación con el Aprendizaje de esta Ciencia.

Mercedes Naraskevicins; Ana Lasserre;
Edna Agostini; Celia Torres Bugeau;
Josefina Royo; Dora Odstrcil
Universidad Nacional de Jujuy
Argentina

Encuadre Político-Educativo

En la Rep. Argentina a partir del año 1993, se inició una etapa llamada “Transformación Educativa”. A casi un decenio de su inicio y en los albores de este milenio alcanzó un desarrollo importante a nivel cuantitativo por la amplia cobertura lograda a nivel nacional. A lo largo y a lo ancho del país se fueron cristalizando los nuevos diseños curriculares, siendo el Nivel Inicial, EGB I y EGB II los primeros en concretarse. La EGB III, el nivel Polimodal y los Trayectos Técnicos, que son posteriores, se encuentran en la etapa llamada de “experiencias anticipatorias”.

Los Institutos de Formación Docente, o sea el nivel superior no universitario, son un capítulo aparte por el grado de complejidad y diversificación en la toma de decisiones políticas en cuanto a su permanencia y/o fortalecimiento o la desaparición transitoria o definitiva de los mismos. Esto se evidencia en los discursos políticos y las normativas emanadas del poder político Nacional y Provincial.

Problema e hipótesis de trabajo

Esta transformación se propone mejorar el sistema educativo que estuvo vigente 100 años en la Argentina, acorde a parámetros internacionales de calidad educativa, adaptando las acreditaciones del mismo al mercado laboral fluctuante, de este nuevo siglo. Coherentes con esta nueva propuesta educativa y conscientes de los problemas que se generan en toda transición y que en este caso involucran tanto al alumno como al maestro, como equipo de investigación educativa, nos propusimos una línea de acción en este trabajo, cuyos resultados pudieran colaborar con nuestros colegas jujeños, esclareciendo la problemática de la tan conocida dificultad que manifiestan los alumnos en el aprendizaje de la Matemática, como así también instrumentar en la enseñanza de la misma. Para esta experiencia se seleccionó el nivel del sistema educativo llamado EGB III.

Esta línea de trabajo no es nueva para este grupo de investigación, y trabajos anteriores, como “*Hacia una nueva dinámica en la enseñanza de la Matemática”*, sirvieron de fundamento empírico para generar nuevas hipótesis acerca de cuáles son los factores que obstaculizan el abordaje de la Matemática en la escuela.

Así, las “habilidades lógicas” que necesitan los alumnos previamente a la apropiación de nuevos saberes, atraparon nuestra atención.

De manera tal que la hipótesis que sostenemos en este trabajo es que el *factor determinante del fracaso en el aprendizaje de la Matemática es la carencia de formación en los alumnos de las habilidades lógicas necesarias para poder acceder a posteriores aprendizajes más complejos, o a competencias de mayor complejidad en esa área.*

Caracterización del nivel educativo en estudio. Contexto escolar

Es necesario caracterizar brevemente este 3º Ciclo de E.G.B. :

1. Los alumnos atraviesan por un momento evolutivo que abarca la pubertad-adolescencia.

2. En este nivel, se completan los aprendizajes considerados básicos para el desarrollo personal y el desempeño como ciudadano mediante la adquisición de competencias sociales.
3. Tiene como meta ampliar los campos de acciones posibles, tanto en relación con la prosecución de estudios como en el mundo del trabajo.
4. Culmina con la escolaridad obligatoria y articula con el Polimodal.

El sujeto de aprendizaje de este nivel es considerado en los Diseños Curriculares de la provincia de Jujuy, desde una perspectiva de realidad, pensada como una construcción y una representación social donde los sujetos accionan a partir de la representación que se forjan de esa realidad en el seno de los procesos de interacción social.

Desde este lugar se puede sostener que no existe el sujeto universal del tercer ciclo, sino púberes-adolescentes situados en realidades concretas donde transcurren las diferentes formas de vida cotidiana. En este sentido se deben reconocer los distintos modos con que los mismos establecen relaciones con los diversos contextos socio-culturales.

Esta última afirmación será una variable importante a tener en cuenta en el análisis e interpretación de los datos empíricos recogidos en el trabajo de campo.

Otra variable importante será el análisis de los modos de construcción de las estructuras complejas de pensamiento en estos alumnos, considerada no homogénea ni espontánea en su adquisición.

Además en esta etapa evolutiva se deberá tener en cuenta los cambios que se manifiestan asociados al pensamiento de los alumnos. Estos cambios van produciendo modificaciones internas que se traducen en la construcción de estructuras más complejas de pensamiento. Desde esta perspectiva la realidad contextual donde se desenvuelven los alumnos de la muestra en estudio, será un factor importante al momento del análisis de los datos empíricos y conclusiones pertinentes.

De los objetivos de nuestra investigación

Al iniciar esta investigación nos propusimos:

- Diagnosticar en los alumnos ingresantes a la EGB III el nivel de adquisición de habilidades lógicas u operaciones mentales, necesarias para el aprendizaje de la matemática en ese nivel.
- Determinar cuáles son las falencias básicas de la enseñanza de la matemática en EGB I y II que obstaculizan o no estimulan la adquisición de las habilidades lógicas necesarias para el aprendizaje de la matemática en EGB III.
- Proponer un sistema de acciones compensatorias que estimulen el desarrollo de esas habilidades
- Desarrollar algunas ideas generales acerca de cómo trabajar los conceptos básicos de Aritmética y Geometría acorde a la etapa evolutiva del estudiante de EGB III.

DESARROLLO

a) Estado de avance descrito a partir de la evaluación del nivel de concreción de los objetivos antes expuestos

Las etapas de la investigación se fueron cumpliendo gradualmente, habiéndose concretado el primer objetivo de la siguiente manera:

Se seleccionaron dos unidades educativas para la aplicación de los tests de diagnóstico inicial.

- En la primera unidad educativa tomada como parte del universo de estudio se trabajó con los 6º grado, correspondientes al último tramo de EGB II. En la otra experiencia se aplicó el test a alumnos de 7º año, o sea el primer curso de EGB III.
- La edad promedio de los alumnos en el 1º caso es de 11,5 años
- En la otra escuela (EGBIII), la edad promedio es de 14 años, superior a la media normal de este nivel que es de 12,5 años..
- Las características socio-económicas de los alumnos seleccionados corresponden a niños provenientes de sectores de recursos económicos críticos.
- Del análisis de los datos obtenidos en el diagnóstico inicial se pudo definir un cierto perfil de los alumnos según las habilidades intelectuales puestas en juego para resolver las situaciones problemáticas, planteadas por los investigadores.

b) Aplicación de las pruebas de diagnóstico

Con cada uno de los grupos se hicieron dos tests:

- El primero consistió en una prueba con elementos concretos, (fotografías recortadas de revistas), que debían clasificar u ordenar de acuerdo a las consignas indicadas

Test nº 1

Actividad 1 : (consigna dada en forma oral). "Agrupar las imágenes según que las personas sean: de cuerpo entero, torso o sólo cabeza"

Actividad 2 : " Agrupar las imágenes según que las personas vistan ropa deportiva, sport o de vestir"

Actividad 3 : "Agrupar y ordenar las figuras en niños, jóvenes, adultos y ancianos"

Actividad 4 : "Establecer categorías de clasificación respecto al color del cabello y agrupar las imágenes según esas categorías".

Con este test se buscaba verificar que los alumnos, a la edad de entre 11 y 14 años, tenían las habilidades lógicas más elementales es decir, la clasificación y la seriación.

El 2º test consistió en una serie de 4 problemas matemáticos con distintos grados de abstracción.

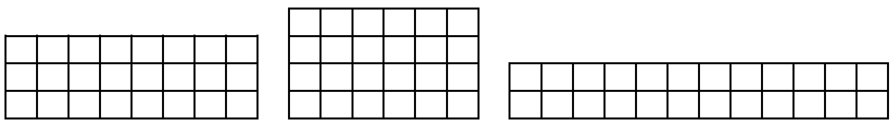
Test nº 2

Actividad 1 : ¿Cuántos triángulos equiláteros hay en la figura?

Actividad 2 : Completa el siguiente cuadrado con los números que faltan, de manera tal que la suma de los números correspondientes a cada fila, cada columna y cada diagonal sea la misma.

	21	
24	9	12

Actividad 3 : ¿Cuál de los siguientes rectángulos tiene mayor área?



Actividad 4 : "¿Cuántos días podré alimentar 40 caballos con 2 tn de forraje si para alimentar 20 caballos durante 50 días necesito 8 tn?"
a) ¿ Cuáles son los datos del problemas?

b) ¿Qué se quiere averiguar?

Para la implementación de ambas pruebas se distribuyeron los alumnos en grupos de no más de tres. Los miembros del equipo de investigación tenían la consigna de observar el trabajo de los grupos, registrando sus discusiones, el grado de participación de los integrantes, la existencia de un liderazgo marcado, etc

En principio, no se debía responder ninguna pregunta en relación al trabajo que los niños debían realizar. Sin embargo, en algunos casos fue necesario hacer alguna aclaración respecto a la consigna. Se registró qué aclaración se le hizo a cada grupo.

c) Análisis de los datos, resultados y conclusiones

La 1º prueba, fue resuelta por el 100% de los grupos aunque de todos modos surgieron algunas observaciones que podemos destacar. Entre ellas:

- La consigna de la primera actividad fue comunicada en forma verbal y, en ambas escuelas, fue necesario explicitar nuevamente las indicaciones de cómo realizar el trabajo. Ello no ocurrió con el resto de las actividades, donde las consignas figuraban escritas en los instructivos, de lo que se infiere la diferencia en la comprensión oral con respecto al lenguaje de los investigadores.
- En la escuela de EGB III donde los alumnos son de mayor edad se observó mayor seguridad a la hora de clasificar las figuras de acuerdo a las categorías prefijadas.
- Asimismo esos adolescentes, en la actividad donde debían construir las categorías y luego clasificar de acuerdo a ellas, fueron capaces de establecer un número importante de categorías (hasta siete). En cambio en la otra escuela los niños sólo establecieron a lo sumo tres categorías (pelo negro, marrón o castaño y rubio), aunque la mayoría (el 70%) sólo definió dos (pelo oscuro y pelo claro).

d) Consideraciones resultantes del análisis del 2º test

a) La lectura vertical de los resultados se sintetiza en el análisis de los niveles de resolución de cada pregunta. Así tenemos:

- La respuesta al 1º problema tiene dos niveles: a) aplicación del concepto de triángulo equilátero y b) inferencia perceptiva acompañada por el concepto y reconstrucción de las figuras.
  Respecto del primer nivel, en la escuela de EGB II, el 100% de los grupos manejaba el concepto de triángulo equilátero. En la escuela secundaria, sólo el 60% de los grupos respondió esta pregunta y de acuerdo a las consultas que los grupos hicieron a los investigadores podemos inferir que varios de ellos no manejaba ese concepto.
  Por el contrario respecto del 2º nivel, el rendimiento fue mayor en la escuela de EGB III. Allí el 50 % de los grupos que intentaron la respuesta hizo la inferencia perceptiva esperada aunque el resultado final no coincidiera. En la escuela de EGB II, ningún grupo percibió los triángulos de lado 2, 3 o 4.

- La importancia de la 2º actividad radica fundamentalmente en la comprensión de la consigna y en menor medida en el cálculo correcto. En la escuela de EGB II el 60% de los grupos interpreta la consigna, pero sólo el 15% hace bien los cálculos. En la escuela de EGB III solo el 10% de los grupos interpreta la consigna, mientras que ninguno lo resuelve correctamente.

- Es un ejemplo que requiere poseer la habilidad de la reversibilidad de las operaciones. En esta actividad, la escuela de EGB II obtuvo un 40% de respuestas correctas y la de EGB III un 10%.

- El 4º problema es un ejemplo de interpretación de textos: identificación de los datos y de la incógnita en un problema. En este ejercicio, el rendimiento en la escuela de EGB III es positivo en un 40% y en la escuela de EGB II, de un 20%.

Como comentario extra podemos agregar que, al realizar este 2º test, pudimos observar que la mayoría de los alumnos, paradójicamente aquellos más avanzados, no pueden aplicar los conceptos geométricos que les fueron enseñados en grados anteriores. Ello se planteó tanto en el problema de triángulos equiláteros como en él de comparación de áreas.

b) Lectura horizontal de los datos: habiendo cuantificado los distintos niveles de complejidad de cada ejercicio, construimos una tabla que nos permitiera analizar los rendimientos de cada uno de los grupos. Para cada uno de los colegios, esas tablas son:.

COLEGIO SECUNDARIO 2 (1º AÑO EGB III)

Grupo		**Actividad 1**			**Actividad 2**			**Act. 3**	**Actividad 4**		
nº	Pt	1ºniv.	2ºniv.	Total	1º niv.	2º niv.	Total	Total	Dat.	Preg.	Total
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	5,5	1	0,5	1,5	0	0	0	3	0	1	1
5	1,5	1	0,5	1,5	0	0	0	0	0	0	0
6	5,5	1	0,5	1,5	1	0	1	0	2	1	3
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1,5	1	0,5	1,5	0	0	0	0	0	0	0

ESCUELA J. B. de la BARCENA (6º AÑO EGBII)

Grupo		**Actividad 1**			**Actividad 2**			**Act. 3**	**Actividad 4**		
nº	Pt	1ºniv.	2ºniv.	Total	1º niv.	2º niv.	Total	Total	Dat.	Preg.	Total
1	5,5	1	0	1	1,5	0	1,5	3	0	0	0
2	4	1	0	1	0	0	0	3	0	0	0
3	7	1	0	1	1,5	0,5	2	3	0	1	1
4	2,5	1	0	1	1.5	0	1,5	0	0	0	0
5	3,5	1	0	1	1,5	0	1,5	0	0	1	1
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	5	1	0	1	1,5	0,5	2	2	0	0	0
8	2	1	0	1	0	0	0		0	0	0
9	2,5	1	0,5	1,5	0	0	0	0	0	1	1

Al realizar la lectura al interior de cada grupo desconcierta la no relación positiva entre los que lograron un buen nivel en la pregunta 1. En efecto, en general no se puede proyectar ese nivel positivo hacia adelante es decir al resto de las preguntas. Así, por ejemplo, vemos porque un grupo de los que respondieron más correctamente la 1 tiene algún tipo de respuesta positiva en la dos, pero en ese caso es nulo su rendimiento en la tres y apenas discreto en la 4. Otro grupo, tiene buen rendimiento en la 1 y en la 3, pero nulo en la dos y en la 4.

La realización de las pruebas y el análisis efectuado nos permiten completar nuestro primer objetivo y hacer una primera aproximación del 2º. La profundización del análisis efectuado permitirá completar la determinación de las falencias que inducen el fracaso en la aprendizaje de la matemática en los niveles estudiados.

Esta es la presentación de los primeros resultados obtenidos en el trabajo de campo, estando en vías de realización otras estrategias de investigación complementarias para disminuir o minimizar la vulnerabilidad de las conclusiones empíricas

COLEGIO SECUNDARIO 2 (1º AÑO EGB III)

Grupo	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
Pregunta	¿Cuántos triángulos equiláteros hay en la figura? Rta: 27 triángulos	Completar el cuadrado, sabiendo que la suma de todas las filas, columnas y diagonales es la misma	¿Cuál de los rectángulos tiene mayor área? Rta: Son iguales	Problema de regla de tres
Criterios	Hay dos niveles en la respuesta -aplicación del concepto de triángulo equilátero (1 pto) - inferencia perceptiva + concepto y reconstrucción de las figuras (1 pto) Total : 2 puntos	Dos niveles en la respuesta - comprensión de la consigna (1,5 pto) - sin error de cálculo (0,5 pto) Total : 2 ptos	Requiere poseer la habilidad de la reversibilidad de las operaciones. Se considera sólo si está bien : 3 puntos Se considerará algún puntaje a aquel grupo que por no haber podido ponerse de acuerdo entre sus integrantes, da todas las respuestas en discusión	Problema de interpretación de texto matemático. Problema que corresponde al nivel. - Identificación de los datos : 2 puntos - Identificación de la pregunta : 1 pto
1	Rta: 6 triángulos (no hay indicios de cómo contaron)	Mal (no interpreta la consigna)	Mal. Eligen opción 2	Datos: Mal Pregunta: Bien
2	Rta: 5 triángulos (no hay indicios de cómo contaron)	Mal (no interpreta la consigna)	Mal. Eligen opción 2	Datos: Bien Pregunta: Mal
3	Rta: 16 triángulos (contaron sólo los de lado 1)	Mal (no interpreta la consigna)	Mal. Eligen opción 2	Datos: Mal Pregunta: Mal
4	Rta: 19 triángulos (no hay indicios de cómo contaron)	Mal (no interpreta la consigna)	Bien	Datos: Mal Pregunta: Bien redacción y ortografía deficientes
5	Rta: 19 triángulos (no hay indicios de cómo contaron)	Mal (no interpreta la consigna)	Mal. Eligen opción 3	Datos: Mal Pregunta: incompleta
6	Rta: 21 triángulos (no hay indicios de cómo contaron)	Regular (Interpreta la consigna pero comete errores de cálculo)	Mal. Eligen opción 3	Datos: Bien (tiene bien aprendido la forma de planteo para resolver problemas de regla de tres Pregunta: Bien
7	no responde	Mal	Mal. Eligen opción 1	Datos: Mal (toma la pregunta como dato) Pregunta: Mal
8	Rta:5 triángulos (cuentan 5 de lado 2)	Mal (no interpreta la consigna)	Mal. Eligen opción 1	Datos: Toma el tipo de dato y no las cantidades de c/u Pregunta: Mal
9	Rta: 21 triángulos (cuentan 16 de lado 1 y 5 de lado 2)	Mal	Mal. Eligen opción 3	Datos: mal Pregunta: mal

ESCUELA J.B. DE LA BÁRCENA (6º Año EGBII)

Grupo	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4
Pregunta	¿Cuántos triángulos equiláteros hay en la figura ?	Completar el cuadrado	¿Cual de los rectángulos tiene mayor área ?	Problema de regla de tres
Observ.	La mayoría de los grupos sólo cuenta los	En general no se dan cuenta que la suma	Requiere poseer la habilidad de la	Problema de interpretación de texto

	triángulos de lado 1 sin tener en cuenta los de lado 2, 3 y 4. Hay dos niveles de respuest: -aplicación del concepto de triángulo equuilátero (1 pto) - inferencia perceptiva + concepto y reconstrucción de las figuras (1 pto) Total : 2 puntos	debe ser siempre igual a pesar de que la consigna lo dice. Dos niveles: - comprensión de la consigna (1,5 pto) - sin error de cálculo (0,5 pto) Total : 2 ptos	reversibuilidad de las operaciones. Bien o mal: 3 puntos Se considerará algún puntaje a aquel grupo que por no haber podido ponerse de acuerdo entre sus integrantes, da todas las respuestas en discusión.	matemático. Problema que corresponde al nivel. - Identificación de los datos: 2 puntos - Identificación de la pregunta: 1 pto
1	16	2 errores	Correcta	No responde
2	16	No completa	correcta	Los datos son 90, 40 ¿Cuántas toneladas hay ?
3	16	Bien	correcta	datos : que a 40 caballos podríamos alimentar Pregunta. Bien
4	16	2 errores	No contesta	Datos : no indica Pregunta : que se quiere para alimentar al caballo
5	15	3 errores	Opción 3	Datos : son lo que se quiere averiguar Pregunta : bien
6	16	mal	Opción 3	Datos : una suma Pregunta ¿Cuántos días podrá alimentar a un caballo ?
7	16	Bien	3 opiniones (1 sola bien)	Datos : alimentar caballos según la tonelada Pregunta : ¿Cuánto comen los caballos por día ?
8	16	No responde	2 opiniones (ninguna correcta 1 y 3)	No responde
9	17	mal	opción 3	Datos : no responde Pregunta : bien

Referencias bibliográficas

ASSAEL y otros (1989) "**Alumnos, padres y maestros. La representación de la escuela"** - Programa Interdisciplinario de investigaciones en educación (PIIE) - Santiago de Chile

CAMPBELL, D. y STANLEY, J. (1995) "**Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social"**- Amorrortu Editores - Buenos Aires

BLALOCK, H. (1994) "**Estadística social"** - Fondo de Cultura Económica SA de CV - México

PIAGET, J; INHELDER, B. (1977): **"Psicología del niño"** - Ediciones Morata - Madrid

NARASKEVICINS, M.; ODSTRCIL, D.; ROYO, J.; TORRES BUGEAU, C.; AGOSTINI, E.; LASSERRE, A. (1998) **"Lectura comprensivo-activa en la enseñanza de la matemática".** En Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa- Pág 151 a 154 - Grupo Editorial Iberoamérica - México.

ODSTRCIL, D.; ROYO, J.; TORRES BUGEAU, C.; AGOSTINI, EDNA; LASSERRE, A.; NARASKEVICINS, M. (1997) **"En búsqueda de una propuesta en la enseñanza de la geometría"** - En Investigaciones Educativas - Víctor Manuel Hanne - Salta - Argentina

ROYO, J.; TORRES BUGEAU, C.; AGOSTINI, EDNA; LASSERRE, A.; NARASKEVICINS, M.; ODSTRCIL, D. (**1998)- "Aportes para la integración de niveles en Educación Matemática,**

en el marco de la Transformación Educativa en la Provincia de Jujuy"- Trabajo presentado en IV Seminario Internacional de Integración Subregional - Puno - PERU

TORRES BUGEAU, C.; AGOSTINI, EDNA; LASSERRE, A.; NARASKEVICINS, M.; ODSTRCIL, D.; ROYO, J. (1998) - **"Una alternativa en la enseñanza de la Matemática"** - Trabajo presentado en XII RELME - Bogotá (Colombia) -

AGOSTINI, EDNA; LASSERRE, A.; NARASKEVICINS, M.; ODSTRCIL, D.; ROYO, J.; TORRES BUGEAU, C. (1998)- **"La geometría: ¿puede aprenderse de otro modo?"** - Trabajo aceptado para ser presentado en el 1º Congreso Argentino en Educación Matemática Resistencia (Chaco)

LASSERRE, A y otros (1994) - **"El niño y las matemáticas escolares: ¿que se enseña en las aulas?"** - Trabajo presentado en IV Jornadas de Investigación en Humanidades y Cs. Sociales - UNJu -

ODSTRCIL, D.; ROYO, J.; TORRES BUGEAU, C.; AGOSTINI, EDNA; LASSERRE, A. (1993) - **"Posibles causas del fracaso de los alumnos en Matemática" -** Jornadas sobre Fracaso Escolar - FHyCS - UNJu.

BARDAVID, D; DAINO, M; LASSERRE, C; LASSERRE, A (1995) **"El niño y las Matemáticas escolares: Análisis del curriculum"** - Cuadernos de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales Nº 5- JUJUY - Pág. 19 a 25. -

BARDAVID, D; DAINO, M; LASSERRE, C; LASSERRE, A (1995) **"Obstáculos en la enseñanza de la estructura multiplicativa : una cuestión didáctica"** - 1995 - En Publicaciones de la IX Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa - Vol. II. Página 49 a 54. LA HABANA. Cuba.

La Investigación Educativa como Apoyo a la Docencia en Carreras de Ingeniería

José María Lagger
Facultad Regional Santa Fé (U.T.N.)
Argentina

Introducción

Toda interrelación entre seres humanos es un fenómeno complejo que depende de un sinnúmero de variables. Ante este hecho incuestionable tenemos que suponer que la DOCENCIA lo es aún más por su característica de mantener un permanente contacto entre el docente y sus alumnos y entre estos mismos.

A su vez, la calidad educativa, en sus diversos niveles y modalidades, ha sido fuertemente cuestionada en estos últimos años por las propias autoridades gubernamentales de nuestro país.

Por otra parte, se ha producido recientemente una fuerte corriente en el sentido de establecer nuevos modelos organizativos de la educación en todos sus niveles. No son ajenas a estos cambios las Facultades de Ingeniería de todo el país.

Todos estos aspectos que se han mencionado justifican plenamente la existencia de un Gabinete de Asesoramiento Pedagógico en cada institución universitaria. El aprovechamiento que de él se puede hacer resulta muy variado y, en cualquier caso, redundará en beneficio de una mejor calidad en el proceso educativo.

Desde otro punto de vista, un aspecto que todavía se encuentra en proceso de desarrollo, en nuestro país, es el de la Investigación Educativa a Nivel Universitario.

Por todo lo expresado es que se presenta este trabajo con la intención de mostrar que la investigación mencionada puede contribuir fuertemente a encontrar caminos que conduzcan a una jerarquización del proceso enseñanza-aprendizaje.

A continuación se detalla una breve reseña sobre diversas causas que han motivado la creación de un Grupo de Investigación Educativa en la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional de la República Argentina.(U.T.N.)

En la mencionada repartición se ha puesto en marcha, a partir de 1995 y en todas sus Facultades, un Nuevo Diseño Curricular con el cual se pretende revertir falencias en el sistema educativo que fueron detectadas y consideradas en Jornadas Nacionales de Discusión Académica que fueron llevadas a cabo oportunamente.

Los aspectos fundamentales que el Consejo Superior de la U.T.N. destacó en la Resolución con la cual puso en vigencia el Nuevo Diseño fueron la intención de lograr:

- Actualización de criterios para la formación de ingenieros.
- Aumento de la motivación en la comunidad educativa.
- Disminución de la deserción estudiantil.
- Facilidad de inserción laboral del egresado.
- Un ingeniero creativo capaz de interpretar y generar cambios.

A partir de estas consideraciones se estableció que el diseño debe estar orientado a:

- Producir un ingeniero tecnológico capacitado para desarrollar sistemas de ingeniería y, paralelamente, aplicar la tecnología existente. Esto es, formar graduados que estén comprometidos con el medio y que puedan ser promotores de cambios y que estén al servicio de un proyecto de crecimiento productivo posibilitando el desarrollo social.
- Promover la educación continua del egresado a través de cursos, seminarios y carreras de postgrado, a fin de intensificar su espíritu crítico y de investigación.

Posteriormente, a fines de 1994, se aprobó la Ordenanza que pone en ejecución el Nuevo Diseño Curricular.

Lamentablemente, pese a las buena intenciones que se manifestaron en la mencionada Ordenanza con miras a la capacitación de los Recursos Humanos a fin de permitir llevar a feliz término la aplicación del nuevo diseño, no fue posible concretarlo en toda su magnitud (al menos en nuestra Facultad). Esto determinó que gran parte del cuerpo docente no se encontrara suficientemente preparado para afrontar los cambios que debían producirse.

En el marco de esta introducción no debe omitirse la circunstancia que, en los últimos años, ha habido un fuerte incremento en la matrícula de los ingresantes a nuestra Facultad sin la correspondencia de cargos docentes para atender las nuevas necesidades. Esto condujo a que cada docente debiera atender una cantidad muy grande de alumnos en los dos primeros niveles de algunas de las carreras que la Facultad ofrece. Si a lo dicho se le agrega que las causas que motivaron a los ingresantes a seguir determinada carrera son muy disímiles (profesiones exitosas, emular a los padres, influencia de estos, problemas económicos que les impiden concretar su vocación, etc.) y que, en al mayoría de los casos, la decisión adoptada no ha sido acompañada por una adecuada orientación vocacional es evidente que el panorama que se presentó para desarrollar la actividad docente fuera muy sombrío.

Frente a tal diversidad de variables que afectan al proceso enseñanza-aprendizaje, una investigación sobre el estado actual de éste y sobre las modificaciones a ejecutar para mejorar su calidad resultaba imprescindible. Es así como un grupo de docentes de diversas disciplinas de las Ciencias Básicas decidió formar un equipo para atender las necesidades que se planteaban en el sentido mencionado.

La Investigación Educativa

La investigación educativa no ha alcanzado en nuestro país, al menos a nivel superior, un desarrollo que permita contar con información valiosa que pueda ser analizada y aplicada en el ámbito universitario. La mayoría de los textos que atienden este problema lo hacen a nivel de enseñanza primaria y, en menor escala, de secundaria.

Cabe preguntarse entonces. ¿ En que medida es válido extrapolar las experiencias con alumnos del primer y segundo niveles educativos al nivel superior? Si suponemos que el alumno que accede a la Universidad ha alcanzado cierta madurez intelectual, está claro que las metodologías de educación para ellos no debieran ser similares a las de los niveles inferiores. Esto concuerda con la opinión generalizada de los propios alumnos en el sentido que ellos se consideran autosuficientes como para decidir por sí solos los pasos a seguir cuando reciben la instrucción en las diversas asignaturas.

Sin embargo, la experiencia de aquellos que hace ya muchos años ejercemos la docencia nos dice que la mayoría de los estudiantes que están cursando materias del primer y segundo nivel de cualquier carrera universitaria requieren de orientación y, en ciertos casos, hasta de alguna compulsión para conseguir las metas que el sistema educativo se ha propuesto. Tal compulsión resulta ser el incentivo que el alumno necesita para atender a la asignatura en cuestión con la debida responsabilidad. Ante este estado de cosas debiera ser, entonces, un autoaprendizaje de parte de aquellos alumnos suficientemente capacitados, con un docente como tutor, dejando la actividad de aula (clases teórico-prácticas) para aquellos que presentan dificultades en el aprendizaje.

En todo caso corresponde realizar ciertas reflexiones: es un hecho irrefutable que el conocimiento no crece naturalmente sino que se logra por la investigación de los estudiosos. En ese sentido " una saludable tendencia actual es la aparición de modelos y programas de investigación mas complejos que tienen en cuenta una amplia gama de determinantes que influyen sobre la práctica de la enseñanza y sus consecuencias". (Lee Shulman - Universidad de Stanford)

La opinión anterior nos está diciendo de la íntima relación que existe entre las ciencias, la investigación y el pensamiento. ¿ Cuales serían, entonces, las investigaciones de interés en Educación?

- Las que, por sus enfoques, contribuyan a configurar una base teórica sobre la cual se apoye todo el sistema educativo de determinada disciplina con cierto grado de autonomía y, a la vez, con una visión interdisciplinaria para, de esa manera, lograr la coordinación horizontal y vertical que permita ver a los problemas que se presenten en su verdadera dimensión y no como compartimentos estancos.
- Aquellas que, por sus resultados, contribuyan a mejorar los currículum de la disciplina en cuestión o propicien la introducción de cambios en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Las que, por su trascendencia, permitan generar recomendaciones para los distintos estamentos (directivos, docentes, estudiantiles) no sólo en la Universidad sino, también, en los niveles medio y terciario de la educación.

Las consideraciones anteriores nos conducen a emitir el siguiente juicio: **la existencia de un Gabinete de Asesoramiento Pedagógico, con la colaboración de un Grupo de Investigación Educativa sería la estructura adecuada para analizar todos los aspectos que hacen a una mejor calidad educativa.** Sin embargo, nuestra Facultad no cuenta con un Gabinete Pedagógico que permita atender estos y otros aspectos referentes al trayecto del estudiante en la Universidad. La pregunta de debemos hacernos, entonces, es la siguiente: ¿ se puede suplir la falta de un Gabinete de Asesoramiento Pedagógico con otros Recursos Humanos?. De ser ello posible, ¿cual debiera ser su estructura?

Los que estamos fuertemente comprometidos con la tarea de enseñar podemos dar pautas que contribuyan para que el organismo que se encargue de esa tarea cumpla la función que le compete con eficiencia.

En nuestra Facultad existe una dependencia que tiene la responsabilidad de atender e instrumentar todo lo atinente al ingreso de los aspirantes a las distintas carreras de ingeniería. La Dirección de Acceso a la Universidad (DAU) (tal es el nombre de la mencionada dependencia) está en contacto permanente con el Departamento de Materias Básicas a fin de intercambiar opiniones en cuanto a las estrategias a seguir en el desarrollo del Curso de Ingreso, el cual es de aprobación obligatoria para el acceso al cursado de las materias de grado.

¿ Podemos pensar, entonces, en un grupo de investigadores que, en íntimo contacto con la DAU, realicen una investigación profunda no sólo sobre el alumno ingresante sino sobre los que se encuentran en distintos niveles de la Enseñanza Universitaria? Precisamente, una respuesta positiva a estos interrogantes ha sido el incentivo para que una buena cantidad de docentes de distintas disciplinas se abocaran a la investigación educativa con la finalidad última de generar recomendaciones que contribuyan a mejorar la calidad de la enseñanza y la efectividad del aprendizaje en las distintas carreras de ingeniería.

El G.I.E. (Grupo de Investigación Educativa y de Apoyo y Seguimiento al Estudiante)

Tal como se mencionó anteriormente, los diversos problemas que se observaron en el sistema educativo fueron el detonante que motivó que se produjera un movimiento de algunos docentes en el sentido de lograr un aprendizaje eficaz de parte de los alumnos de las carreras de ingeniería.

Es así como surge la idea de la creación de un Grupo de Investigación Educativa que permitiera alcanzar las metas propuestas. De esta manera nace el G.I.E., cuyos integrantes son docentes-investigadores que provienen de distintas disciplinas (ingenierías, matemática, ciencias sociales, física y tecnologías gestionales). Es decir, se trata de un equipo interdisciplinario.

El equipo generó dos proyectos de investigación y desarrollo que pueden ser encuadrados en lo que se conoce con el nombre de INVESTIGACIÓN-ACCIÓN.

Uno de los mencionados proyectos se denominó "Perfiles reales del aspirante y competencias de formación necesarias para el aprendizaje eficaz en carreras de ingeniería".

El objetivo general de este proyecto fue el siguiente: " Producir un cuerpo de conocimientos y de metodologías que generen un sistema de información permanente sobre los perfiles reales del aspirante a las carreras de ingeniería y sobre las competencias necesarias para un aprendizaje eficaz en las diversas áreas curriculares de las ciencias básicas en dichas carreras".

Los objetivos específicos fueron:

1) Elaborar, poner a prueba y reajustar un sistema de evaluación de la calidad educativa del aspirante, del ingresante y del cursante en las áreas curriculares de las ciencias básicas en carreras de ingeniería.
2) Definir y construir un sistema de información sobre las competencias necesarias para un aprendizaje significativo en la áreas mencionadas y en sus niveles de profundización.
3) Generar recomendaciones y pautas para la articulación de estos niveles de la enseñanza.

El segundo proyecto, "Metodologías alternativas para la enseñanza en el área Matemática", tuvo como objetivo general elaborar un conjunto de metodologías para adecuar el nuevo proceso de enseñanza-aprendizaje en el marco del Nuevo Diseño Curricular. Fueron sus objetivos particulares:

1) Realizar un estudio de diagnóstico y evaluación sobre las condiciones iniciales en el proceso enseñanza-aprendizaje.
2) Analizar estrategias pedagógicas y paquetes computacionales que pudieran aplicarse en la enseñanza de la Matemática.
3) Producir recomendaciones y pautas para la enseñanza de la Matemática en carreras de ingeniería.

Ambos proyectos se desarrollaron con algunas dificultades pues al no encontrarse bibliografía específica y no contar con el conocimiento de otros grupos de investigación que recorrieran el mismo camino que nos habíamos impuesto, costó mucho trabajo recoger la información necesaria para desarrollar las actividades que los proyectos indicaban. Fue así como los integrantes del grupo debimos recurrir a ensayar experiencias y luego modificarlas para obtener la corrección correspondiente que permitiera lograr los propósitos que nos habíamos impuesto.

Se ha estudiado la calidad educativa de los ingresantes, cuales son las áreas deficitarias y si las estructuras académicas y la formación profesional de los docentes de los primeros niveles de la enseñanza permite responder de forma superadora a la situación real del ingresante.

Al cabo de todas las actividades previstas en los proyectos se ha llegado a conclusiones a las cuales haré referencia luego, pero vale la pena mencionar que las evaluaciones correspondientes al aprendizaje de la Matemática en el primer nivel de la enseñanza no ha sido fácil de determinar por la circunstancia que, en las carreras de Ingenierías Civil, Eléctrica, Mecánica e Industrial, casi todas las asignaturas son de dictado anual mientras que en Sistemas de Información lo son cuatrimestrales excepto Análisis Matemático I, que es anual, lo que provoca que los alumnos comiencen a prestarle atención a partir del segundo cuatrimestre.

Conclusiones

Las consideraciones más importantes a que se han arribado en ambos proyectos pueden catalogarse según las principales variables que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje: los alumnos, los docentes y las metodologías educacionales aplicadas.

En los que se refiere a los alumnos se practicaron las siguientes actividades:

- elaboración y aplicación de:
    1) Test diagnóstico sobre conocimientos básicos de la matemática aprendidos en la escuela media.
    2) Instrumentos de evaluación acerca del desarrollo del pensamiento formal en los ingresantes.
    3) Encuestas a alumnos del segundo y tercer nivel universitario con el objeto de obtener información acerca de: escuela de origen, horas dedicadas al estudio, situación laboral, percepción de dificultades detectadas en el aprendizaje, preferencia bibliográfica y de método de promoción.
- Determinación de las competencias lingüísticas, tecnológicas y de las ciencias de la naturaleza de los ingresantes.

Las conclusiones obtenidas en cada uno de los aspectos mencionados fueron que:

- Los alumnos que egresan de la escuela media, en general, lo hacen con un déficit muy grande del manejo de los conceptos básicos del álgebra y la geometría elementales lo que conduce a que tengan dificultades en el momento de realizar la operatoria requerida. Aquí se aprecia una diferencia considerable entre los alumnos provenientes de las escuela técnicas respecto de los de otros orígenes.
- Sólo la mitad de los ingresantes se encuentran en la etapa del pensamiento formal.
- Existe un predominio de alumnos provenientes de escuelas técnicas; la mayoría de los alumnos no trabajan; sus mayores dificultades surgen en los Análisis Matemático (en mayor proporción en los de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información) y los involucrados manifiestan como causal más importante la excesiva cantidad de asignaturas a cursar por cuatrimestre; sobre las horas dedicadas al estudio las respuestas han sido muy variables (desde dos hasta doce horas diarias); la bibliografía preferida es el material elaborado por la cátedra; la mayoría se inclina por un régimen de promoción por parciales.
- se aprecia falta de dominio del propio idioma; dificultad en la interpretación de consignas (ya sean estas orales o escritas); casi imposibilidad de redacción de un texto corto con principio, núcleo y fin; desconocimiento de las exigencias actuales del mercado laboral; para explicar el mundo natural continúan operando las estructuras mentales provenientes del conocimiento común, espontáneo o de la vida no utilizando los conocimientos aprendidos en las asignaturas correspondientes (Física, Biología, etc.).

Respecto a los docentes, se elaboró una encuesta destinada a ellos a fin de obtener información sobre los recursos humanos conque contaba el área Matemática.

Las conclusiones han sido que el perfil real del cuerpo docente se estimó de nivel moderado (fundamentalmente en lo que corresponde a las actualizaciones y cursos de postgrados o maestrías) lo que se consideró un llamado de atención que debía ser recepcionado con la debida preocupación por parte de las autoridades de la Facultad a fin de facilitar los caminos que condujeran al perfeccionamiento de los docentes. En la actualidad varios de ellos se encuentran cursando maestrías o doctorados. Asimismo, en los últimos años se han realizado numerosos talleres y seminarios tendientes a lograr un nivel de excelencia en el cuerpo docente.

En lo referente a las metodologías educativas se logró el apoyo de varios docentes para ensayar diversos modos de enseñanza previamente autorizadas por el Consejo Académico.

Así es como se realizaron cursos

- De Promoción Directa (un método de evaluación continua que exige, al alumno, una permanente dedicación al estudio) dirigido a alumnos recursantes.
- Según plan Keller (una atención personalizada en la cual el alumno elige el momento en que se va a realizar cada una de sus evaluaciones) en el que no se estableció límites de tiempo para el cursado y también destinado a alumnos recursantes.
- Semipresenciales que consistieron en establecer horarios semanales de consultas a las que los alumnos concurrían para salvar sus dudas. Con evaluaciones cada dos o tres semanas los alumnos podían alcanzar la promoción parcial y/o la regularidad de la asignatura.
- Cuatrimestral de Análisis Matemático I en una sola división de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información como experiencia piloto a fin de determinar la conveniencia o no de realizar la reforma curricular correspondiente (de anual transformarla en cuatrimestral del segundo semestre del primer nivel).
- Las conclusiones que se pueden verter, dadas en el orden en que fueron mencionadas las experiencias son:
- Posiblemente este fue el ensayo que tuvo mejor resultado pero se vio frustrada su continuidad ya que, en esa metodología, la relación alumno/docente debe ser muy baja y no se pudo contar con los recursos humanos suficientes para poder llevarlo a cabo.
- Los resultados han sido buenos porque permitió recuperar a muchos alumnos que habían tenido problemas en el aprendizaje pero presentó el inconveniente de haberse producido un desgranamiento muy grande a través del tiempo. En función de ello se está corrigiendo la extensión de los plazos de cursado.
- Esta modalidad se aplicó, primeramente, a recursantes cuya situación hubiera sido cualquiera (por no haber regularizado anteriormente, por renunciar a la regularidad o por haber llegado al límite de cuatro aplazos permitidos por el reglamento) y los resultados fueron, en general, muy pobres; solo respondieron favorablemente los alumnos de la última condición Por esta razón, al año siguiente se repitió la metodología solo para alumnos que hubieran llegado al límite de aplazos y los resultados obtenidos fueron mucho mejores.
- Los resultados de esta última experiencia recién se conocerán a principios del año 2001 ya que la misma ha sido establecida, por el Consejo Académico, por el término de dos años (1999 y 2000).

Observaciones sobre las Soluciones a una Tarea de Inecuaciones Lineales en dos Variables realizadas por Estudiantes de Secundaria

Stella Nora Gatica
nimberti@fices.unsl.edu.ar
Universidad Nacional de San Luis
Argentina

Nivel de Incidencia: Media
Temática: Álgebra

Resumen

A pesar que las inecuaciones juegan un papel importante en diferentes temas, como son, trigonometría, investigación de funciones, programación lineal, etc., su enseñanza tiene un lugar secundario en los cursos de Álgebra.

Esto da lugar a que los estudiantes tengan una idea muy limitada sobre el tema, lo cual repercute en materias posteriores (en la mayoría de los casos universitarios), pues en estas las inecuaciones que se utilizan requieren conversiones geométricas, algebraicas y de lenguaje natural, y de articular las diferentes representaciones en estos tres registros.

Existen investigaciones que muestran que los estudiantes tienen grandes dificultades al resolver tareas de encontrar representaciones geométricas en las soluciones de una inecuación (Duval, 1998; Acuña, 1998).

En el presente trabajo analizamos razonamientos realizados por un grupo de estudiantes de secundaria cuando realizan la conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico y gráfico.

Los estudiantes encuentran recursos para lograr establecer que la solución está formada por un conjunto infinito de puntos. Al parecer, depende de una buena elección de problemas, de lograr que el estudiante se haga cargo de ellos, del trabajo en equipo y de una intervención apropiada del profesor, lo que logra una mejor articulación de la inecuación y las zonas correspondientes y por tanto mejore la comprensión del estudiante sobre este tópico.

Introducción

Las inecuaciones lineales con dos variables es un tema que normalmente despierta poco interés en cuanto a su enseñanza, tanto de los profesores de la escuela secundaria como en la universidad. Sin embargo, su conocimiento es fundamental en problemas de aplicación como la programación lineal.

La importancia de este tema radica en que muchos fenómenos naturales, se pueden modelar con ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones, por consiguiente, la solución de estos problemas se reduce a la solución de ecuaciones, inecuaciones y sus sistemas.

En las indicaciones, de la nueva Ley Federal de Educación (ley 24.195) en la República Argentina, expresamente se puntualiza la necesidad de que el alumno o la alumna "adquieran esquemas de conocimiento que les permita ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano y acceder a sistemas de mayor grado de integración a través de los procesos de pensamientos específicos dirigidos a la resolución de problemas en los principales ámbitos y sectores de la realidad".

Estas indicaciones plantean el enfoque con que han de trabajarse los contenidos de matemática, en donde requiere que se destaque:

- La comprensión conceptual.
- El gusto por hacer matemática.
- La habilidad de plantear problemas y resolverlos con una variedad de estrategias, teniendo en cuenta que la matemática es una habilidad humana a la que todos pueden acceder de manera placentera.
- La significación y funcionalidad de la matemática a través de su conexión con el mundo real, entre sus diversas ramas y con las otras ciencias.

La potencia de la matemática para modelizar problemas de las otras disciplinas a partir de su estructuración lógica y de su lenguaje.

La síntesis explicativa del bloque: Lenguaje gráfico y algebraico, expresa: (...)"Los alumnos y alumnas en la EGB explotarán conceptos algebraicos, pero de manera informal. Esta explotación debe enfatizar el uso de modelos físicos, tablas de datos, gráficos, escritura de ecuaciones, fórmulas, etc. que tiendan a favorecer la comprensión de los conceptos de función, variable, cambio y dependencia (...) La resolución de diversos problemas requerirá del planteo de ecuaciones, inecuaciones o sistemas que en principio podrán ser resueltos con apoyo gráfico, para llegar en el Tercer Ciclo a un tratamiento algebraico más completo comprendiendo que las igualdades y desigualdades algebraicas pueden transformarse de manera válida por medio de reglas que el álgebra prescribe para producir expresiones más simples (equivalentes), pero que conservan su relación inicial".

A pesar de todas estas recomendaciones, la enseñanza de las inecuaciones lineales se reduce a establecer nociones acerca de este concepto y a su representación gráfica, pero en muchas ocasiones, debido a la extensión de los planes de estudio, al momento de reducir algunos temas, los profesores eligen comprimirlo. Peor, aún, hay casos en los que el tema prácticamente no se enseña.

Diversas investigaciones (Duval, 1998, Acuña, 1998, Tapia, 1998) dan cuenta de las dificultades de los alumnos para encontrar la zona correspondiente al conjunto solución de las inecuaciones. Sin embargo, estos trabajos, no abordan las dificultades de los alumnos al momento de introducirlos en el tema.

En el presente trabajo, se estudian cuales son los distintos registros de representación semiótica involucrados en este concepto, las dificultades de los alumnos frente a problemas, expresados en lenguaje natural, cuya solución requiere de la resolución de inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones lineales. Así mismo, planteamos una serie de problemas donde los conocimientos sobre este concepto aparecen como recursos convenientes para resolver las situaciones planteadas.

- Objetivos de la experiencia:
- Identificar las estrategias y dificultades de los alumnos en la iniciación del estudio de las inecuaciones lineales en dos variables mediante una experiencia de enseñanza basada en un enfoque constructivista.
- Estimular la habilidad de plantear problemas expresados en lenguaje natural y resolverlos con una variedad de estrategias.
- Analizar la comprensión de este conocimiento frente a una situación de enseñanza en cursos de noveno año de EGB (14-15 años).

Registros y Representaciones Semióticas

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción como son los objetos físicos y culturales. Para ello son necesarias las representaciones. Entender un concepto significa tener una imagen del concepto (Pluvinage,1998).

Las representaciones y los sistemas de representación se han convertido en elementos importantes en el estudio de la comprensión en matemáticas y se han consolidado herramienta útil a tal efecto. En la Didáctica de la Matemática, existe un reconocimiento internacional a la aplicación de la semiótica. La semiótica provee recursos conceptuales y vocabulario necesarios para la enseñanza y aprendizaje.(Hoyos, 1998)

Duval (1993), analiza y enfatiza la importancia de la "representación" en matemáticas. Establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Por ejemplo: una escritura, una notación, un símbolo, un punto, una gráfica, etc. representan un objeto matemático. Un registro está constituido por signos: símbolos, íconos, trazos, etc... Es decir, son medios de expresión y representación semiótica. Solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos.

Duval caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente. Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas:

1. La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado: enunciado de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula. Por ejemplo, en nuestro caso, $6x + 2y < 8$ representa una inecuación lineal con dos variables en el registro algebraico.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro. Por ejemplo, aplicando propiedades que se cumplen en las inecuaciones lineales, $6x + 2y < 8$ se puede transformar en $y < -3x + 4$ que representa la misma inecuación en el mismo registro.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida (el registro de la representación por convertir). Por ejemplo, expresar en el lenguaje natural el siguiente problema: "Si el duplo de un número más seis veces otro es menor que 8...", significa convertir en otro registro la inecuación planteada en el registro algebraico.

La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente de la de tratamiento.

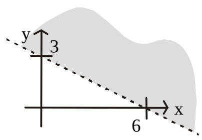
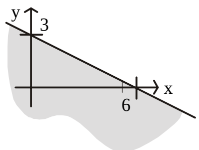
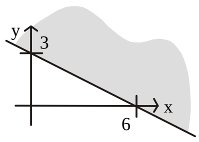
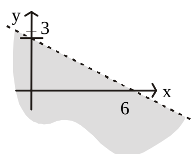
Considera asimismo, que la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva. La comprensión conceptual está íntimamente ligada a la posibilidad de movilización y de articulación entre diferentes registros de representación semiótica

En general, la enseñanza de las matemáticas se organiza como si la coordinación de los diferentes registros de representación introducidas o utilizadas se efectuara rápida y espontáneamente. Parece ser, que el objetivo principal en la enseñanza no es el cambio de registro a efectuar sino los tratamientos que podrían realizarse sobre la representación obtenida después del cambio. Cuando en realidad, en toda estrategia matemática, se debería combinar tratamientos y conversiones ya que constituyen dos puntos claves para el aprendizaje (Guzmán, R. 1998).

Dado que los problemas que se les presentan a los alumnos en materias posteriores, requiere de la conversión entre los registros: lenguaje natural, simbólico, gráfico y tabular para poder resolverlos, investigamos cuales son las conversiones entre los registros de representación que los estudiantes necesitan efectuar al momento de estudiar el tema, los que se encuentran expuestos en la tabla de la siguiente página:

Es decir, los alumnos, una vez que han estudiado el tema ecuaciones e inecuaciones con dos variables, deben ser capaces de:

- Reconocer que, el resultado de una ecuación del tipo ax + by + c = 0, gráficamente representa una recta en el plano.
- En el caso de inecuaciones del tipo ax + by + c < 0, ax + by + c > o, ax + by + c ≤ 0, ax + b ≥ 0, gráficamente representan semiplanos.
- Traducir al registro algebraico, los problemas expresados en lenguaje natural donde intervienen inecuaciones.

<table>
<tr><th rowspan="2">Registro lenguaje natural</th><th rowspan="2">Registro simbólico</th><th rowspan="2">Registro gráfico</th><th colspan="2">Registro tabular</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>La suma de un número mas la mitad de otro excede a tres</td><td>y+(1/2)x>3</td><td>Semiplano abierto
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y ></th></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y+(1/2)x>3</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1>3   F</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>11/2>3 V</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>La suma de un número más la mitad de otro es a lo sumo tres</td><td>y+(1/2)x ≤ 3</td><td>Semiplano
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y ≤</th></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y+(1/2)x ≤3</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1≤3   V</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>11/2≤3 F</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>La suma de un número más la mitad de otro es por lo menos tres</td><td>y+(1/2)x ≥ 3</td><td>Semiplano
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y ≥</th></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y+1/2x≥3</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1≥3   F</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>11/2≥3 V</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>La suma de un número más la mitad de otro no excede a tres</td><td>y+(1/2)x <3</td><td>Semiplano abierto
</td><td><table><tr><th>x</th><th>y <</th></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th><th>y+1/2x<3</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1<3   V</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>11/2<3 F</td></tr></table></td></tr>
</table>

ESTUDIOS PREVIOS

Con el objetivo de determinar las dificultades de los alumnos en el tema que nos ocupa, así como la modalidad de enseñanza instituida en los profesores, realizamos las siguientes exploraciones previas:

1. Diseño y entrevistas a profesores de la escuela secundaria con el propósito de detectar dificultades de comprensión verificadas en los alumnos y modo de enseñanza del tema.
2. Análisis de tres libros de texto de mayor circulación en nuestro país, ya que estos representan referencias importantes para los profesores, con el fin de establecer los distintos registros, prioritarios en los libros, en la enseñanza de las inecuaciones.

3. Observaciones de clases de profesores del 9º año (EGB) en el momento de introducir el tema.

Las conclusiones fueron:

1. El tiempo estipulado para el dictado del tema, prácticamente es mínimo. Inclusive manifestaron, en ocasiones, no dedicarle ninguna clase. No ocurre lo mismo con ecuaciones lineales con dos incógnitas donde tanto la ejercitación como el tiempo dedicado es extenso. Sobre la modalidad de enseñanza, manifestaron guiarse por las propuestas de los libros.
2. De la propuesta de los libros de textos, concluimos que las conversiones entre registros se reduce principalmente entre el registro algebraico y el registro gráfico. Es mínima la ejercitación del registro del lenguaje natural al algebraico.
3. Con el propósito de conocer las propuestas de enseñanza existentes, realizamos observaciones en clases introductorias al tema que nos ocupa. Los profesores al momento de introducir el tema, permanecen en la siguiente ruta lineal:
   a. Registro algebraico: El profesor propone: *Vamos a encontrar el conjunto solución de la inecuación:* $y < 2x + 1$.
   b. Registro numérico: El profesor reemplaza algunos puntos del plano en la inecuación propuesta, estableciendo con Verdadero o Falso, si cumple o no, con el signo de la desigualdad.
   c. Registro gráfico: El profesor sombrea la zona del plano donde están ubicados los puntos con resultado Verdadero, estableciendo que esa región es el conjunto solución buscado.

Es decir, los profesores muestran cómo encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal con dos variables, probando si cumple la desigualdad convenida con un punto del plano y extendiendo el conjunto solución a todo un semiplano.

De esta manera, los alumnos son capaces de resolver inecuaciones, a través de procedimientos y de reglas previamente establecidas, pero no relacionan este concepto con sus aplicaciones.

Notamos así, que el conocimiento desarrollado por los alumnos es principalmente de carácter procedimental; si bien esta tarea no es nada fácil ya que se existen grandes dificultades en los alumnos para alcanzar una comprensión satisfactoria en dicho campo. Esto da lugar a que los estudiantes tengan una idea muy limitada sobre el tema, lo cual repercute en materias posteriores (en la mayoría de los casos universitarias), pues en estas, las inecuaciones que se utilizan requieren conversiones geométricas, algebraicas y de lenguaje natural, y de articular las diferentes representaciones en estos tres registros.

Descripción de la Experiencia y Análisis

Para despertar en el alumno el interés sobre el aprendizaje de este tema y siguiendo el esquema histórico del desarrollo del concepto, realizamos una experiencia en el aula, sobre el enseñanza de las inecuaciones lineales con dos variables Presentamos primeramente, expresados en forma verbal, ejemplos sacados de situaciones de la vida real. En la primera fase, los problemas fueron confeccionados de manera tal, que primero podrían resolverlo aritméticamente sin necesidad de plantear inecuaciones, para luego en la segunda clase, enfrentarlos a nuevos problemas donde ya no podrían resolverlo de esta manera sino que por tratarse de un conjunto infinito de soluciones, deberían obligatoriamente plantear inecuaciones. De esta forma, se intenta que el estudiante comprenda la situación escogida, evadiendo la dificultad que soporta este concepto.

Esta actividad, se planificó y fue desarrollada en un curso de noveno año del EGB en tres clases de 80 minutos cada una.

El curso cuenta con 35 alumnos a los que se les pidió separarse en grupos, los que en total fueron 11, de tres o cuatro alumnos. Se les presentaron los siguientes problemas:

CLASE Nro 1:

1. Javier tiene billetes de \$5,00 y \$10,00. Si en total tiene menos de \$ 60,00, ¿Cuántos billetes de \$ 10,00 y \$ 5,00 puede tener?.

Este problema expresado en lenguaje natural se planteó de esta manera con el fin de que los alumnos realizaran la conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico. Sin embargo, por tratarse de un problema con un número finito de soluciones podían resolverlo aritméticamente expresando todas las soluciones posibles.

Cuando se enfrentaron a esta tarea la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultades en encontrar soluciones. Aunque hubo dos grupos que intentaron expresar el problema planteando una inecuación lineal en una variable, en lugar de dos, posiblemente como herencia del tema ya aprendido por ellos: inecuaciones en una variable. Tuvimos que aclarar el error. Luego, reemplazaban valores y verificaban la desigualdad.

2. Javier necesita saber todos los resultados posibles a su problema. En esta parte, tu tarea consiste en encontrar tantas soluciones como puedas, intentando hallar una regla o expresión para la cual se cumplan todas estas soluciones. Para ello: organiza los datos de alguna forma que muestre las combinaciones de \$ 5,00 y \$ 10,00 que satisfagan el problema de Javier. Puedes realizar cualquier gráfica u otra forma que exprese los resultados: tablas, diagramas, sistemas de ejes cartesianos, explicación verbal o cualquier otra que se te ocurra.

Nuestro interés en esta actividad fue determinar cuales eran los registros en que los alumnos intentarían resolver el problema.

De los once grupos, siete acudieron al registro tabular, tres se remitieron al registro gráfico. Hubo un grupo que utilizó un diagrama de árbol para determinar las soluciones del problema.

Como el conjunto solución es finito, en general, nombraron todas las combinaciones posibles, se resistían a escribir una regla o expresión para la cual se cumplan todas las soluciones.

Finalmente, con el fin de que representaran gráficamente el conjunto solución, se les propuso la siguiente actividad:

3. En el siguiente sistema de ejes cartesianos, llamando x al número de billetes de \$ 10,00 e y al número de billetes de \$ 5,00, marca con un color rojo los puntos que son soluciones al problema de Javier y con un color azul los que no lo son.

Los alumnos no tuvieron dificultades en marcar los puntos con los colores propuestos. Sin embargo, en cuatro grupos, a pesar de comprender la consigna y resolverla correctamente, no interpretaban, por ejemplo, que el punto P(2,3), en el gráfico representaba 2 billetes de 10,00 \$ y 3 billetes de \$ 5,00. Al preguntarles sobre ello, respondían que dicho punto significaba: \$ 35,00.

4. ¿El punto P (2,3) de que color lo marcarías? ¿ y el punto Q (-1,4)? Explica claramente en cada caso porqué escogiste el color azul o rojo.

El objetivo de esta actividad, fue redactada con el fin de que reflexionaran sobre el hecho de que el punto Q (-1,4) no se encontraba en el conjunto solución por tratarse de un número negativo, aunque de todas maneras verificaba la desigualdad. A pesar de que esos valores no los habían marcado de color rojo (que era el color elegido por los puntos que se encontraban en la solución) solo hubo tres grupos que respondieron correctamente. Realizaban la cuenta, y al comprobar que el resultado es un número menor que 60, interpretaban que debía estar en el conjunto solución.

A medida que se avanzaba en el problema, perdían el enunciado original, o sea se alejaban de la interpretación del problema

> *5. Explica como está formado el conjunto de los puntos que son soluciones al problema de Javier. Debes expresarlo lo más claramente posible de manera tal que puedan comprenderlo tus compañeros.*

En esta parte de la actividad, se les solicitó que realizaran un afiche con las respuestas obtenidas en cada grupo.

De las respuestas de los estudiantes ocho grupos se remitieron al registro numérico, nombrando todos los valores que se encontraban en el conjunto solución. Dos al registro gráfico. Hubo un grupo que, habiendo dado la respuesta en el registro gráfico, intentó encontrar el área del triángulo formado por los puntos que son soluciones a la inecuación. Ante la pregunta: ¿Para que te sirve encontrar el área? No supieron que responder. Solo un grupo, realizó un diagrama con las respuestas.

Parece como si, al tratar de resolver matemáticamente el problema, se hubieran olvidado de lo que originalmente se les pedía encontrar.

<u>CLASE Nro.2:</u>

El objetivo de esta clase fue introducir a los alumnos a la enseñanza de inecuaciones lineales con dos variables. En este caso, los problemas no podrán ser resueltos como la clase anterior (aritméticamente). Su solución requería del uso del álgebra.

> *1. Javier ha sido convocado por su padre, a efectos de controlar las distintas plagas que invaden y dañan el jardín de su casa. Con sorpresa, ha observado en su primer día de trabajo, la existencia de "pulgones". En forma urgente ha consultado a un especialista quien le recomendó un preparado químico con dos compuestos A y B. Cada gramo del compuesto A contiene 30 unidades químicas de control mientras que el B solo 15 unidades químicas. Conforme a la extensión de su jardín, deberá disponer de un máximo de 600 unidades químicas, caso contrario, su aplicación puede ser nocivo para el jardín y otras especies que habitan en él. ¿Cuáles son las alternativas de combinación de estos compuestos que tiene Javier respetando el máximo aconsejado?.*

Como en el problema de la clase anterior, por tratarse del conjunto solución, un conjunto finito de puntos, los alumnos podían resolverlo aritméticamente. En esta clase, se planteó este problema donde el conjunto solución era un número infinito de puntos. En este caso, necesariamente, debían resolverlo algebraicamente

Al principio intentaron resolverlo como el problema de la clase anterior, debimos aclarar en todos los grupos que no se trataba del mismo caso, sino que ahora era un problema con infinitas soluciones.

Los alumnos no tuvieron dificultades en encontrar la inecuación, aunque ningún grupo planteó las restricciones de no negatividad.

2. El experto le ha manifestado además, a Javier, que las 600 unidades deben lograrse con la condición de que las obtenidas del compuesto A no supere el doble de las obtenidas en el B. Tu tarea consiste en plantear un sistema de inecuaciones que describan las condiciones estipuladas por el especialista.

El propósito de esta actividad fue que encontrara un sistema de inecuaciones que representase las restricciones del problema. La primera de ellas refería a la actividad anterior a la que deberían anexar una nueva restricción.

Todos los grupos tuvieron dificultades en llegar a la respuesta correcta. Fue necesaria la intervención de los profesores aclarando dudas sobre el enunciado. Notamos la importancia de realizar una mayor ejercitación con problemas de conversión entre el registro del lenguaje natural y el registro algebraico.

3. Representa gráficamente las soluciones a las restricciones planteadas e indica algunas de las combinaciones posibles de los productos A y B.

Los alumnos trabajaron representando las restricciones planteadas. Hubo dos grupos que graficaron como lo habían realizado la clase anterior, como si la solución se tratara de un conjunto finito de puntos. La mayor dificultad, en todos los grupos, se evidenció al momento de representar gráficamente, las rectas involucradas.

CLASE Nro. 3:

Con la siguiente actividad, se pretende que los alumnos sean capaces de expresarse, aún más, explicar delante de sus compañeros, problemas de la vida real y saber resolverlos aplicando inecuaciones.

Esta actividad está dirigida al afianzamiento de las ideas aprendidas anteriormente.

En esta clase, se propone como tarea para la clase siguiente, la actividad que se detalla:

Cada grupo debe inventar un problema expresado en lenguaje natural (con palabras). Este problema debe ser tal que incluya:
▪ *Dos variables*
▪ *Tres o más restricciones lineales.*
▪ *Una vez que hayan escrito el problema, deben resolverlo.*
▪ *Después, preparen una presentación interesante, con carteles, de 5 a 10 minutos, en la cual el coordinador del grupo deberá:*
▪ *Explicar el problema.*
▪ *Proporcionar el conjunto solución*

A la clase siguiente todos los grupos manifestaron entusiasmo por exponer sus carteles.

Los problemas propuestos por los estudiantes, en general, se referían a casos en donde las soluciones correspondía a un conjunto finito de puntos (como el problema propuesto en la primera clase), posiblemente por ser de fácil resolución. Nuestra mayor preocupación fue que copiaran problemas de los libros de textos. Por la redacción de los enunciados y por los temas elegidos, claramente evidenciaron ser problemas inventados por los grupos.

Conclusiones

Del análisis de las respuestas de los alumnos, se evidencia una tendencia a resolver el problema recurriendo al lenguaje tabular o al registro numérico, intentando determinar todas las soluciones posibles. Recurren en una menor proporción al registro gráfico.

Existe una resistencia por parte de los alumnos, de encontrar reglas generales que verifiquen la situación planteada.

Por otro lado, a medida que resuelven matemáticamente el problema, comienzan a olvidarse del enunciado original. Asimismo, reflejan tener dificultades para interpretar los resultados obtenidos.

En cuanto a los enunciados de los problemas, evidencian tener inconvenientes en la interpretación de los mismos.

Aunque encontrar una expresión verbal que caracterice una situación cualquiera es una tarea laboriosa y difícil, es conveniente proponer actividades donde sean los alumnos los encargados de plantear situaciones de la vida real expresados en lenguaje natural.

Del entusiasmo manifestado por los estudiantes en la última clase, se evidencia que los alumnos muchas veces, necesitan encontrarse con actividades que les relacione lo aprendido en matemáticas con problemas de la vida real. Además el hecho de que ellos deban inventar y exponer un problema expresado en el registro del lenguaje natural, los ayuda a aprender a expresarse delante de sus compañeros y el profesor.

Tal como lo expresa Guzman R, (1998): " el lenguaje natural tendría que tener una mayor presencia en las clases de matemáticas, tanto de parte del profesor como de los alumnos", luego agrega: "Plantear estos problemas es una tarea creativa para los profesores, pues este tipo de problemas, hasta ahora , son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemáticas."

La pregunta es: ¿cómo crear situaciones en las que se manifieste la participación activa de los estudiantes?

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (1998). *La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 203-223.

Duval, R. (1993). *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros.* Antología en Educación Matemática. Ed. Cambray, R. Sánchez, E. y Zubieta, G. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. México. Pg. 125-139.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 173-201.

Guzmán R. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México. Pg. 5-21

Hoyos (1998). *Revisando la construcción de significado en torno de las ecuaciones lineales con dos incógnitas: Observaciones empíricas don estudiantes de 16-18 años.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 343-362.

Pluvinage (1998). *Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 1-15.

Tapia, X. (1998). *Pasaje de Registros: Inecuaciones.* Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias. Valparaíso. Chile.

Visualizando Cubos, Conos y Cilindros

Cecilia Crespo Crespo, crespo@sinectis.com.ar
Christiane Ponteville
Fausto Toranzos
José Villella, jvillella@ sinectis.com.ar
Universidad Nacional de General San Martín, Buenos Aires
Argentina

Nivel medio
Geometría

Introducción

En distintas propuestas de enseñanza aparecen conceptos geométricos como parte de la matemática que debe ser aprendida por los alumnos. Sin embargo, en general no se dan lineamientos claros de abordaje en el aula.

En este trabajo, surgido de investigaciones realizadas en el área de la enseñanza de la geometría, proponemos analizar el proceso de visualización llevado a cabo por alumnos de escuela media a partir de cuerpos geométricos conocidos, como por ejemplo el cubo, el cono y el cilindro. A tal efecto debemos tener presente que esos contenidos forman parte del cuerpo teórico de una disciplina deductiva y por lo tanto pueden ser trabajados desde la experiencia, la intuición o el razonamiento.

En el discurso didáctico actual se ha instalado fuertemente la idea de una filosofía constructivista de la matemática (Ministerio de Cultura y Educación, 1997), es decir, de la consideración de la matemática como una ciencia que representa conceptos en las formas de espacio y de tiempo que todos los sujetos cognoscentes poseen a priori para percibir el mundo. Así, el espacio da origen a la geometría y el tiempo, con su sucesión de instantes, al número y la aritmética. Pero, como la matemática es también una ciencia que genera conceptos nuevos, el marco espacio temporal de construcción de conceptos no está claramente definido. Podemos plantearnos la enseñanza de conceptos dentro del espacio euclídeo o de las geometrías no euclidianas. Además se pueden tener en cuenta los conceptos a partir de su inclusión dentro de un espacio topológico, métrico, afín...

Estas consideraciones acerca de la postura idealista trascendental y del intuicionismo impregnan muchas de las propuestas de trabajo diseñadas para que el alumno aprenda matemática, y en especial las pocas que corresponden al bloque Geometría de los Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica (alumnos de 6 a 12 años) y Educación Polimodal (alumnos de 13 a 17 años) de Argentina.

Dentro de este marco, la intención de este trabajo es acercar al debate detalles referidos a la ingeniería de situaciones de aprendizaje de algunas nociones geométricas en el nivel polimodal basados en la definición de **visualización** aportada en 1991 por Zimmermann y Cunningham El proceso de visualización entendido *"como proceso de formación de imágenes que pueden ser mentales o materiales y la utilización efectiva de dichas imágenes para la comprensión y descubrimiento de contenidos matemáticos"* se concreta en dos direcciones: la interpretación y comprensión de modelos bidimensionales y tridimensionales y por otro la habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica.

De esta manera, el alumno se acerca al concepto geométrico en cuestión partiendo de elementos concretos, como dijo Puig Adam: *"lo concreto empieza por ser el mundo observable, lo que impresiona directamente los sentidos y al mismo tiempo lo que invita a actuar*" y el docente asume su rol de profesional de la educación que dirige su intencionalidad, en el caso que nos convoca, al servicio de los aprendizajes de los alumnos en geometría.

El aprendizaje de la Geometría

Este proceso de visualización puede ser analizado teniendo en cuenta distintos puntos de vista para enfocar el aprendizaje de la geometría: la experiencia, la intuición y el razonamiento.

El abordaje de los contenidos desde la experiencia

Cuando los saberes que compartimos en el aula provienen de la práctica, de la acción, de los sentidos, cuando los obtenemos como casos particulares de alguna relación, o por comparación con un modelo estamos trabajando desde la experiencia, en la que se combinan los conocimientos previos con los que se adquieren a través de la experimentación. Trabajar con un modelo supone simular una situación matemática a través del uso de algún dispositivo más o menos conocido (por ejemplo, la construcción de patrones para la construcción de poliedros regulares convexos) y actuar sobre él para buscar regularidades, propiedades, características que luego se trasladarán a la situación inicial que les dio origen. De esa forma un modelo puede ser definido como una esquematización construida con una multiplicidad de datos de la realidad o de la experiencia que proporcionan una abstracción satisfactoria de cómo funcionan las cosas.

El modelo ofrece al usuario, por lo común quien está frente a una situación problemática a resolver, un sustituto del original que por sus cualidades está mejor adaptado al nivel de razonamiento que este usuario tiene respecto del contenido en cuestión. La utilización de modelos en la resolución de situaciones matemáticas conlleva la invalorable aceptación de la heurística como procedimiento estratégico para hallar la solución buscada. Cuando esto sucede, el problema se traduce en términos específicos de un modelo y a través de éste se encuentra la solución usando sólo sus propias reglas y elementos. A tal efecto es conveniente que el modelo codifique los datos del original (propiedades y relaciones) en sus propios términos. De esta manera el problema se resuelve en términos del modelo y se reinterpretan las soluciones halladas en términos del original que les dio nacimiento.

El abordaje de los contenidos desde la intuición

El abordaje de contenidos geométricos desde la intuición debe tener en cuenta el planteo de situaciones problemáticas que coloquen a los alumnos frente a situaciones que les exijan intuir los posibles resultados a distintas situaciones posibles.
El pensamiento matemático se basa fuertemente en la intuición. El desarrollo de cualquier teoría matemática encuentra sus hipótesis en los posibles resultados que el científico vislumbra que pueden ser ciertas. Estas ideas surgen de sus experiencias anteriores y la visión que él tiene de los objetos mentales que manipula, a través del uso de las imágenes para la visualización.

En la enseñanza de la geometría esta visión se vuelve fundamental. Luego de una etapa en la cual el alumno pueda trabajar los contenidos desde la experiencia es necesario enfrentarlo a situaciones en las cuales tenga que responder a su sentido de la intuición. Dijo Aristóteles "... *las líneas sensibles no son las líneas del geómetra, porque los sentidos no nos dan ninguna línea recta, ninguna curva, que satisfaga la definición, el círculo no encuentra a la tangente en un solo punto, sino en muchos como observaba Protágoras en sus ataques contra los geómetras..."*

El abordaje de los contenidos desde el razonamiento

La enseñanza de la geometría se mueve de un extremo al otro de dos concepciones: desde afirmar que la geometría se aprende a partir del enfoque axiomático hasta enfatizar en que es fundamental el conocimiento experimental o intuitivo dejando de lado el puramente formal para los especialistas.

Las nuevas tendencias en educación matemática propugnan que los estudiantes deberían ser puestos en situaciones de aprendizaje que les permitan hacer, examinar, predecir, comprobar, generalizar. Ver qué es lo que sucede en una situación debe complementarse con la formulación adecuada de preguntas sobre lo que ocurriría bajo ciertas condiciones. Se debería trabajar primero una geometría tri y bidimensional basada en: describir, modelar, dibujar, investigar y predecir el resultado de combinar, subdividir y transformar figuras, desarrollar la percepción espacial, relacionar ideas geométricas con ideas numéricas y de medida para pasar luego a una geometría que agregue la unidimensionalidad, visualizar y representar figuras geométricas con especial atención al desarrollo del sentido espacial, explorar transformaciones, resolver y representar problemas mediante modelos geométricos, entender y aplicar propiedades y relaciones geométricas. A partir de aquí la necesidad de utilizar el método deductivo resulta natural y su inclusión en el aula de clase se convierte en una culminación para las ideas que fueron experimentadas, trabajadas desde la intuición y la experiencia.

Hacia una propuesta didáctica

Sin duda la propuesta didáctica que el docente deberá planificar en forma de situaciones de enseñanza (Brousseau) para que el alumno pueda acceder a los conocimientos geométricos deberá tener como base fundamental, de acuerdo a las ideas antes mencionadas, la resolución de problemas. En este caso deberemos hacer la diferencia entre elegir dar el concepto primero y usar el problema como control del aprendizaje de los alumnos o plantear el problema como medio para que el alumno llegue a comprender significativamente el concepto en cuestión. (Charnay, Ausubel).

Cualquiera sea nuestra elección no puede obviarse que hay algo específico en la resolución de problemas que el docente debe guiar: la técnica, la forma de abordaje de la situación, los procesos de validación de las estrategias, las formas de comunicación de los resultados,... así como tener presente que la resolución de problemas puede convertirse en la forma de aprender, en el método a seguir para que el alumno aprenda.

Desde esta concepción el proceso de visualización es el referente teórico que nos permite el diseño de situaciones eficaces en la práctica del aula.

La percepción visual es un tema de la educación geométrica que forma parte del curriculum escolar. Se busca que el alumno aprenda a ver y a interpretar. El programa Frostig propone trabajar actividades que apelen a siete categorías referidas a la visualización: coordinación viso motora, percepción del fondo y de las formas, constancia en la percepción, posición en el espacio, relaciones espaciales, discriminación visual, memoria visual.

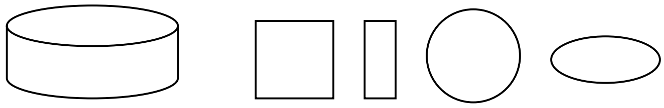
La visualización consiste en poder internalizar el sentido de una situación, memorizando imágenes parciales de un objeto observado a fin de poder reconocer objetos iguales o semejantes por cambio de posición o escala entre una diversidad de ellos, teniendo el mismo croquis. Después de haber visualizado un objeto, su estructuración consiste en poder reconocerlo y reconstruirlo a partir de sus elementos básicos constituyentes.

La construcción del espacio puede ser entendida como un proceso cognitivo de interacciones desde un espacio intuitivo o sensoriomotor que se manifiesta a través de la posibilidad de actuar, accionar en el espacio manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos... a un espacio conceptual relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas mediante sistemas de referencia, predicciones y manipulaciones mentales (Piaget). Esta construcción sigue un proceso tendiente a la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento, por lo que el significado del verbo enseñar, en esta concepción didáctica, adquiere una dimensión distinta: se refiere a la enseñanza de nuevas formas de razonamiento, provenientes de unas estructuras mentales nuevas, más complejas que las anteriores, que no pueden ser construidas más que por el propio alumno a partir de su experiencia.

Presentamos a continuación algunas actividades que ejemplifican el proceso de visualización ya definido anteriormente, permitiendo llevarlo a la práctica en el aula. Cada una de ellas puede ser simplificada, generalizada, enunciada de forma que se adapte a los distintos niveles en los cuales se quiera aplicar. Los alumnos, mediante el abordaje de este tipo de actividades, son capaces de resolver situaciones problemáticas en las que se trabajan conceptos geométricos poniendo en práctica el proceso de visualización.

1.

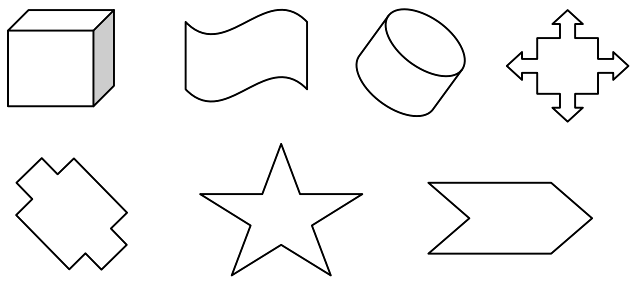
   a. *Traza una línea sobre la figura de la izquierda para indicar por dónde habría que cortar para conseguir cada uno de los cortes representados a la derecha.*



   b. *Justifica por qué puede haber más de una solución correcta, o bien por que puede no existir ninguna respuesta correcta.*
   c. *¿Si queremos obtener en el corte un cuadrado deberá el cilindro cumplir alguna condición especial? Justifica tu respuesta.*
   d. *¿Es posible obtener representaciones de otras figuras geométricas? ¿Por qué?*
   e. *Si se trata ahora de un cubo ¿qué respuestas dadas anteriormente se modifican?*

2.

   a. *¿Por dónde debe dividirse cada una de estas figuras para obtener dos partes iguales? Justifica tu respuesta:*



   b. *En cada uno de los casos anteriores explique que tipo de división realizó según el tipo de objeto.*
   c. *Da ejemplos de figuras y cuerpos que admitan una sola división, y infinitas divisiones o ninguna. Justifica tu respuesta.*

3.

   a. *Construye un cubo, un cilindro y un cono que estén contenidos uno en el otro en ese orden.*
   b. *Dibuja una representación gráfica para la construcción del punto a*
   c. *¿Qué condiciones deben cumplir los cuerpos construidos? Explica en función de los parámetros que los definen.*

4.

Una abeja está encerrada en una caja cúbica de cristal de 1 m de arista. Se ha posado en un vértice de la cala. En el vértice opuesto, hay una gota de miel.

a. ¿Cuál es la distancia mínima que debe volar la abeja para llegar hasta la gota de miel?

b. Si la abeja ahora no puede volar y debe trasladarse caminando por las paredes de la caja, ¿qué distancia mínima recorre para llegar a la gota de miel?

5.

Una vaquita de San Antonio se ha posado en la pared exterior de un vaso cilíndrico de 20 cm de altura y 10 cm de diámetro, a 3 cm del borde superior del recipiente. Otra se encuentra en el punto diametralmente opuesto, en el interior del vaso.

a. ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la primera para llegar hasta la otra?

b. ¿Le conviene volar o no?

c. ¿Cambian las respuestas anteriores si ambas se pueden desplazar?

6.

En dos puntos diametralmente opuestos y a la misma altura sobre la superficie exterior de un cucurucho se encuentran dos hormiguitas. El cucurucho tiene forma de cono y su generatriz es igual al diámetro de su base. Encuentre la mínima distancia que deben recorrer las hormiguitas para encontrarse.

A modo de reflexión final

Las ideas planteadas anteriormente, trabajadas con alumnos de escuela media y en cursos de capacitación docente, permiten considerar a la geometría desde un ángulo distinto al tradicional sin quitarle su importancia deductiva ni su utilidad práctica.
Para que los alumnos no crean que el cubo resulta ser un cuerpo de forma cuadrada y el bonete un triángulo de base circular, será necesario que los docentes comencemos a transitar por el camino de lo que podríamos llamar una gran aventura didáctica a la que puede definirse a la manera de Sartre: ... *"creo que la aventura puede definirse así: un acontecimiento que se sale de lo ordinario sin ser forzosamente extraordinario "*

Si de aventuras se trata, seamos intrépidos y tomando coraje propongamos problemas interesantes, significativos, desde la geometría para la construcción de los conocimientos que propone la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

ABBOTT, P. (1991). Geometría. Ediciones Pirámide. Madrid.

ABRAIRA FERNANDEZ, C. y cols. (1995). *Reflexiones sobre la formación de matemática de los futuros maestros.* En Revista Interuniversitaria de formación del profesorado, 24 (pp 143-160). Universidad de León, León.

ARTIGUE, M. - DOUADY, R. y otros (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática.* Grupo editorial Iberoamérica, México.

BARRANTES LOPEZ, M. (1998) *La Geometría y la formación del profesorado.* Uex, Cáceres.

BROUSSEAU, G. (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques.*- en Recherches en Didactique des Mathemátiques, 2, (3), (pp.301-346)

CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. - PIZZO, A. - VILLELLA; J. (2000) *¿la matemática en problemas? Una propuesta para el abordaje de la geometría y el azar en el aula.* PROCIENCIA. Buenos Aires, (en imprenta).

CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. - VILLELLA; J. (1999) *Las ideas geométricas: eje de una propuesta de formación docente continua.* XIII Reunión Latinoamericana de Matemática - Santo Domingo, República Dominicana.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN. (1997) *Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal.* Buenos Aires.

VAN HIELE, P. (1986) *Structure and insigth. A theory of mathematics.* Academic Press, New York.

VILLELLA; J. - CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. (1998) *Cuando la geometría es el tema de reflexión en la educación matemática.* UNSAM, Buenos Aires.

VILLELLA; J. - CRESPO CRESPO, C. - PONTEVILLE, Ch. (1999) $\pi R^2 h$: *¿Interpretarlo es trabajar geométricamente?* En Educación en Ciencias. Vol. 3, no 8 (pp. 17-29). UNSAM, Buenos Aires.

ZIMMERMAN, N y cols. (1991) *Visualization in teaching and learning mathematics,* Mathematics Association of America.- Nueva York.

Los Estudiantes en el Programa Socioepistemológico. Actores sociales en, desde y sobre la cultura

Leonora Díaz Moreno
leonorad@netup.cl
Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile

Nivel Superior
Temática de cálculo

El Programa Socioepistemológico

Son los escenarios socioculturales los que dan vida y en los que vive un determinado saber matemático para la perspectiva socioepistemológica, siendo su interés explicar e intervenir para promover la enseñanza y el aprendizaje de cálculo y análisis, a partir de esta nueva dimensión. Explicar por ejemplo por qué determinado intento de elaboración en matemática avanzada fue considerado válido. Es insuficiente considerar a la historia de la matemática como la que existe para explicar la matemática de hoy, en especial aquella que hoy constituye la matemática profesional. Por su parte, la matemática superior no es sólo matemática superior, se constituye sobre la base de prácticas: por ejemplo las obras de Euler y Cauchy que exhiben razonamientos físicos a la vez que las expresiones matemáticas más divulgadas.

Esta escuela socioepistemológica se ha planteado formas de trabajo que le permitieron arribar a resultados obtenidos más tarde por otras escuelas. A la pregunta de cuáles son los temas que se trabajan en Cálculo y Análisis, su respuesta es que estudian procesos de Acumulación, Predicción, Estabilidad y Promediación, considerando entonces a los procesos **límite** e **infinito** como estrategias, como medios de esos procesos, a diferencia de una visión presentista que los considere como fines (esto es, objetos matemáticos a ser estudiados como significados en sí mismos).

A propósito de las ideas del análisis en torno de la integración por ejemplo, en esta metodología se revisó: La teoría; La escuela; Los originales; Personajes que los historiadores consignaron como claves: Rieman, Fourier, Lebesgue; La cultura de la época en que surgieron esas ideas; La historia de lo cotidiano; y, Los libros de texto, como un modo de adentrarse en la didáctica de antaño. Este ejemplo ilustra el itinerario de la década 1990 – 1999 en orden a responder al desafío de generar una metodología propia para hacer investigación en didáctica.

Se va conformando en torno a estas elaboraciones un espacio autónomo cuya labor se ha centrado en ir precisando constataciones y elaboraciones para comprender la evolución y desarrollo del Cálculo y el Análisis que ha venido destilando la humanidad. Entre estas se encuentra el hecho de que la ciencia de los siglos 19 y 20 se halla asentada sobre el carácter estable del cambio y la predictibilidad.

En esta perspectiva de indagación se busca tipificar teoremas de cálculo y análisis presentes al seno de una cultura, entendidos éstos como expresión de una acto avanzado de predicción, la manera más depurada de expresión de la concepción o red de concepciones de esa cultura. Se pondrá atención a la componente social de un conocimiento que vivirá en el ambiente cultural del aula. La naturaleza del cálculo y el análisis a ser enseñados se establecerán sobre la base de la sicología educativa y cinco principios generales, a saber, de predicción, de acumulación, de estabilidad, de promediación, y, mecanismos funcionales que se usan para su desarrollo.

En esta construcción teórica se asume que:

- La matemática escolar tiene vida propia. Una concepción de transposición debe considerar una figura participativa que contemple a la comunidad en cuyo seno vive, entre otros que considere a profesores, estudiantes, matemáticos educativos, sicólogos educativos, las prácticas sociales de referencia y la cultura.
- ¡Al enseñar matemática se la reinventa!
- El conocimiento matemático escolar es distinto al conocimiento matemático
- La legitimidad de la construcción de un saber a partir de otros. Integran entonces su cuerpo de saberes:
  - Ingeniería Didáctica
    - Didáctica
      - En particular secuencias didácticas contemplarán las fases de
        - Acción
        - Formulación
        - Validación
        - Institucionalización
    - Epistemología
    - Cognición
      - De modo particular la abstracción reflexiva considera las etapas de
        - Acción
        - Proceso
        - Objeto
        - Esquema
  - Visión Sistémica
    - Alumno, maestro y saber en el medio
    - Didáctica de antaño
    - Epistemología y prácticas sociales de referencia
    - Modos culturales de transmisión
    - Contexto sociocultural
    - Cognición social

En Cantoral (1999) el autor muestra ejemplos de la metodología de análisis de este acercamiento teórico, centrados en el caso del pensamiento y el lenguaje variacional. Indaga en formas en las que se forja el consenso al seno de la institución escolar entorno de los objetos de saber matemático institucionalizado, como el diferencial, la integral y la derivada. Expresa "*Desde nuestro punto de vista, la vida del saber en la escuela se ve determinada por la estructura y articulación del discurso matemático escolar, de modo que muchos de los principales conflictos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática avanzada encuentran ahí su razón de ser."*

A modo de ejemplo, en el análisis de cómo es que los estudiantes procesan la información que se les presenta en una situación variacional dada y de las dificultades que plantean los procedimientos que utilizan, para el caso de cómo interpretan la información de la segunda y tercera derivada respecto de su definición dada, han encontrado que el concepto de derivada surge hasta que se domine el concepto de derivada sucesiva, por lo que se está ahora diseñando situaciones didácticas que usen este hallazgo en diversos contextos. En otro caso constatan que opera un cierto principio de continuidad en sus explicaciones. En efecto señalan: "*un segundo estudio exploratorio encontramos un teorema factual que nos parece de interés, brevemente, consiste en suponer, por parte de los estudiantes de bachillerato que: si f'(a) es positiva, entonces la segunda y tercera derivadas serán también positivas*..."

¿Qué releva una perspectiva socioepistemológica con foco en los estudiantes?

Respecto de este actor y para dar cuenta de cómo es que aprende se han considerado perspectivas cognitivas. La discusión actual se plantea con la emergencia en ese escenario de las perspectivas constructivistas. Sin embargo el marco sigue siendo de naturaleza psicológica. ¿Qué puede aportar para la comprensión y la intervención educativa una mirada socioepistemológica del actor estudiante? Se presentan a continuación ilustraciones que van más allá y más acá de los marcos tradicionales: la construcción de la realidad que hacen los sujetos en sus distintas facetas, esto es, el enfoque socioepistemológico en el nivel de lo micro-subjetivo. Las representaciones de los estudiantes son una ilustración de este nivel. Así como el enfoque socioepistemológico en el nivel de lo micro-objetivo, ocupándose de la epistemología de la práctica de los sujetos. Una ilustración de este nivel son los esquemas de acción de los estudiantes.

Estudiantes: Actores sociales en, desde y sobre la cultura

Los estudiantes que se integran a procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo inicial constituyen un segmento etario de jóvenes (bordeando los 18 años de edad) que son considerados adultos por la mayoría de nuestras sociedades, en las que por ende emergen como actores sociales. Lo ilustran por ejemplo, los hechos que están teniendo lugar en los campus de la mayor de las universidades de Latinoamérica, la Universidad Nacional Autónoma de México.

No se condicen con los aprendices de los primeros ciclos de escolaridad, exhibiendo sus propios esquemas de acción para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo inicial (Díaz, 1999). Su estilo será mayoritariamente estratégico: los estudiantes despliegan un esfuerzo cuyo objetivo fundamental es la aprobación de la asignatura. Para lograr esa aprobación, ellos desarrollan acciones que involucran recursos materiales y que están a disposición o que deben alcanzar. En su búsqueda se encontrarán con oponentes y ayudantes. Al tiempo que habrá fuerzas que los motivan y otras que los desalientan en su accionar y que responderán a esas motivaciones profundas que dicen relación a sus proyectos existenciales.

En otro orden de reflexión, las aulas de cálculo inicial son masivas. Un docente se dirige más bien al grupo curso que a la persona de un alumno en particular. A su vez, los estudiantes viven el tránsito nada tranquilo de la adolescencia a la adultez. En Díaz (op. cit.) se informa como su imaginario contendría normas socioculturales preestablecidas que ellos asumen o reconocen como dadas, expresión de una heteronomía no necesariamente negativa, puesto que, en ciertos campos y dosis, son necesarias para la constitución de sujetos sociales.

Explicitarían también sentimientos que les despiertan al desafío y las ganas de experimentar con sus lindes, propia de esta etapa de vida. Hay los que conciben una autogestión de los límites normativos. Ello pudiese indicar autorregulación y autonomía necesarias a la maduración de los sujetos. En una situación extrema, hay el que expresa una noción que puede significar conductas personales y sociales de anarquía global: ni él se pone lindes ni la sociedad se los plantea. Puede ser expresión de sentimientos de rebelión, presentes en esta etapa etaria.

Por otro lado, llama la atención que sólo el cuatro por ciento de ellos consignen apreciaciones positivas para el uso de la noción cotidiana de límite; una mayoría, en cambio, asocia a esta locución depreciaciones directas o indirectas. Podría hipotetizarse que se trata de un rodeo a situaciones de sesgos negativos desde una perspectiva juvenil que los asocia con restricciones o limitaciones impuestas, dado que esta es una época de despliegue, de descubrimiento, de exploración y de puesta a prueba de las propias potencialidades. Lo anterior se vería reforzado con un estilo de vida que propicia vivir al máximo de las posibilidades.

En otro plano, pudiese significar biografías personales en las que se ha experimentado limitaciones exógenas de connotación negativa. Las restricciones aparecen desde el medio y aparecen más bien asociadas a limitaciones en la libertad individual. En esta óptica, un límite equivaldría a una carencia de libertad: a más libertad, menos límites; y recíprocamente.

De este modo, se reconoce a través de las acepciones y marcas valorativas de las mismas un ideario juvenil propio: ideaciones y sentimientos entretejidos para moldear sus conductas. Sentimientos que pueden apasionarlos o dejarlos en la indiferencia. Afectividades asociadas que pueden abrirle miradas o cerrárselas al transferirlas a nociones matemáticas que se propone que se construyan en un aula de calculo inicial, como es el caso del LÍMITE.

La pregunta por los modos de entender el mundo propios de los estudiantes y, en particular, sus modos de entender objetos matemáticos, las concepciones de esos objetos de las cuales ellos se apropian, viene teniendo un abordaje desde programas de investigación como el de las ideas previas en el habla hispana y los programas de preconceptions o mixconceptions en el habla anglosajona. Últimos desarrollos plantean la distinción de representación como apropiada para la indagación de la construcción de la realidad que hacen los sujetos en sus distintas facetas, esto es, en el nivel de lo micro-subjetivo.

Imágenes de mundo cotidiano a contracorriente del entendimiento del limite matemático

El análisis de la estructura de la noción del límite del habla cotidiana en Díaz (op. cit.) arrojó tres acepciones, a saber, la de *separador cerrado***,** que se refiere a la constitución de mundos o realidades excluyentes y se relaciona con la familia de acepciones cotidianas de término, fin y lindes. La de *separador abierto* que refiere a la familia de acepciones linde entre y lindero entre, acepción esta que distingue entre medios diversos. Y la de *valor en un contexto direccionado***,** que distingue según gradaciones crecientes o decrecientes y está más relacionada con excepcional, culmine, cambio, quiebre o trasgresión - pasar y sobrepasar.

Es de interés derivar algunas de las consecuencias para los aprendizajes del concepto de LIMITE, desde cada uno de los tipos de acepciones con sus contenidos y valoraciones. A partir de las calificaciones para "separador cerrado" y "valor en un contexto direccionado", pudiese hipotetizarse que esas acepciones se asociarían a fuerzas socializadoras que dicen relación con la existencia misma del sujeto. "Fuera" significa transgresiones entre cuyas consecuencias se encuentran la inseguridad por la marginación, pasando por un quiebre irreversible en el límite mismo.

Es posible hipotetizar, entonces, que el sujeto velará por mantenerse dentro de los márgenes, tanto de modo consciente como inconsciente. Ello sería una fuerza de carácter sustantivo para evitar el límite y, más aún, "tocarlo". Entonces se le asigna un valor de "extremo-peligro" y de máximos alcanzables "justo antes" del cambio irreversible. Si el joven ancla el concepto matemático en estas ideaciones, es de imaginar las dificultades para concebir las características matemáticas del mismo, varias de las cuales van a contrapelo de estas connotaciones cotidianas. Así, desde la microsubjetividad de los estudiantes se añade a la literatura la fuente de obstáculos de orden cultural, para la apropiación del LIMITE.

Concepciones de función en el aula de cálculo inicial

Invitados a conversar jóvenes de cursos de cálculo inicial en torno a sus concepciones de función, sus expresiones permitieron constituir dos realidades contrapuestas: una noción en el pasado del colegio y otra noción en el presente, de inicio de su preparación universitaria para una carrera profesional del campo de las ingenierías. Las funciones "en el colegio" se caracterizaron por ser un concepto fácil, cuyo aprendizaje es lograble según esos estándares escolares. De modo especial, todos los problemas son abordables. No obstante lo anterior, los jóvenes y las jóvenes no recuerdan que se les asociara a un significado más allá de verlo aplicado en algunas nociones de la asignatura de física. Por su parte, acá en la Universidad se desvanece ese poco sentido del colegio, presentándoseles el estudio de las propiedades de las funciones con una complejidad que llega a bloquearles, impidiéndoles su aprendizaje. Se les representa como un concepto complejo, cuyos problemas llegan a serles inabordables. Al respecto señala una alumna que se siente:

"Perdida buscando puntitos"

AaGC1[p. 31]

Ahondando más allá de estas consideraciones iniciales, el grupo va poniendo en común, más características para esta noción, adquiridas transcurrido el primer mes de clases. A continuación se describen más exhaustivamente las propiedades de la noción de función que es posible constituir a partir de la conversación sostenida por los y las jóvenes.

Las Concepciones de Función en Términos de dos Categorías

Considerando *desde la literatura (Dubinsky & Harel, 1992 y Sfard, 1989, citados por Artigue, 1995) los dos status de los objetos matemáticos: uno estático, estructural y el otro dinámico, se analiza las textualidades vertidas por los jóvenes en el contexto de la conversación, desde las cuales emerge una nueva categoría, las corporalizaciones de los objetos matemáticos presentes en las representaciones de las y los jóvenes.*

Status Estructural

Esta faceta estática se presenta según un continuo que va desde expresar aspectos estructurales de prenociones del concepto de función hasta enunciar aspectos del concepto con los que se hubiese familiarizado hasta este primer semestre de estudio universitario. Desde las distintas perspectivas correspondientes a las asignaturas usuales de los programas de ingeniería de un semestre inicial.

"Una relación... o sea, como materia sé que es una relación"
AoGC1[p. 78]

"Es como algo que, que junta dos cosas que tienen relación"
AaGC1[p. 81]

"A mi me viene la idea como de representación. Es la forma como de representar algo de una manera (...) cualquier cosa, en forma de x, de número, de y (...) Por ejemplo ahora con el asunto de los gráficos, representar un dibujito, una circunferencia en base a unas x, a unas y, y a unos números que están relacionados. Eso, eso para mi me da la idea de función..."
AoGC1[p. 85]

"Una función (...) que tiene un conjunto de partida, uno de llegada... que no puede tener dos imágenes un elemento"
AaGC1[p. 86]

Variadas razones pudiesen explicar la pobreza tanto de prenociones como del concepto mismo. Entre ellas que el tratamiento más sistemático del mismo se hace en la asignatura de álgebra de este primer semestre y el contexto de la conversación es la clase de cálculo. Dado el peso del asignaturismo, los alumnos no contemplan evocaciones desde otra asignatura. Por su parte el docente en cálculo ha privilegiado los registros gráfico y algebraico en su trabajo con funciones, sin énfasis de alguno en especial. Adicionalmente no ha explicitado las relaciones e incongruencias entre estos dos registros de trabajo con el concepto, aspectos que tampoco se abordan en la matemática del liceo (Guzmán, 1990).

Status Operacional

Del mismo modo que la anterior, esta faceta dinámica se presenta según un continuo que va desde expresar aspectos operatorios de prenociones del concepto de función hasta enunciar aspectos del concepto con los que se hubiese familiarizado en este primer semestre de estudio universitario.

"*Entonces ahí se establece una función, una relación entre la actividad y las consecuencias (...) algo que gracias a lo que tu haces, que se yo, tu te conviertes en lo otro ¿no? (...) Nosotros lo vemos con ecuaciones. Yo me busco una ecuación, lo transformo a él pro ejemplo en otra cosa (...)*"
AaGC1[p. 82]

"Se sacar todas las cuestiones de funciones"
AaGC1[p. 86]

Corporalizaciones

Propio de la mentalidad de los jóvenes que se integran a programas de ingeniería es su interés por proyectarse a los campos profesionales que ellos conocen de esta rama de estudios profesionales. Ello se concreta en una mayor o menor búsqueda imaginativa de situaciones externas en las que puedan "reconocer" al concepto, en que lo puedan "ver operando", en las que se aplique.

"*Una relación (...) Es como relacionar un hecho con algo que (...) Por ejemplo que una es consecuencia de la otra. Que se yo, cuando se hace un estudio, no se, me imagino yo* "

AaGC1[pp. 77]

Para complementar el análisis de los tipos de concepciones sobre funciones descritos hasta este punto -y presentes en la muestra seleccionada-, combinamos de a pares los ejes señalados: facetas estática y dinámica y corporalizaciones. De este modo se generaron un conjunto de seis tipos de concepciones potencialmente presentes en estudiantes de primer semestre. De la combinación de las facetas estática y dinámica obtenemos concepciones en el campo propio de la matemática, a saber: concepciones operacionales, concepciones estructurales, prenociones (con sesgos ya sea estáticos o dinámicos y de ambos a la vez) y procepto función. Las dos primeras ya se analizaron. Las prenociones se refieren a todo ese conjunto de ideas que se relacionan con alguna de estas facetas y que muestran distancias con el concepto propiamente tal, al que denominaremos procepto función para señalar la presencia en él de ambas facetas matemáticas, la de proceso y la de entidad conceptual con un desplazamiento flexible entre ambas según sea el contexto de uso matemático.

Con esta nueva clasificación se observó que las textualidades refieren más bien al ámbito de las prenociones. Es decir, al relevar las concepciones de función que portan los alumnos cuando van a iniciar el estudio del concepto de límite, se observa que estos no han logrado apropiarse del procepto de función, el que entra en juego al trabajarse con el procepto límite. Puede contemplarse como una atenuante el que en este caso se inicia su estudio con las funciones de variable discreta o sucesiones. En el tratamiento usual con ellas no se hacen referencias explícitas al procepto de función. Se suele hablar como de una sola entidad, la noción de "límite de sucesiones"

Al combinar el eje semántico de corporalizaciones y aquel que va desde prenociones más o menos complejas hasta el procepto, obtenemos los tipos potenciales de prenociones y procepto de orden instrumental y de orden matemático. Los dos primeros revelan una capacidad de relacionar el cuadro matemático con otros cuadros no matemáticos. Los dos segundos muestran niveles de apropiación del concepto: desde prenociones hasta el procepto de función. Estas distinciones nos permiten dar una mirada más precisa a las textualidades:

"*Una relación (...) Es como relacionar un hecho con algo que (...) Por ejemplo que una es consecuencia de la otra. Que se yo, cuando se hace un estudio, no se, me imagino yo que ciertas personas tienen esto porque hacen esto otro. Entonces ahí se establece una función, una relación entre la actividad y las consecuencias (...) algo que gracias a lo que tu haces, que se yo, tu te conviertes en lo otro ¿no? (...) nosotros lo vemos con ecuaciones. Yo me busco una ecuación, lo transformo a él por ejemplo en otra cosa (...) en medicina: que siempre dicen que 'estas personas son un grupo propenso a tener tal enfermedad'... Entonces yo creo que eso es como una función (...) las ecuaciones son –por ejemplo- circunstancias, son hábitos alimenticios*"

AaGC1[pp. 77, 80,82]

En esta textualidad se observa la presencia de una prenoción compleja dinámico-estática que se relaciona con una cuadro de comportamientos humanos del que se quiere dar cuenta. Se trata entonces de una prenoción complejo-instrumental. Por su parte hay los que -sin visualizar la relación del cuadro matemático con cuadros diferentes- tienen la pregunta abierta. Para un aprendizaje significativo, solicitarían su respuesta:

"Una relación... o sea, como materia se que es una relación (...) ¿En qué, en qué la vamos a plicar después? (...) ¿Realmente me va a servir para hacer un cálculo? (...) ¿Me va a servir para sacar un ángulo? ¿Se me caerá un edificio si no se hacer esa cosa?"

AoGC1[pp. 78, 88, 90, 92]

A modo de Conclusión

El programa socioepistemológico aborda la investigación desde una aproximación sistémica que le permite incorporar cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento, a saber, su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el ámbito de lo cognitivo y los modos de su enseñanza. Si las realidades sociales se conciben como construcciones históricas y cotidianas de actores individuales y colectivos, podríamos esperar ahora nuevos objetos de estudio así como nuevas facetas de indagación en aquellos ya legitimados. En efecto, ahora se visualizan sujetos que adquieren conciencia de sí mismos tanto como producto y, al mismo tiempo, como productores de la historia, de la cultura. Por su parte, el hecho educativo se visualiza como un conjunto de interacciones constituidas por los distintos actores sociales, que se relacionan entre sí, por medio de patrones culturales, discursos, representaciones y normas que los trascienden. Interacciones que movilizan una red de significaciones sociales que dotan de sentido a las acciones de los sujetos individuales, comprometiendo en este proceso, pensamientos, representaciones, sentimientos y acciones.

La búsqueda de comprensión de lo singular nos va permitiendo descubrir los elementos estructurales comprendidos en una realidad particular: expresión de la relación dialéctica de la acción humana y la estructura. Se concibe el conocimiento como un proceso espiralado de descubrimiento del trasfondo social a través de "mediaciones activas" que van permitiendo reconstruir la trama de relaciones y la lógica social, institucional y personal que las sustenta: expresión de la relación dialéctica de lo macro y lo micro, de lo objetivo y lo subjetivo. Las representaciones así como los esquemas de acción de los estudiantes abren a nuevas miradas para quienes se ocupan del estudio de los procesos del pensamiento llamados avanzados en los temas matemáticos de la educación superior. Los estudiantes considerados como actores sociales, sujetos en formación para un accionar ciudadano en, desde y sobre la cultura. Sus imágenes de mundo cotidiano evidencian la cultura en y desde la cual abordan infructuosos procesos de entendimiento de un objeto matemático como el caso del límite. Sus concepciones de función muestran facetas de una matemática "prenocional" presente en aulas de cálculo inicial. A su vez exhiben razgos propios de estudiantes que aspiran a desarrollarse como ingenieros: buscan desde sus inicios aspectos "que le den cuerpo", "que le den vida", que materialicen o corporalicen a los objetos matemáticos que se les presentan.

Referencias bibliográficas

Cantoral, Ricardo (1998): "La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: un programa emergente". Artículo publicado en La matemática e la sua didattica, periodico trimestrale, 3, lugglio 1999. Pitagora Editrice, Bologna.

Corcuff, Philippe (1995): Las nuevas sociologías. Título original: *Les nouvelles sociologies. La rèalitè sociale en construction* publicado por Editions NATHAN, París. Edición Castellana: Alianza Editorial S.A., Madrid, 1998.

Díaz, Leonora (1999): Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de casos. Tesis de Doctorado. Fac. de Educación. Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago de Chile.

Díaz, L. (sep.; 1987): "Estudio de la Relación entre Matemática y Campo Laboral". Tesis de Maestría en Educación Matemática. Fac. de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

Ritzer, George (1993): Teoría Sociológica Contemporánea. McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A., Madrid.

Piret, A.; Nizet, J.; Bourgeois, E. (1996): L'Analyse Structurale: Une méthode d'analyse de contenu pour les sciences humaines, Col. Met. en Sc. Humaines Ed. De Boeck & Larcier S.A., Dép. De Boeck Université, París, Bruxelles.

Conocimientos de Iniciación de la Aritmética y Formulación de Maestros en la Perspectiva de Orientación del Aprendizaje

Myriam Ortiz Hurtado
mortiz@coll.telecom.co
Centro de Investigación y de Estudios, AprendEs
Santa Fé de Bogotá
Colombia

Presentación

Se hace referencia a los aspectos generales de la investigación centrada en la formación de los maestros y a uno de los resultados de la indagación realizada bajo la dirección de la Doctora Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, en desarrollo del programa de estudios de Doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN. 1994 a 1999.

Uno de los objetivos específicos del proyecto que culminó con la tesis: "Iniciación de la aritmética. Una propuesta de formación de maestros desde la perspectiva del aprendizaje" fue el de determinar a partir de las matemáticas, su historia y epistemología y del entorno de los niños los conocimientos que constituyen la iniciación de la aritmética, a éstos se refiere este reporte.

Metas, supuestos y marco teórico de la investigación

Generar condiciones que hagan viable procesos de construcción de conocimientos matemáticos en la escuela, es la meta de la Línea de Investigación Didáctica en que se enmarca el proyecto desarrollado y que centra la actividad de grupo de la Fundación AprendEs.

En la educación tradicional la función de la escuela ha sido la enseñanza o transmisión de conocimientos. Los elementos que en ella intervienen, su organización y funcionamiento están previstos y se adecuan para hacer eficiente la enseñanza. A los maestros se les forma para que transmitan conocimientos y evalúen a los alumnos, ellos se comprometen y responden por la enseñanza más no siempre por el aprendizaje, del que tampoco se hacen responsables los alumnos. Los contenidos son un compendio que le determina al maestro lo que debe enseñar y de él se infiere lo que el alumno debe aprender. El aprendizaje se supone consecuencia de la enseñanza y la evaluación se diseña para verificar si el alumno logró o no, aprender lo previsto de antemano. El aprendizaje por transmisión obliga a la repetición y el compromiso del alumno no va más allá de los resultados efectivos de ésta. Aprende para responder al maestro y olvida lo aprendido una vez que el compromiso escolar desaparece. Los recursos y las formas de trabajo en el aula están determinados para hacer eficaz la actividad de enseñante del maestro. La finalidad de la enseñanza es la preparación para el futuro escolar, lo que deben aprender hoy se requiere en los cursos posteriores.

Suponer el conocimiento como verdad que se transmite por el maestro de manera independiente del entorno y las exigencias de éste, del nivel de pensamiento del estudiante y de sus conocimientos y experiencias anteriores es la concepción que derivada del positivismo respalda a la enseñanza. En una escuela con las características mencionadas, en general no es posible propiciar procesos de construcción de conocimiento. Una propuesta epistemológica diferente del positivismo respalda esta 'intuición que fue punto de partida de la 'investigación.

La epistemología genética como marco teórico

Una alternativa epistemológica que posibilita propiciar procesos de construcción de conocimientos escolares es la epistemología genética y como tal es el marco teórico del estudio que se reporta. De ella se retoman los aportes referidos al origen y carácter del conocimiento, al cómo se suceden en términos epistemológicos y psicogenéticos los procesos de aprendizaje y a las contribuciones que tienen que ver con la génesis del número. En el intento de incidir en la escuela desde esta perspectiva teórica, no basta con asumir la concepción del conocimiento que de ella se deriva y tener una explicación al funcionamiento de la enseñanza. Es necesario interpretar en términos del aprendizaje escolar los postulados de esta concepción y caracterizar el tipo de escuela que se desea lograr. Se opta por una escuela centrada en el aprendizaje y no en la enseñanza.

La epistemología genética y una escuela centrada en el aprendizaje

La transformación de la escuela como problema socio cultural es un proceso a largo plazo dependiente de múltiples factores que necesariamente desbordan las posibilidades de una investigación particular. Sin embargo, en el desarrollo de este estudio fue necesario inferir particularidades de los elementos que "intervienen en la actividad en el aula y podrían posibilitar un espacio escolar centrado en el aprendizaje. Se replantean: el papel del maestro y del estudiante, el aprendizaje y sus fines y se proponen características generales para los conocimientos a aprender, los recursos, las formas de trabajo y la evaluación.

Para propiciar procesos escolares de construcción de conocimiento se requieren:

Maestros formados para orientar el aprendizaje con el cual se comprometen y por el cual responden; maestros intelectuales por formación y convicción, que dan cuenta del desarrollo e historia de su disciplina, ejercitan y propician la discusión y argumentación racional y la comunicación escrita como base de una cultura académica; maestros que prefiguran sus acciones y no repiten actividades o situaciones en las que han fracasado, sin antes analizar las causas del fracaso; y para quienes su actividad docente es el espacio de realización académica y profesional.

Estudiantes que asumen con conciencia y responsabilidad la construcción de sus conocimientos y estructuras mentales y aprenden a través de la actividad y reflexión individual y colectiva y la confrontación social.

Procesos de aprendizaje que se posibilitan y generan en los conocimientos anteriores y en las estructuras de pensamiento logradas y que dependen de las experiencias, capacidades, limitaciones y posibilidades del individuo y de las condiciones del entorno. Procesos cuyo objetivo fundamental debería ser el desarrollo mental y cultural del estudiante y de capacidades para el trabajo "intelectual y físico, que le permitan comprender y transformar su entorno por el desempeño eficiente en el espacio socio cultural, técnico y científico en que le toque actuar. Aprendizajes que contribuyan a la realización personal y social del individuo.

Conocimientos escolares contextualizados, necesarios de aprender porque a través de los procesos de difusión y aplicación o históricos de construcción y desarrollo han mostrado ser válidos y pertinentes para la vida, la ciencia y la tecnología.

Formas de trabajo en el aula eficientes y recursos escolares útiles y oportunos para el aprendizaje, acordes con las condiciones y necesidades particulares de los procesos de conocimiento que se van desarrollando.

Evaluaciones autocríticas que a partir del reconocimiento por parte de los estudiantes y el maestro de lo que ha sido el proceso de aprendizaje y de lo que se quiere que éste sea, oportunamente permiten ajustar la marcha y avanzar eficazmente.

Con la mira en ese tipo de escuela que se quiere contribuir a construir se orienta el trabajo hacia el problema de la formación de los maestros, por cuanto son ellos quienes determinan lo fundamental del quehacer dentro del aula y por lo tanto constituyen un factor determinante de las posibilidades de transformación de la educación escolar.

El problema de la formación de los maestros al enfrentar el problema de la formación de los maestros de matemáticas es necesario intuir que tipo de preparación posibilita que los docentes transformen su actividad en el aula, pasando de ser enseñantes a orientadores de aprendizaje. Los primeros intentos de orientar en la escuela procesos de construcción, hicieron evidentes las carencias del maestro en cuanto a los conocimientos matemáticos y las formas de trabajo en el aula. La reflexión acerca de cómo superar esas carencias condujo a indagar sobre qué tipo de conocimientos matemáticos constituyen el saber de los maestros y qué forma de trabajo coherente con lo que se pretende para la escuela les posibilitan reaprender esos conocimientos.

Las matemáticas que saben los maestros pueden ser de dos tipos, unas procedentes de la enseñanza, que son teorías asumidas como productos terminados derivados de las elaboraciones del matemático y otras de carácter cultural provenientes de la actividad individual cotidiana y la práctica colectiva. De las matemáticas aprendidas como producto terminado se desconoce por completo su proceso de construcción y los diferentes niveles de elaboración que han tenido. Y de los saberes cotidianos no siempre se tiene conciencia y menos aún comprensión por cuanto no han sido reflexionados. En el caso de los maestros de preescolar y primero de primaria con quienes se trabajó, se pudo constatar que sus conocimientos respecto de la iniciación de la aritmética corresponden en lo fundamental a saberes cotidianos no reflexionados. La experiencia acumulada durante el proceso de exploración que por cerca de 15 años antecedió a la investigación sistemática permite afirmar que estos dos tipos de conocimientos que tiene el maestro y la forma como los aprendió no son suficientes para orientar procesos de construcción en el aula.

En el marco de la epistemología genética y con los supuestos señalados se abordó de manera sistemática el estudio de dos aspectos centrales de la formación de los maestros: los conocimientos que deben tener y las formas de trabajo en el aula. En la perspectiva del aprendizaje lo que debe saber el maestro depende de lo posible, pertinente y necesario de aprender por los niños y esto a su vez está determinado por los elementos que intervienen y posibilitan los procesos de aprendizaje escolar.

Se escogió como tema la iniciación de la aritmética en concordancia con el supuesto epistemológico de que el conocimiento y el desarrollo del pensamiento son de carácter genético y evolucionan en sentido viable. En consecuencia la iniciación de la aritmética en los primeros años se constituye para los niños en el estadio elemental y la génesis del conocimiento aritmético y del desarrollo de las estructuras de pensamiento que le son inherentes.

Determinación de los conocimientos que constituyen la iniciación de la aritmética escolar

Si bien se asume la construcción del conocimiento a partir de la actividad, esto en términos escolares debe tener una interpretación que se corresponda con el carácter socio cultural de la escuela, con las condiciones de los estudiantes y con el conocimiento a aprender. Los conocimientos posibles, pertinentes y necesarios de aprender por los niños en la iniciación escolar, no necesariamente son los mismos que se ha considerado se deben enseñar. Se requiere establecer de manera clara, a partir de los elementos que intervienen en el aprendizaje y a la vez lo determinan, cuáles son estos conocimientos.

La iniciación de la aritmética a partir de las matemáticas su historia y epistemología

Los estudiantes en la escuela inician procesos de construcción de conocimientos que a nivel de los conceptos forman parte de una disciplina estructurada: las matemáticas; y como tales, tienen una historia en el proceso del pensamiento de la humanidad. En términos psicogenéticos lo necesario de aprender en la escuela se ubica o es próximo a algún estadio de conocimiento anterior a la elaboración conceptual con que se formula en matemáticas y por tanto estos dos niveles tienen vínculos especiales que se deben tener en cuenta. Los conocimientos que constituyen la iniciación de la aritmética escolar podemos decir, dependen de los que constituyen la iniciación de la aritmética como disciplina matemática. En el mismo sentido los conceptos matemáticos forman parte del estadio de mayor nivel de abstracción y generalización a que el niño y el maestro potencialmente tienen la posibilidad de llegar. Por consiguiente se puede afirmar que en el aprendizaje los conocimientos de iniciación de la aritmética como disciplina matemática están posibilitados por los conocimientos que se aprenden en la iniciación escolar.

Una aproximación histórico epistemológica a los conocimientos matemáticos involucrados en la iniciación de la aritmética, permite identificar otros conocimientos que como logros de estadios anteriores han estado presentes en los procesos de aproximación a los conceptos y por lo tanto tienen relación con el aprendizaje.

La iniciación de la aritmética a partir del entorno del niño

La consideración del entorno como instrumento para el aprendizaje en la iniciación escolar se fundamenta en las reflexiones siguientes: Es innegable que los intereses de conocimiento de los niños durante su primera infancia se centran en su entorno y que sus conocimientos anteriores al ingreso a la escuela están determinados por las experiencias que ha tenido en ese entorno. En la iniciación escolar se debe atender a lo que el niño sabe por ser éste el punto de partida del proceso de aprendizaje que inicia. Se puede además apoyar los intereses y necesidades de conocimiento propias de esa edad y dar significación a lo que se hace en el aula, proponiendo actividades a través de las cuales los niños amplían y profundizan en el conocimiento de su espacio a la vez que se aproximan a los conocimientos escolares a aprender. Hacerlo requiere que se reconozca el entorno del niño, el maestro y la escuela como tal instrumento de aprendizaje y se determinen los conocimientos que a partir de él y de la cotidianidad de unos y otros aproximan a las nociones aritméticas.

Algunos estudios antropológicos proveen información con respecto a los logros que en conocimientos de clasificación, ordenación y establecimiento de relaciones entre los elementos de su entorno han logrado las comunidades primitivas. Esta información ligada con los postulados de la epistemología genética respecto de la génesis del número permiten aseverar que el conocimiento intencional de lo que es próximo es una posibilidad de aproximación a las nociones relacionadas con el número. La exploración histórico epistemológica hecha con respecto del número, el conteo y la serie numérica contribuye a esta afirmación.

Conocimientos que constituyen la iniciación de la aritmética

El estudio didáctico de los contenidos escolares fue el mecanismo metodológico que se asumió para establecer los conocimientos que constituyen la iniciación de la aritmética escolar en la perspectiva del aprendizaje. Éstos se organizaron en seis categorías que se corresponden con cada uno de los elementos que intervienen y determinan los proceso escolares de aprendizaje. Una síntesis de las categorías es como sigue:

Categoría 1: Derivada de la matemática formal. En la matemática los conceptos de número cardinal y orden entre los cardinales definidos por Russell y el concepto de serie numérica derivado de la definición axiomática de número natural dada por Peano, constituyen como objetos básicos de la aritmética el telón de fondo formal de la indagación. La elección de estas conceptualizaciones se debe a las consideraciones siguientes: De los conceptos de Russell se derivan nociones de número y orden entre los cardinales basadas en la equivalencia y comparación cuantitativa de cantidades, que están en concordancia con la génesis del número establecida por Piaget y en términos del aprendizaje fundamentan el número como síntesis de clasificaciones, ordenaciones y correspondencias entre cantidades, a la vez que le dan una significación que posibilita su construcción a partir de la interacción con montones de elementos del entorno. Sin embargo, estas mismas nociones no son prácticas para construir el cardinal de cantidades grandes y de ellas no se obtienen fácilmente las nociones relacionadas con la serie numérica. Estas dificultades se resuelven con la definición axiomática de Peano. El conteo y la enumeración son imprescindibles en la iniciación escolar no sólo porque forman parte de la experiencia cotidiana en el entorno del niño y del maestro sino porque apoyan la construcción del cardinal y son génesis de las nociones de secuencia discreta, ordenada e infinita de la serie numérica.

Categoría 2: Derivada de la exploración histórico epistemológica. Una exploración de este tipo acerca del desarrollo de los conceptos de número, orden entre los números y serie numérica y una interpretación derivada de aportes de la antropología acerca de lo que pudo ser el origen y primeras aproximaciones al número, permitieron identificar las nociones de: cantidad, multitud, unidad, magnitud, contar y las de número cardinal, orden y serie numérica, como conocimientos que con diferentes niveles de elaboración forman parte de los estadios de conocimiento anteriores a la conceptualización. Estas nociones se constituyen en una base para la iniciación escolar, a ellas se aproximan los niños en los primeros años y como tales son conocimientos imprescindibles del maestro.

Categoría 3: Derivada de la epistemología genética. Al interpretar en términos del aprendizaje escolar los aportes de la epistemología y psicología genéticas con respecto a la génesis del número y el desarrollo de las estructuras mentales en los procesos de construcción de conocimiento, se hace necesario incluir en la "iniciación de la aritmética las nociones de clasificación, ordenación, correspondencia y conservación de cantidad. Éstos conocimientos imprescindibles de los maestros están considerados con diferentes niveles de elaboración: uno referido a la comprensión y manejo práctico del conocimiento y organización del entorno y por ende al desarrollo de las respectivas estructuras mentales; y otro aludido a la elaboración y comprensión de los mismos como nociones.

Categoría 4: Derivada de asumir el entorno como instrumento de aprendizaje escolar. Al considerar las nociones de clasificación, seriación, correspondencia, cantidad y conservación de cantidad a nivel del conocimiento y manejo del entorno es necesario incluir en la iniciación escolar los conocimientos referidos a las posibles clasificaciones, jerarquías y correspondencias a establecer entre los elementos naturales, físicos y socio culturales que constituyen el espacio cotidiano del niño y el maestro; y los que tienen que ver con las acciones de observar, caracterizar, comparar, juntar, separar, agregar, quitar, repartir de uno en uno unidades simples y múltiples, denominar y denotar números y lugares de una jerarquía, contar y enumerar. Estos conocimientos son imprescindibles para el maestro y para el niño son objeto de aprendizaje como punto de partida o para ampliarlos y profundizarlos

Categoría 5: Derivada de asumir el carácter genético del conocimiento. Al interpretar en términos del aprendizaje escolar el carácter genético y evolutivo de los procesos de construcción de conocimiento se debe dar relevancia a los conocimientos de los niños al ingresar a la escuela (y de manera equivalente a los que poseen los estudiantes en general con respecto a una noción que se pretende aprendan o reelaboren). Éstos constituyen el punto de partida del proceso de aprendizaje escolar y son los que lo posibilitan, por tanto forman parte de la iniciación de la aritmética. Para el maestro deben ser objeto de reflexión e indagación a partir de la observación e interpretación de lo que hacen y comentan los niños y de sus formas de trabajar y argumentar. Para el niño son los que le permiten darle sentido a las actividades de la escuela y verificar que está aprendiendo.

Categoría 6: Derivada de asumir el carácter evolutivo del conocimiento. De la misma manera como los conocimientos anteriores al ingreso a la escuela determinan los procesos de aprendizaje en la iniciación escolar, lo que se aprende en esta etapa determina lo posible de aprender posteriormente. Los logros en la iniciación se integran a los sucesivos estadios del conocimiento con diferentes niveles de elaboración pero manteniendo relación con los que les anteceden. Las matemáticas que puedan aprender los niños durante su escolaridad también forma parte de la iniciación como conocimientos deseables del maestro que le permitan tenerlos en cuenta en el diseño y orientación de las actividades considerándolos como proyección del aprendizaje inicial.

Las categorías 2, 3, 4 y 5 comprenden los conocimientos exigibles al maestro; éstas y la 6 los deseables, la 2 y la 4 los conocimientos escolares. La organización dada a los conocimientos a aprender permite especificar relaciones entre éstos y elementos que determinan e intervienen en su construcción, que dan una nueva significación al aprendizaje escolar.

Los conocimientos necesarios, pertinentes y posibles de aprender en la escuela están *en relación con:*

o	las matemáticas su historia y epistemología	*COMO* proyección y referencia,
o	lo aprendido	COMO punto de partida;
o	las estructuras de pensamiento	COMO lo que se debe desarrollar;
o	lo exigible al maestro	COMO garantía para la orientación del aprendizaje;
o	el entorno	COMO lo que hay que conocer transformar, y
o	lo que se aprenderá mañana	COMO lo que se debe posibilitar.

Los otros dos objetivos del estudio realizado fueron: 2. Identificar a partir de la psicología genética y del entorno del niño, "posibles niveles de complejidad didáctica" de los conocimientos de iniciación de la aritmética. Organizar éstos en redes de complejidad didáctica que permitan visualizar "probables secuencias de construcción de los mismos"; y, 3. Diseñar y experimentar con maestros de preescolar y primero de primaria, un programa de formación que les permita reelaborar dichos conocimientos a través de una forma de trabajo coherente con lo que se pretende para el aula, fueron los objetivos del estudio. Los logros al respecto serán objeto de otras presentaciones.

** Investigación realizada con el apoyo Colciencias y la Universidad Distrital F. J. de C. de Bogotá Colombia.*

Estrategias para Desarrollar el Pensamiento Lógico en Alumnos de Grado Sexto.

Italo Reyes González
italoreye@telesat.com.co
Colegio Instituto Ginebra
Colombia

Objetivos

Para la ejecución del proyecto, se fijaron los siguientes objetivos

Objetivo General

Identificar las etapas de desarrollo cognoscitivo, según la clasificación de Jean Piaget, alcanzadas por los estudiantes del Instituto Ginebra matriculados de Séptimo a Undécimo Grado, inclusive, en el periodo lectivo 1997-1998.

Objetivos Específicos

1. Caracterizar la población objetivo según edad y sexo.
2. Determinar la tendencia predominante en las etapas de desarrollo cognoscitivo (según la escala de Piaget) alcanzado por los estudiantes del Instituto Ginebra, según grados académicos.
3. Proponer metodologías que consulten y mejoren el desarrollo cognoscitivo alcanzado por los estudiantes del Instituto Ginebra.
4. Diseñar proyectos pedagógicos de aula que favorezcan la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

Los resultados del diagnóstico se pueden resumir de la siguiente forma:

GRADO: SEXTO.

Nivel: Preoperacional.

Tres de cada diez estudiantes mujeres de este nivel académico logran realizar con eficiencia tareas correspondientes a la etapa preoperacional de desarrollo cognoscitivo; la misma proporción se encontró entre los estudiantes de sexo masculino.

El anterior resultado evidencia un retraso en el desarrollo intelectual de los alumnos de este nivel.

Nivel: Operaciones Concretas.

Una situación similar a la descrita anteriormente para las mujeres se encuentra cuando se propone a los estudiantes realizar actividades que requieran un desarrollo completo del nivel operativo concreto; en tanto que para los hombres esta proporción fue de cuatro a diez.

Nivel: Operaciones Formales.

Como era de esperarse, una de cada diez alumnas de grado sexto manifiesta capacidad y suficiencia para superar pruebas que requieran de destrezas y cualidades propias del razonamiento operativo formal.

Entre los varones, esta proporción fue de dos de cada diez.

GRADO: SÉPTIMO

Nivel: Preoperacional

3 de cada 4 estudiantes (mujeres) se fijan en la forma al momento de realizar una clasificación. Esta proporción se conserva cuando se trata de realizar operaciones de conservación. Respecto de la causalidad, entre el 36% y el 46% de los estudiantes que respondieron la prueba, presentan evidencias de haber superado esta etapa.

Entre los varones, 4 de cada 5 toman la forma como criterio de clasificación. Frente a una situación de seriación a nivel preoperacional, en igual proporción dan respuesta satisfactoria a la situación presentada.

En general, se pudo apreciar que, en promedio, 7 de cada 10 estudiantes han superado el nivel cognitivo preoperacional.

Nivel: Operaciones Concretas.

4 de cada 5 alumnas están en capacidad de diferenciar la parte del todo y viceversa; es decir, que manejan con suficiencia los criterios de pertenencia e inclusión. Con respecto a operaciones o situaciones que exijan determinar alguna ley de conservación, y de cada cuatro mujeres responden correctamente a los cuestionamientos que se les plantean. Con respecto a la causalidad de fenómenos entre el 36% y 46% de las niñas mostraron haber superado la etapa de operaciones concretas; y cerca del 90% resuelve acertadamente operaciones de seriación.

Entre los alumnos, el 85% realiza correctamente operaciones de pertenencia e inclusión, 4 de cada 5 de ellos, realizan de forma eficiente y confiable operaciones de seriación de objetos. 4 de cada 10 estudiantes responden con alguna fortuna a preguntas relacionadas con la causalidad de determinados fenómenos. Ante operaciones de balanceo, solo 5 de cada 100 estudiantes realizarlas correctamente.

Nivel: Operaciones Formales.

Todas las alumnas realizan a lo sumo tres clasificaciones diferentes, entre los varones, 9 de cada 10 solo pueden aplicar un solo criterio de clasificación, siendo el más general la forma.

En las operaciones evaluadas, en general, encontramos que 1 de cada 10 estudiantes (hombres y mujeres) presentan evidencias de haber alcanzado la etapa de las operaciones formales. 2 de cada 5 señalan al peso como razón para el sumergimiento de los cuerpos.

GRADO: OCTAVO

Nivel: Preoperacional.

8 de cada 10 alumnas utilizan la forma como criterio de clasificación mientras que 3 de cada 10 asumen otros criterios (relleno o tamaño). Entre los hombres, 6 de cada 10 de ellos utilizan la forma como criterio de clasificación y 1 de cada 10 emplean otro criterio.

En general, se puede afirmar que 9 de cada 10 estudiantes han superado esta etapa de desarrollo. .

Nivel: Operaciones Concretas.

Tomando como indicador de desarrollo cognoscitivo, en lo relacionado a las operaciones concretas, la operacionalización de situaciones de pertenencia e inclusión, se puede afirmar que 8 de cada 10 alumnas y todos los alumnos de este nivel han alcanzado exitosamente este nivel de desarrollo. Esta proporción se mantiene con respecto a la conservación. En lo referente a las operaciones de seriación, causalidad, balanceo y eliminando contradicciones la proporción rebaja llegándose al punto de que solo, en promedio, 4 de cada 10 estudiantes superan de forma exitosa problemas que involucren las operaciones referidas.

Nivel: Operaciones Formales.

En general, puede afirmarse que 3 de cada 10 estudiantes de este nivel académico han alcanzado, y superado, la etapa de las operaciones formales, sin distingo de sexo.

GRADO: NOVENO

Nivel: Preoperacional.

Entre las mujeres, cinco de cada cuatro, resuelven con solvencia situaciones de nivel preoperacional.

Con respecto a los varones de este nivel académico, cinco de cada diez tienen las habilidades suficientes para resolver tareas preoperacionales.

Nivel: Operaciones Concretas.

Cuatro de cada diez alumnos demuestran capacidad y suficiencia para resolver con éxito pruebas de nivel operativo concreto.

Entre los hombres se encontró que seis de cada diez poseen el desarrollo intelectual suficiente para enfrentar con éxito pruebas de este nivel.

Nivel: Operaciones Formales.

Una de cada diez mujeres poseen un desarrollo intelectual capaz de superar afortunadamente situaciones para cuya solución sea necesario recurrir al pensamiento formal.

Los hombres demostraron que en proporción de dos a diez pueden superar retos que les exijan recurrir al pensamiento operativo formal para poder ser resueltas.

GRADO: DÉCIMO

Nivel: Preoperacional.

Entre hombres y mujeres por igual se encontró que seis de cada diez resuelven con propiedad situaciones problemáticas que comprometan la capacidad preoperatoria.

Nivel: Operaciones Concretas.

Siete de cada diez mujeres pueden enfrentar con propiedad tareas correspondientes al nivel operativo concreto; mientras que seis de cada diez hombres demuestran poseer tal capacidad.

Nivel: Operaciones Formales.

Tres de cada diez mujeres demuestran haber alcanzado el nivel operativo formal; en tanto que cuatro de cada diez hombres presentaron evidencias de haber llegado a tal nivel.

CONCLUSIONES

Barry J. Wadsworth, en su texto "Teoría de Piaget del Desarrollo Cognoscitivo y Afectivo", editorial Diana 1991, presenta algunas orientaciones metodológicas, de las cuales rescatamos esta: "Si suponemos que la adquisición de conceptos es invariable, por lo menos en las culturas occidentales, entonces tiene sentido educativo usar el modelo de invarianza de

Piaget para saber cuándo debe esperarse que el niño sepa algo. Por ello debe elaborarse un programa de secuencias teniendo en mente el estado cognoscitivo cambiante de los niños. Cuando los programas no toman en cuenta los niveles de desarrollo de los conceptos de los niños, el aprendizaje es insuficiente por falta de comprensión. Los niños no aprenden cuando carecen de las habilidades cognoscitivas necesarias. De acuerdo con la teoría de Piaget, los niños están "listos" cognoscitivamente para desarrollar determinado concepto cuando han adquirido los esquemas necesarios y solo entonces. Desde luego, necesita una razón para aprender.

Por su parte, Juan Delval, en "**La inteligencia: su crecimiento y medida**", afirma que "La escuela ha tenido tradicionalmente como función proporcionar un aprendizaje memorístico, un aprendizaje que es contrario al desarrollo de la inteligencia. Para que la inteligencia se desarrolle, es necesario ejercitarla buscando uno mismo las propias soluciones. La función del maestro en la escuela es proporcionar las oportunidades para aprender y guiar al alumno en su propia búsqueda".

Ser más inteligente puede contribuir a hacernos más libres, pero uno de los problemas de la inteligencia es el de las restricciones de su uso. La sociedad, en buena medida a través de la escuela, limita el uso de la inteligencia a determinados problemas. En la escuela se enseña a los individuos a reflexionar sobre ciertas cosas y a no hacerlo sobre otras. El aprendizaje memorístico tiene como función el no aprender a razonar. Para evitar que se reflexione sobre ciertos problemas, se transmiten prejuicios y soluciones tradicionales, muy teñidas de valores afectivos, que impiden el raciocinio sobre cuestiones importantes, como pueden ser muchos de los problemas políticos y sociales, la pena de muerte, el aborto, la religión, las relaciones entre los sexos, la libertad para cambiar la sociedad, etcétera.

Así pues, dos son los principales peligros que se oponen a la extensión de la inteligencia: el intentar limitar su desarrollo en la escuela y el evitar que la capacidad de razonar se aplique a determinados problemas. Mientras que el desarrollo científico ha sido muy grande, la posibilidad de extender el uso de la inteligencia a todos los hombres y a todas las cuestiones está todavía lejos de haber alcanzado un nivel satisfactorio.

Estas orientaciones parecen hechas a propósito para obligarnos a orientar las conclusiones en la dirección que favorezca más la comprensión del fenómeno que estudiamos: el desarrollo intelectual de nuestros alumnos y sus posibles causas.

Pero, para poner orden al análisis, enunciemos algunas conclusiones que se desprenden de la descripción de resultados hecha en el apartado anterior.

- Se evidencia un retraso en el desarrollo cognoscitivo de los estudiantes, según la clasificación de Piaget, en todos los grados académicos ofrecidos por el colegio.

- Cuando se les pide a los estudiantes que justifiquen una respuesta, se descubre que hacen afirmaciones verdaderas, pero la razón que esgrimen no tiene nada que ver con la afirmación: "El halado se derritió porque el vidrio lo hace mover".

- Los conceptos propios de una cultura popular e ideológicamente fundada están presentes en casi todas sus manifestaciones escritas: ... "Porque el frío y el agua en cantidad es malo"; "El vapor de agua y la tierra son griposos”.

- Es muy común que se asocie el tamaño de un cuerpo con su peso, tal vez esto hace que evidencien un absoluto desconocimiento de la conservación de la materia a pesar de las transformaciones que esta pueda sufrir y, presenten dificultad en aplicar la reversibilidad (mentalmente) a operaciones y procedimientos para volver a su estado inicial un cuerpo o una operación.

- Parece que si a los estudiantes que presentaron la prueba se les pide ordenar un conjunto de objetos, la mayoría lo hace sin dificultad en un terreno concreto; pero cuando para hacer esta misma tarea se requiere de cierto nivel de abstracción, surgen problemas en la realización de la tarea. Por ejemplo, pueden ordenar de mayor a menor un conjunto de cintas; pero si se les dice que Carlos es más alto que Pedro pero menos alto que Juan, y se les pide que determinen quien es el más alto de los tres, fracasan al tratar de resolver esta cuestión. Tal vez a esto se deba, en particular, que tengan tantas dificultades para resolver los problemas de matemáticas que se refieren a operaciones totalmente conocidas: Si se pueden manipular los objetos razonan sin ninguna dificultad, mientras que los mismos razonamientos, en apariencia, pero exigidos en el plano del lenguaje y de los enunciados verbales, constituyen, de hecho, otros razonamientos mucho más difíciles, debido a que están relacionados con simples hipótesis sin realidad efectiva.

- Los estudiantes que ingresan a grado undécimo muestran un preocupante retraso en lo referente al desarrollo operativo tanto concreto como formal. Téngase en cuenta que no más del 40% de los estudiantes de este nivel demostraron solvencia intelectual para resolver cuestiones que involucran cualidades operativas formales.

- Una situación similar se encuentra cuando se analizan los resultados alcanzados por los estudiantes que ingresan a grado Décimo, al enfrenarlos a situaciones similares a las descritas en el punto anterior para los estudiantes que ingresan a grado undécimo.

- Los alumnos que ingresan a grado Noveno demostraron una mayor regularidad en el desarrollo cognoscitivo, pues se hizo evidente que entre ellos las etapas de desarrollo esperadas se encuentran presentes y bien alcanzadas.

- Aunque se muestra alguna diferencia entre los niveles de desarrollo cognoscitivo alcanzados por hombres y mujeres, no hay significancia estadística que permita afirmar que es sensible la diferencia entre ambos sexos, respecto de su desarrollo.

- Los estudiantes no resuelven favorablemente el conflicto cognitivo, esto se evidencia cuando se les pide que traten de eliminar contradicciones.

- La débil estructura abstracta del pensamiento dificulta la asimilación de nociones formales de matemáticas, ciencias, filosofía o literatura. Esta característica favorece la memoria de corto plazo y, ante la reiteración de una noción, se produce la sensación de aprendizaje cuando en realidad se está en presencia de una huella némica. Esto explica que la educación bancaria y el aprendizaje memorístico produzcan "buenos resultados" al docente.

- Los malos resultados en las pruebas de estado encuentran una explicación en las débiles estructuras cognoscitivas desarrolladas por los estudiantes.

- Un análisis más detallado de la forma como los estudiantes expresan, por escrito, su pensamiento mostró que poseen bajas competencias de escritura.

- También se puso de manifiesto una poca capacidad de discriminar; entendiéndose esta como la posibilidad de diferenciar con "mayor detalle" elementos dentro de un conjunto atendiendo diversas características, ya que ante una colección de objetos susceptibles de ser clasificados bajo diversos criterios solamente emplean uno creyendo estar empleando varios. Por ejemplo ante la pregunta de cuántos criterios emplearon para realizar una determinada clasificación, responden que tres: "los que son redondos, los triángulos y los cuadrados", cuando esto obedece a clasificar por un único criterio: la forma.

- Resulta significativo que en todos los niveles se presenta un tipo de pensamiento que puede calificarse como " moral animista" el cual se manifiesta cuando al preguntárseles por la razón que llevó a que un niño contrajese una determinada enfermedad, respondieron que "por desobediente" o "porque Dios lo castigó", desconociendo una relación de causalidad manifiesta en la situación presentada a ellos.

- Las operaciones de conservación no están presentes en algunos de los estudiantes de todos los grados, pues aún entre los estudiantes que ingresan a undécimo grado se hallaron rezagos de pensamiento preoperacional en el sentido en que creen encontrar más agua en un tubo alargado que en un plato cuando ambos recipientes han sido llenados con una vasija de igual volumen e igualmente llena. También algunos creen que un cilindro de plastilina posee más masa que una esfera de igual tamaño, e igual masa, a otra que se empleó para fabricar el cilindro en cuestión.

- <u>Las bajas competencias de comprensión de lectura pueden ser causa de resultados no deseados en la prueba aplicada</u>.

- Con respecto a la causalidad, persiste la idea de que la flotación de los cuerpos depende de su peso y no de su densidad. A favor de los alumnos debe decirse que "En estas actividades no es totalmente equivocado considerar el peso como un factor determinante en el desplazamiento del agua. El peso tiene aquí un papel importante. Se necesita un mínimo de peso para hacer que un objeto se hunda y pueda desalojar una cantidad de agua igual a su volumen. Más allá de ese peso mínimo, el rango de pesos posibles no afecta el desplazamiento. La respuesta del peso, por tanto, tiene cierta base lógica y se puede considerar incompleta". Ed Labinowicz.

- La solución de problemas exige la reestructuración de los elementos que se presentan a quien los va a resolver; y la dificultad se encuentra, en muchos casos, en que hay elementos que impiden dicha reestructuración. Tal vez así se explique porque resulta difícil a nuestros estudiantes dar respuesta satisfactoria a cuestiones como la de decidir bajo cual de estas dos sentencias gramaticales un reo obtiene el perdón: (I) Perdón imposible, condenarlo y, (II) Perdón, imposible condenarlo.

La Enseñanza de los Números Racionales a partir de la Relación Parte Todo[2]

Gilberto Obando Zapata
gobando@ayura.udea.edu.co
Universidad de Antioquia, Colombia
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia.

Aritmética, nivel primaria y bachillerato

Justificación

En la actualidad, y como consecuencia de los resultados de las investigaciones realizadas en las últimas décadas, se hace necesario que los currícula y prácticas educativas y pedagógicas se centren en lograr el desarrollo de un pensamiento matemático autónomo en el alumno. Esta búsqueda es consecuencia de los cambios que se han dado en las concepciones sobre las matemáticas, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de las mismas.

Lograr este fin es algo que trasciende ampliamente la mera selección de los contenidos apropiados que se deben enseñar, o el diseño de las técnicas metodológicas a través de las cuales se pueda hacer más eficiente la enseñanza. Se debe hacer de la escuela un gran laboratorio de investigación, en el cual la reflexión constante sobre las prácticas pedagógicas del maestro, así como las producciones de los alumnos, sean motor constante de nuevas decisiones.

Esta investigación se ubica en el contexto de la enseñanza de los números racionales, a partir del concepto de fracción. La importancia de éstos en nuestra cultura es indudable: cada día los medios de comunicación nos entregan grandes volúmenes de información, la cual es cuantificada en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, etc., y una buena comprensión de los números racionales es fundamental para analizarla e interpretarla. Pero también son importantes para la formación matemática escolar, dado que los números racionales constituyen una base fundamental, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación en otras disciplinas como la física, la química, la biología, etc.

Marco Teórico

Los números racionales, desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje, son de gran complejidad, la cual está relacionada con el hecho de que la fracción presenta a la vez homonimia y sinonimia (Mancera, 1992, p32). Además, Ohlsson (1988), propone una caracterización semántica para las fracciones en términos de dos tipos de significados: El significado matemático y el significado aplicacional. Desde esta perspectiva se distinguen cuatro subconstructos que son: El constructo de la función cociente, el cual tiene los siguientes significados aplicacionales: particiones, acortamientos, extracciones y el cociente cartesiano; el constructo del número racional, el cual tiene como significados aplicacionales: la fracción y las medidas; el constructo de los vectores binarios, el cual tiene como significados aplicacionales: razones, ratas, proporciones y cantidades intensivas; y por último, el constructo de la función compuesta, el cual tiene como único significado aplicacional al operador fraccionario. Aunque Ohlsson propone una caracterización de las fracciones, más que del número racional, su trabajo propone un avance significativo en la caracterización de la problemática alrededor de la enseñanza de los números racionales, ya que pone de manifiesto la complejidad del campo significados de las fracciones al mostrar cómo éstas pueden ser interpretadas desde cuatro constructos matemáticos.

[2] Tesis de Maestría realizada por el autor para optar por el título de Magister en Educación, Énfasis en Educación Matemática en la Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia. Marzo de 1999. Directora de tesis, Mgr. Gloria Castrillón Castro.

Por su parte Behr et al, (sin fecha, 1990 y 1992) profundizan en el análisis propuesto por Ohlsson, en el sentido de realizar una caracterización semántica más fina de los distintos subconstructos bajo la óptica de la matemática de cantidades (esta óptica los lleva a considerar tanto el tipo de unidad: simple o compuesta; como el tipo de magnitud: continua o discreta). La importancia de este trabajo está en la introducción de dos nuevas variables sobre las cuales trabajar: El tipo de unidad y el tipo de magnitud. Ambas son claves a la hora de diseñar las secuencias de tareas a través de las cuales enseñar los números racionales, pues permiten ver la necesidad de conocer, además de los distintos constructos del número racional, el conjunto de significados provenientes del análisis de los mismos desde la óptica de la matemática de cantidades.

Planteamiento del problema

En medio de un marco teórico tan amplio y complejo, es necesario centrar la investigación en las fracciones por ser considerados un puente de entrada a los números racionales[3]. Pero además, se toma una interpretación de la fracción desde la relación parte-todo como el constructo base para la estructuración de la investigación. Lo anterior por las siguientes razones:

a) Se ve en este constructo un eje a través del cual se accede a los demás constructos de los números racionales.
b) Desde la relación Parte–Todo se tiene un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, sin que por esto deje de ser la unidad. Por lo tanto se inicia un trabajo en la noción del continuo real.
c) Desde este constructo, algunas propiedades (como la de fracciones propias e impropias), algunas relaciones (como la de equivalencia), y algunas operaciones (como la suma o resta), aparecen de manera natural, lo que facilita su conceptualización.
d) Desde la relación Parte–Todo se genera un contexto importante a partir del cual se conceptualiza la unidad en sus dos características básicas: tipo de unidad (simple o compuesta) y tipo de magnitud (continua o discreta).

Las anteriores consideraciones permiten formular el problema de investigación en los siguientes términos: *"¿Cómo organizar la enseñanza de los números racionales a partir de la relación Parte–Todo?".*

Metodología

La investigación se realizó con una metodología de investigación didáctica que resultó de enfoques teóricos propios de la didáctica de las matemáticas, fuertemente influenciados por los trabajos de investigadores franceses como Guy Brousseau, Gerard Vergnaud, Régine Douady y Michèle Artigue, entre otros. Las categorías de análisis didáctico, como la teoría de situaciones didácticas y campo conceptual, constituyen, junto con elementos teóricos tomados de la psicología cognitiva, los ejes orientadores de la investigación.

Ésta, como toda investigación enmarcada dentro del campo de la Educación Matemática, es de carácter interdisciplinario. Esto quiere decir, que el problema de investigación se abordó de una manera integrada con aportes de disciplinas como la historia de las matemáticas, en cuanto a un estudio de los aportes de investigaciones que se han realizado en el campo de la evolución histórica del concepto de número racional; la psicología, en cuanto a la psicología cognitiva; las matemáticas, como eje orientador del trabajo; y la didáctica de las matemáticas, como campo de investigación integrador de las diversas disciplinas que intervinieron en el desarrollo del proyecto. A partir de este trabajo interdisciplinario se *identificaron variables didácticas para el diseño de situaciones didácticas cuyo objetivo sea la enseñanza de los números racionales.*

[3] Al respecto Freudenthal (1983) plantea que las fracciones son la fuente fenomenológica del número racional.

Estas variables están relacionadas con el tipo de unidad (simple o compuesta) y magnitud (continua o discreta) sobre la cual se establece la relación Parte–Todo, y una interpretación de la fracción desde la perspectiva de la matemática de las cantidades, y por ende desde las relaciones y operaciones que le dan su sentido numérico.

Resultados Obtenidos

Dos tipos de resultados importantes provienen del estudio histórico-epistemológico y del estudio de la enseñanza usual de los números racionales en el sistema educativo colombiano:

El primero muestra como las prácticas sociales de la medición fueron claves en el proceso de evolución del concepto de número racional a través de la historia de la humanidad, pero además, que la dicotomía continuo–discreto, unidad aritmética – unidad geométrica, número–magnitud constituyeron factores de orden epistemológicos importantes en este proceso de evolución histórica del número racional.

El segundo muestra como en la enseñanza usual de los números racionales se propone un trabajo desde la fracción centrada en actividades de dividir la unidad en partes iguales y separar algunas de las partes en que se ha dividido (la fracción como quebrado). Este tipo de actividades conlleva a una gran cantidad de dificultades en la conceptualización de los alumnos, entre las que se pueden destacar como más importantes:

a) Al poner la atención es actividades de partir y contar, centran la conceptualización en el número natural, y no en la fracción como tal. Esto, por ejemplo, permite explicar el error común de los alumnos al sumar varias fracciones: suman numeradores entre si y denominadores entre si.
b) Como consecuencia directa de lo anterior, dado que las actividades no ponen énfasis en la medición sino en el conteo, la noción de equivalencia queda sustentada en la igualdad física de las partes en que se ha dividido la unidad, lo cual es un significado muy débil para la equivalencia. No es un significado desde relaciones numéricas sino desde acciones físicas.
c) Además, estas actividades centradas en la partición y el conteo, hacen que las fracciones impropias (mayores que la unidad) no tengan mucho sentido para los alumnos.
d) No hay un tratamiento cuidadoso del tipo de unidad ni de magnitud, lo que lleva a que se propongan de manera indiscriminada actividades en contexto de colecciones o magnitudes continuas desconociendo que los procesos de conceptualización de los alumnos son distintos en uno u otro contexto.
e) Marcado énfasis en la mecanización de reglas y algoritmos sin una firme base conceptual que las sustente.

Lo anterior permitió diseñar situaciones que replantearan la enseñanza usual de los números racionales a partir de las fracciones. Las principales características de las situaciones diseñadas son las siguientes:

a) *Que la fracción sea el resultado de una relación cuantitativa entre la parte y el todo*. Esto implica que las situaciones deben rescatar el proceso de medir, y que la fracción debe ser el resultado de comparar los resultados de dicha medición. Por lo tanto la referencia a la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación es fundamental. Por ejemplo, en vez de expresar "¿Qué parte del rectángulo se ha sombreado?" se podría decir: "el área sombreada en la figura, ¿cuánto es del área total de la misma?"
   Nótese cómo la primera pregunta, por demás típica en el trabajo sobre fracciones, no hace referencia ni a la magnitud ni a la cuantificación relativa entre el área sombreada y el área total. Esto es lo que hace que la fracción sea entendida como la etiqueta que se le asigna a una parte de esa área, y que no se entienda la fracción como un número. Por el contrario, en la segunda pregunta, al centrar la atención en la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación, y hacer ver la fracción como una relación entre dos cantidades, permite superar las dificultades antes mencionadas. Así, el concepto de equivalencia, el de

fracciones propias e impropias, al igual que las operaciones aditivas, tendrán un contexto desde el cual se puedan conceptualizar más fácilmente.

Además, cuando se trabaja con objetos físicos es indispensable esta referencia a la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación, pues, por ejemplo, la mitad de la cantidad de frijoles en una libra, puede no pesar media libra. Por otra parte, como se indicó antes, la referencia a la magnitud implica el reconocimiento del carácter relativo de la fracción.

Finalmente, la fuente a través de la cual se dota de significado a la fracción, debe ser ante todo las relaciones y operaciones que le dan sentido numérico. Esto es, se debe realizar un trabajo que permita significar las fracciones, no sobre las propiedades físicas de los objetos con los que se actúa, sino sobre las relaciones cuantitativas establecidas a partir de las mediciones, y fundamentalmente, sobre las composiciones aditivas y multiplicativas que se deriven de estas relaciones cuantitativas. Es decir, dar sentido numérico a la fracción, y por ende al número racional, desde sus propiedades aritméticas.

b) *Que las situaciones planteadas permitan en el alumno el desarrollo de una génesis del concepto a través de la estructuración de un lenguaje matemático, con su respectiva semántica y sintáctica*. Se trata que el diseño de las situaciones no plantee como objetivo central la mecanización de reglas algorítmicas, sino un proceso de construcción conceptual de las relaciones y operaciones básicas para la comprensión de los números fraccionarios, y por lo tanto, un manejo y comprensión significativa de los procesos sintácticos y semánticos involucrados. Desde esta perspectiva las notaciones simbólicas deben necesariamente partir de las utilizadas espontáneamente por el alumno, y a partir de ellas, ir introduciendo paulatina y comprensivamente las notaciones formales.

Se trata de rescatar una perspectiva de trabajo que plantee al alumno la posibilidad no solo de una construcción conceptual, sino también de una construcción sintáctica, en donde cada proceso apoye el otro. Que los procesos sintácticos apoyen la construcción conceptual, y a su vez los procesos conceptuales apoyen los sintácticos.

c) *Tomar en cuenta los aspectos epistemológicos y psicológicos relacionados con el tipo de unidad y de magnitud*. La dicotomía continuo-discreto estuvo presente a lo largo de la historia de las matemáticas y solo fue superada hacia finales del siglo XV con los trabajo de Simon Stevin. Si bien no se puede asumir que los problemas de la historia de las matemáticas se repliquen en al aula de clase, tampoco se puede asumir que ya nuestros alumnos a la edad de 10 - 12 años tengan resuelta esta situación. Una enseñanza de los números racionales que tenga en cuenta esta situación debe considerar las características epistemológicas de lo continuo vs. lo discreto:

Lo continuo	Lo discreto
Divisible infinitamente	Divisible un número finito de veces
Da origen a las unidades geométricas y otras unidades métricas	Da origen a la unidad aritmética
Está relacionado con las magnitudes	Está relacionado con las colecciones
La unidad es divisible infinitamente	La unidad no es divisible

La posibilidad de acercar estas diferencias epistemológicas está dada por la comprensión de la unidad aritmética no como distinta de las unidades geométricas, y tal como nos muestra la historia, esto no sólo tardó un gran período de tiempo, sino que un mediador importante en esta comprensión fueron las prácticas socialmente extendidas de la medición.

Más aún, el problema se torna más profundo cuando a esta dicotomía, de orden epistemológico, se le une otra de orden psicológico: las unidades simples y las unidades compuestas. Esta dicotomía, de alguna manera relacionada con la planteada en los párrafos anteriores, se presenta en tanto que los procesos psicológicos para la conformación de unidades simples no son los mismos que para conformar unidades compuestas.

Por lo tanto las situaciones que se propongan deben fundamentarse sobre unos elementos que involucren estas variables.

d) *Un uso cuidadoso del lenguaje utilizado en la presentación de las situaciones*. Se trata de involucrar en la presentación de las actividades consignas que minimicen la posibilidad de generar confusión conceptual. Así las consignas deber rescatar aspectos tales como: explicitar sobre qué magnitud se realiza la comparación, explicitar que se trata de una relación cuantitativa, no dar instrucciones innecesarias que sugieran al alumno qué debe hacer.

El otro tipo de resultado importante de la investigación lo constituyen las situaciones diseñadas las cuales se tomaron como variables de comando los siguientes elementos:

- ***El tipo de unidad y magnitud***

Con respecto al tipo de unidad, inicialmente se trabaja con unidades simples, lo cual implica tareas en el contexto de las magnitudes continuas. Esta elección se sustenta en que una tarea que implique la conformación de unidades simples es de menor complejidad psicológica que cuando ésta implica la conformación de unidades compuestas. Desde esta perspectiva, las primeras tareas se proponen en un contexto de las longitudes y posteriormente en las áreas.

Este reconocimiento del tipo de unidad como de magnitud hace indispensable la referencia a la matemática de las cantidades, y por lo tanto a considerar en el establecimiento de la relación Parte–Todo la unidad (unidad geométrica) en la cual se miden las cantidades involucradas.

- ***La fracción como relación Parte–Todo***

La Fracción como relación Parte–Todo puede ser definida como una “nueva cantidad” que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como unidad (todo) y otra cantidad tomada como parte. La relación cuantitativa debe ser entendida como una operación mental, realizada por el sujeto, de la cual surge una nueva cantidad.

Dos variables fundamentales que diferencian cada una de las distintas situaciones problema que se pueden proponer desde la relación Parte–Todo, corresponden a la naturaleza de la unidad y al tipo de cantidad sobre el cual se establezca la comparación. Por lo tanto, la unidad puede ser simple o compuesta, y las cantidades continuas o discretas.

- ***La fracción como una composición aditiva***

Otra variable fundamental está determinada por la escogencia de la interpretación de la fracción a partir de la composición aditiva, sobre la interpretación de la fracción como una partición. Esto se logra, en primera instancia, a partir de unas actividades que centran la reflexión en procesos de medición, y que, por tanto, hacen ver la fracción como una relación cuantitativa entre cantidades, a la vez que se enfatiza el carácter relativo de la fracción; y en segunda instancia, a través de actividades que presenten la conceptualización de la fracción a partir de procesos aditivos. Esto es, se plantea una conceptualización de la fracción a partir de las operaciones que le dan sentido numérico.

Lo anterior implica que sea necesario trabajar las fracciones unitarias (es decir, de la forma $^{1}/_{n}$) antes de trabajar las no unitarias (es decir aquellas de la forma $^{m}/_{n}$), dado que las no unitarias pueden ser interpretadas como **m veces** $^{1}/_{n}$ (fundamentalmente como una composición aditiva). Ahora bien, la fracción unitaria $^{1}/_{n}$ es interpretada como una longitud que está contenida **n veces** en la unidad. Nótese que en ningún momento se habla de partir y tomar, sino de medir y comparar. Por lo tanto, establecer la relación Parte–Todo implica un juego constante entre la unidad aritmética (el uno, el todo) y la unidad geométrica (aquello con que se mide).

Un tercer grupo de resultados corresponden a los procesos de conceptualización de los alumnos:

- los alumnos en la medida que avanzaron en el trabajo propuesto fueron estructurando dos conceptos en acto fundamentales: ***A*** **=** $^{1}/_{n}$ ***B*** *si* ***A*** *está contenida* ***n*** *veces en* ***B***; y $^{m}/_{n}$ es $^{1}/_{n} + {}^{1}/_{n} + \ldots + {}^{1}/_{n}$, suma con **m** sumandos, (de lo cual se desprende que $^{m}/_{n}$ ***es m veces*** $^{1}/_{n}$). El status de conceptos en acto se les confiere en tanto que estos son una serie de conceptualizaciones ligadas a las acciones realizadas en las actividades desarrolladas, y que se van constituyendo en esquemas que organizan los desempeños de los alumnos, alcanzando cada vez mayores grados de generalización y de abstracción. Estos dos conceptos son fundamentales para la conceptualización de las fracciones impropias y de la suma entre fracciones.

  Nótese como en el primero de los conceptos en acto, el juego entre la unidad aritmética y la unidad geométrica se constituye en un elemento fundamental, en tanto que la fracción es conceptualizada a partir de una relación métrica entre dos magnitudes, lo que implica asumir a una magnitud como unidad geométrica en un momento determinado proceso, mientras que la otra es asumida como unidad aritmética en otro momento del mismo proceso.

  Por su parte, en el segundo de los conceptos en acto, la fracción es asumida como una nueva unidad la cual puede ser iterada para formar nuevas fracciones. Desde este concepto en acto la suma de fracciones homogéneas es interpretada como conteo de fracciones. Se cuentan medios, tercios, cuartos, etc., y por lo tanto, se obtienen medios, tercios, cuartos, etc. Esto pone fuera de lugar el error muy frecuente en los alumnos que consiste en sumar numeradores entre sí y denominadores entre sí. Lo anterior se logra gracias a que sumar una fracción a otra es cuestión de agregar a una cantidad otra cantidad, obteniéndose una nueva cantidad de la misma naturaleza de las dos sumadas. Esta manera de aproximarse a las fracciones permitió una fácil conceptualización de las fracciones impropias siguiendo la vía de las composiciones, fundamentalmente aditivas. Esto debido a que como el trabajo estaba centrado en la medición, entonces existían parámetros claros que permitían determinar con **n** veces la fracción $^{1}/_{n}$ se completa una unidad. Por lo tanto al tener una referencia clara para determinar la unidad, queda igualmente claro cuando una fracción es mayor que la unidad.

- Las actividades realizadas permitieron a los alumnos la construcción de un tercer concepto en acto relacionado con la equivalencia entre fracciones: $^{m}/_{n}$ es equivalente a $^{a}/_{b}$ si $^{1}/_{b}$ está contenida ***k*** veces en $^{1}/_{n}$ y $a = k \times m$, (es decir, si $^{1}/_{n}$ es ***k*** veces $^{1}/_{b}$ entonces $^{m}/_{n}$ es igual a $^{(k \times m)}/_{b}$). Nótese como esta manera de encontrar las equivalencias entre fracciones se fundamenta en la comparación entre fracciones y en cierta forma recurre al principio de una fracción que divide a otra un número exacto de veces. Este hecho es clave para la realización de las sumas de fracciones heterogéneas, y además es distinto del usado convencionalmente, el cual se fundamenta en la multiplicación por la unidad, y no recurre a la comparación entre las fracciones.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en los procesos de conceptualización de los alumnos muestran la importancia de recuperar para la enseñanza de los números racionales los aspectos relacionados con la medida, el tipo de cantidades y la unidad. Un trabajo desde la fracción como relación parte-todo, fundamentado en los tres aspectos antes señalados, permitieron desarrollar en los alumnos procesos de aprendizaje constructivos y autónomos, en lo relativo las relaciones de orden, equivalencia, y la operación aditiva en los números racionales. Pero de otra parte, la investigación también mostró la debilidad que hay desde esta perspectiva de las fracciones como relación parte todo para conceptualizar los aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales. Esta es pues una línea abierta para nuevas investigaciones.

Referencias bibliográficas

BEHR, Merlyn J.; HAREL, Guerson. *The construct theory of rational numbers: toward a semantic analysis*. In proceedings fourteenth PME conference (July 15-20 of 1990). International Group for the psychology of mathematics education. Mexico. 1990. Pgs. 3-10.

BEHR, Merlyn J.; HAREL, Guerson; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A.. *Rational number, ratio, and proportion*. Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teacher of Mathematics. Douglas A. Grouws (Editor). USA: Macmillan Publishing Company. 1992. Pgs 296-333..

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.. *Proportional reasoning*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 93-118.

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A.. *Concepto de numero racional*. Traduccion realizada por Ramiro Tobon y Mariela Orozco. Tomado de: Rational-Number Concepts. en Acquisitions of mathematics concepts and processes. Richard Lesh and Marsha Landau (eds.). New York: Academic Press. 1983. Pgs. 91-126.

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A.. *Rational-Number Concepts*. In Acquisitions of mathematics concepts and processes. Richard Lesh and Marsha Landau (eds.). New York: Academic Press. 1983. Pgs. 91-126.

DIENES, Z. P.. *Fracciones*. Traduccion de D. Bergada. Barcelona: Editorial Teide. 1967. P 250.

DHOMBRES, Jean; DAHAM-DALMEDICO, Amy; BKOUCHE, Rudolf; y otros. *Mathematiques au fil des ages*. DHOMBRES, jean; DAHAM-DALMEDICO, Amy; BKOUCHE, Rudolf; y otros. IREM Groupe epistemologie et historie. Paris: Gauthier-Villars. 1987. P 327.

HART, Kathleen. *Ratio and proportion*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 198-219.

LESH, Richard; POST, Tom and BEHR, Merlyn. *Rational number relations and proportions*. In Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. JANVIER, Claude (ed.). London: Lawrence Erlbaun Associates, Inc., Publisher. 1987. Pgs 41-58.

LESH, Richard; POST, Tom and BEHR, Merlyn. *Representations and translation among representation in mathematics learning and problem solving*. In Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. JANVIER, Claude (ed.). London: Lawrence Erlbaun Associates, Inc., Publisher. 1987. Pgs 33-40.

LLINARIS CISCAR, salvador; SANCHEZ GARCIA, María V.. *Fracciones*. Madrid: Editorial Síntesis. 1988.

MANCERA MARTINEZ, Eduardo. *Significados y significantes relativos a las fracciones*. Educación Matemática. Vol 4. Nro 2. 1992.

MORENO A., Luis Enrique. *En torno a las nociones de numero y variación*. Mathesis. Vol VII. No 2. Mayo de 1991. Pgs 189-204.

OHLSSON, Stellan. *Mathematical meaning and aplicational meaning in the semantics of fractions and related concepts*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 52-92.

ROMERO C. Jaime. *la enseñanza de los números fraccionarios. una opción.*. Planteamientos en educación. Vol 1. Nro 3. 1992. Pgs. 95-107.

SCHWARTZ, Judah L.. *Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 93-118.

VASCO U., Carlos E.. *El archipiélago fraccionario*.

VERGNAUD, Gerard. *Multiplicative Structures*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 141-146.

VERGNAUD, Gerard. *La teoría de los campos conceptuales*. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1994. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3. 1990. Pgs. 133-170.

Aprendizaje de la Estadística por medio del estudio de casos

Bach. Freddy Araya Rodríguez
Profesor Adjunto del Área Matemática
Lic. Adolfo Chaves Campos
Profesor Asociado del Área de Química
Instituto Tecnológico de Costa Rica
rjimenez@microtek.co.cr

Resumen

El presente trabajo trata de exponer una serie de experiencias llevadas acabo en el Colegio Científico Costarricense, Sede Santa Clara en el campus del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Sede San Carlos, en forma integrada en las disciplinas de: Matemática, Química, Biología, Física y Ciencias Sociales, con las cuales se busca que los estudiantes logren interiorizar los conceptos básicos de estadística, mediante la recolección, tabulación, organización y análisis de datos obtenidos a través de mediciones de parámetros físicos, químicos, biológicos y sociales; en el desarrollo de proyectos de campo, cuyo objetivo es el estudio de áreas de gran importancia nacional desde el punto de vista ambiental y el manejo de recursos naturales, en parques nacionales, refugios de vida silvestre, reservas forestales y otros.

Propuesta

Se propone que esta experiencia sirva para reproducir actividades similares a nivel de enseñanza primaria y secundaria para la adquisición de los conocimientos estadísticos, en forma aplicada, por parte de los estudiantes.

Antecedentes

Estudios realizados por el Ministerio de Educación Pública en los últimos años arrojan una cifra importante: el 6% de los niños del país son, en algún aspecto esencial, talentosos. En cierto modo estos talentos se estaban desperdiciando mientras no se concibiera una educación adecuada a sus necesidades.

Debido a esto y como un esfuerzo ministerial por mejorar la calidad de la educación y de desarrollar la ciencia y la tecnología, sin dejar a un lado su contenido pedagógico, surge la creación en 1989 de los Colegios Científicos

Costarricenses (CCC), que dan atención especial a los jóvenes interesados en las ciencias exactas y naturales, lo cual constituye un paso para el desarrollo científico y tecnológico de la nación de cara al siglo XXI.

Por medio de una ley que autoriza al Ministerio de Educación Pública para que suscriba convenios con las instituciones de Educación Superior estatal para la fundación de CCC. Asimismo, fijan como objetivo central de los CCC: **"La formación integral de sus estudiantes, considerando los más altos valores costarricenses en el marco de un proceso educativo, con énfasis en la adquisición de conocimientos sólidos y habilidades en los fundamentos de matemática, física, química, biología y informática"**.

En virtud de que el MEP, UCR y ITCR tienen entre sus objetivos el mejoramiento de la enseñanza en Costa Rica y el facilitarle al país el acceso a las nuevas tecnologías científicas; dicho acceso a estas tecnologías contemporáneos, requiere de una excelente preparación científica y matemática de los jóvenes con más capacidad y con más interés en las ciencias exactas, solamente realizable si éstas instituciones trabajan de común acuerdo y realizan juntas un esfuerzo coordinado de participación.

Las Actividades Científicas:

- **Laboratorio de Física - matemática:** experimentos complementarios a la teoría impartida con la utilización de instrumentos propios de un laboratorio de física: equipo de acústica, electricidad, sólidos, fluidos, cuerpos en movimiento y otros.

- **Laboratorio de Biología:** complemento experimental del curso de biología empleando cristalería, microscopios (de contraste de fases, estereoscopios y con cámara de vídeo), tuberías de agua y gas, extractores de gas, fregaderos, mesas de trabajo grupal, equipo, reactivos, balanzas granatarias, autoclaves, hornos, refrigeradores y otros instrumentos.

- **Laboratorio de Química:** cuenta con el más diverso equipo para realizar prácticas de laboratorio. Dentro de la utilería se incluye: cristalería, mecheros, tuberías de agua y gas, extractores de gas, fregaderos, mesas de trabajo grupal, refrigeradores, equipo, reactivos, balanzas granatarias y analíticas y otros instrumentos.

- **Laboratorios de informática:** cuenta con dos laboratorios de acceso libre, en los que existen ordenadores para realizar diversos actividades, además de un centro de acceso a Internet.

- **Laboratorio de Biotecnología de Plantas:** Es el único en toda la región donde los estudiantes profundizan en el área biotecnológica. Algunas de las actividades de frecuente ejecución en el mismo incluyen, la propagación in vitro de plantas, la preparación de medios y el adiestramiento en materia de conocimientos básicos del cultivo de tejidos. El equipo disponible es de gran modernidad e incluye un sistema de aire acondicionado, dos cámaras de flujo laminar (para realizar cultivos en condiciones asépticas), desionizador y destilador de agua, microscopio con cámara fotográfica, cámara de frío y cuarto de crecimiento.

- **Laboratorio de Edafología:** dispone del equipo necesario para tomar y analizar muestras de suelo. Está en capacidad de producir agroquímicos y abono orgánico.

- **Laboratorio de Entomología:** existe el equipo necesario para la captura de insectos y la identificación de los mismos. Permanentemente se exhiben colecciones de insectos.

- **Laboratorio de Patología:** realiza análisis de muestras de rumen de bovinos y otros animales.

- **Laboratorio de Semillas Forestales:** estudia y cultiva diferentes especies de plantas, especialmente arbóreas.

Mediante la utilización de los diferentes laboratorios a que tienen acceso los estudiantes se han llevado diferentes investigaciones donde se integra la estadística como una herramienta fundamental para el análisis de los datos obtenidos en la experimentación, algunos de los premios obtenidos por los estudiante en la feria nacional de ciencia y tecnología (Expociencia) son :

1993
Título**:** Influencia de la lluvia ácida en la fauna bromelícola.
Premio**:** II Lugar Décimo Año.

Título**:** Evaluación de dietas con desecho de matadero para la alimentación de caimanes en cultivo intensivo.
Premio: Proyecto Más Creativo.

1994
Título**:** Influencia de la lluvia ácida en la germinación de semillas.
Premio**:** II Lugar General.

Título**:** Evaluación de las condiciones de laboratorio para la eclosión de pez gaspar.
Premio**:** III Lugar a Nivel General.

Título**:** Evaluación del contenido de Vainilla en cinco introducciones de vainilla (*Planifolia fragans*).

***Premio*: III Lugar a nivel de undécimos Años y Mejor Proyecto de Química.

1995

***Título*:** Micropropagación clonal del Cardomomo.
***Premio*:** I Lugar a Nivel General.

***Título*:** Evaluación de la respuesta del plátano curraré (MUSA AAB) a diferentes dosis de benziladenina.
***Premio*:** II Lugar a Nivel General.

***Título*:** Análisis del control de calidad de algunos productos de consumo popular en Costa Rica.
***Premio*:** VII Lugar a Nivel General.

***Título*:** Determinación del grado de contaminación del Río Platanar en la cuenca del Río San Carlos.
***Premio*:** I Lugar a Nivel de Undécimo Año.

***Título*:** Análisis Físico – Químico del Río Celeste y dos de sus afluentes (Río Roble y Quebrada Amarga) San Carlos, Costa Rica.
***Premio*:** II Lugar a Nivel de Undécimo Año.

***Título*:** Análisis biológico y químico de las Cavernas de Venado.
***Premio*:** III Lugar a Nivel de Undécimo Año.

1996

***Título*:** Análisis físico, químico, microbiológico y de fauna bentónica del río Peje.
***Premio*:** III Lugar a Nivel de Undécimo Año.

***Título*:** Producción de alcaloides en raicilla.
***Premio*:** II Lugar a Nivel de Undécimo Año.

***Título*:** Efecto del fotoperíodo en la micropropagación de la zarzaparrilla.
***Premio*:** III Lugar a Nivel General.

1997

***Título*:** Embriogénesis somática y determinación de cuasinoides en hombre grande .
***Premio*:** I Lugar a Nivel de Undécimo Año.

***Título*:** Determinación de saponinas en raíces de zarzaparrilla producidas in vitro.
***Premio*:** I Lugar General de Secundaria.

1998

Título: Efecto del fotoperíodo en la transformación de meristemos radicales en meristemos del brote de vainilla (*Vainilla planifolia).*
Premio: II Lugar General de Secundaria

Título: Efecto de gelificante sobre la respuesta morfológica de ápices de la orquídea Turrialba (*Cattleya dowiana*) cultivados *in vitro.*
***Premio**:* III Lugar General de Secundaria

Título:Efecto del gelificante sobre la respuesta morfológica de ápices de Guaria morada (*Cattleya skinneri*) cultivada *in vitro.*
Premio: Innovación Científica

1999

Título: Caracterización de la semilla Amaranto (Amaranthus crudentes)
Premio: Mejor Proyecto Décimo Primer Año.

Título: Análisis de la viabilidad en la aplicación de nitratos a lagunas de oxidación, en vías de crear una nueva posibilidad de tratamiento de desechos que eliminen los malos olores.
Premio: Innovación Tecnológica.

Justificación

A pesar de que uno de los insumos más valiosos para el desarrollo económico y social en la presente época descansa en el conocimiento, por razones históricas, los países latinoamericanos nos encontramos en evidente desventaja con las potencias desarrolladas. Esta diferencia no parece resolverse, si no, que se incrementa dramáticamente, ante lo cual al sistema educativo debe de reaccionar con propuestas que en la práctica produzcan resultados convincentes, que reviertan esta situación y nos coloquen en posición de lograr mejores condiciones, que se puedan reflejar en la calidad de vida de nuestros ciudadanos.

Al respecto son muy claros los siguientes datos, referidos al periodo 1973 – 1984 por parte del Banco Interamericano de Desarrollo:

- "América Latina contribuye con apenas el 1% del total de publicaciones científicas en el mundo, es decir, de un promedio anual de 279 000 artículos la región aporta solo aproximadamente 2800.
- La producción es menor a la capacidad de investigadores disponibles. A esta conclusión podríamos llamarle "ineficiencia". Aunque la contribución de América Latina para el período estudiado fue del 1%, su disponibilidad de investigación era del 2,4 % del total mundial, es decir, más del doble de su producción.
- La contribución latinoamericana se concentra en cinco países: Brasil, Argentina, México, Chile y Venezuela.
- La publicación científica de la región se concentra en cinco áreas, entre las cuales no están las Ingenierías y Tecnologías.

Las Implicaciones para los países en desarrollo son claras: tienen que invertir tanto en capital humano como en niveles de tecnología más altos. Sino lo hacen, es posible que el capital se traslade aún más rápidamente de los países pobres a los ricos." (Jofre, A. 1994)

El sistema educativo debe de asumir con responsabilidad el reto que representa formar individuos capaces de enfrentar con éxito las tareas que imponen las circunstancias actuales, lo cual necesariamente implica una educación que propicie cada vez más la producción que el consumo de conocimientos. En este sentido el Dr. Carlos Tünnermann el citar el texto " América Latina y el Desafió del Tercer Milenio" de la Dra. Ines Aguerrondo concluye "Un sistema educativo orientado hacia las necesidades del siglo XXI, debe incorporar una definición de aprendizaje como el resultado de la construcción activa del sujeto sobre el objeto de aprendizaje. Supone un aprendiz activo, que desarrolla hipótesis propias acerca de cómo funciona el mundo, que deben ser puestas a prueba permanentemente. Supone la generación de operaciones mentales y procedimientos prácticos que permitan seguir aprendiendo solo una vez que se egresó del sistema educativo formal. Supone también que el maestro y el alumno exploran y aprenden juntos" (Tünnermann, 1999)

Desarrollo

Para el diseño de las actividades de investigación en el C.C.C. se reúnen los profesores de las áreas de Física, Química, Biología y Ciencias Sociales; determinan el tema y lugar del estudio por realizar. En el desarrollo de los cursos se relacionan los contenidos de los diferentes programas con los temas para investigar, para que el estudiante este en capacidad de: Plantear, ejecutar y analizar la información obtenida, esto se considera la primera etapa que se desarrolla en el I – Semestre del año lectivo.

En el caso del curso de estadística se desarrolla la metodología para la recolección, organización y análisis de los datos, utilizando diferentes software estadísticos.
Ejemplo : Trabajos realizados por estudiantes:

A continuación se muestra una cuantificación de especies de bentos, producto de otras investigaciones.

Fecha de muestreo: 08 – 06 – 1999

Tipo	Muestras						
	1	[redacted]	**3**	[redacted]	**5**	[redacted]	**7**
O. Trichoptera	4a	2a	3a	1a	1a		1a
O. Ephemeroptera	2a 1c	4a 3c	2a 2c		9a 1c	2a 1b	1a 2b
O. Odonata	2b			1b		2b	2b
O. Megaloptera	2a						
O. Coleoptera		3a 8b	5b		1a 1b		
O. Hemiptera		1a	2a	2c	8a	2c	
O. Oligochaeta			1a		1b		
O. Diptera							1a
C. Crustácea							2b

O: Orden
C: Clase

Cuadro 1: Resultados obtenidos en los análisis de la planta del Amaranto (*Amaranthus crudentus*) cultivada en Costa Rica; realizados en el Laboratorio de Química del Instituto Tecnológico de Costa Rica, sede San Carlos, desde marzo a octubre de 1999.

Componente	Contenido (%)
Proteínas	33.35
Lípidos	7.40
Carbohidratos	27.52
Cenizas	13.88
Fibra bruta	6.86
Humedad	12.31
Numero de semillas por kg	1856148
Valor calórico	303.2 Kcal por 100g

Finalizando el primer semestre se realiza una gira de trabajo en la que en conjunto con los estudiantes y los profesores de las áreas involucradas, se hace el estudio de campo el cual comprende de tres a cinco días de trabajo.

Al finalizar esta etapa los estudiantes presentan un informe previo, en la comunidad donde se realizo el proyecto, ante la comunidad, profesores asesores e interesados en el tema. Posterior a esto en el segundo semestre se elabora un informe, más riguroso el cual pasa a los archivos del colegio, biblioteca y de acuerdo a la valoración de los profesores se envía a participar en la Feria Científica Nacional para que los estudiantes den a conocer los resultados obtenidos.

Es apartir de esta experiencia que los estudiantes en grupo y en forma independiente plantean nuevos proyectos de investigación que obedecen a sus intereses y a las necesidades de la zona donde se encuentra ubicado el colegio. (En el apartado de antecedentes se detallan algunos de los proyectos que han logrado premios en la feria científica Nacional)

Propuesta

Se propone que esta experiencia sirva para reproducir actividades similares a nivel de enseñanza primaria y secundaria para la adquisición de los conocimientos estadísticos, en forma aplicada, por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Memoria de Colegio Científico, Sede San Carlos. Primera Edición, Editado en Colegio Científico San Carlos, 1998.

Jofre, Arturo. *La universidad en América Latina: desafíos y estrategias para las próximas décadas*. Primera Edición, Editorial Tecnológica de Costa Rica. 1994

Tünnermann, Carlos. *Educación Superior de cara al siglo XXI*. Primera Edición. Editorial Mirambell, San José, Costa Rica, 1999.

Estándares para la Educación Primaria en Centroamérica.

Jenny Oviedo de Valerio
Universidad Internacional Siglo XXI
Costa Rica

Introducción

El proyecto "Establecimiento de Estándares para la Educación Primaria en Centroamérica"[4] fue una iniciativa de la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC, financiado por la Organización de Estados Iberoamericanos, O.E.I. y constituye un esfuerzo más de estas organizaciones y de los ministerios de educación de Centroamérica para fortalecer sus programas de mejoramiento de la calidad de la Educación Primaria. Con el establecimiento de estándares se espera que se tome conciencia, por parte de educadores y de la sociedad en general, que una educación de calidad no se puede lograr sin claridad y objetividad en las metas que se quieren alcanzar.

Este proyecto fue coordinado por un equipo central de especialistas en cada una de las tres asignaturas, cuyo consultor fue el Dr. Juan Manuel Esquivel y cuyo coordinador fue el Lic. Marvin Herrera. En este trabajo nos referiremos particularmente, a la parte del proyecto relativa a los estándares en matemáticas para la Educación Primaria Centroamericana. La autora de este resumen, formó parte del equipo central del proyecto como especialista en matemáticas y tuvo a su cargo, con la colaboración de otros especialistas en esta materia, la definición de estos últimos estándares.

Es conocido, que los estándares se originaron en el área de la industria, en respuesta a cambios en la tecnología y son especificaciones de requerimientos para asegurar la calidad en la producción industrial. Actualmente existen estándares en todos los órdenes de la vida diaria, en la construcción, en la seguridad industrial, en la salud, en las telecomunicaciones, en el comercio, en la economía. Los estándares tienen la particularidad de que se pueden cambiar y mejorar con el propósito de elevar la calidad de vida de los ciudadanos.

Orígenes del establecimiento de estándares en educación

El movimiento para el establecimiento de estándares se inicia en Estados Unidos. Esquivel (1999), afirma, que dos hechos políticos marcan el inicio de este movimiento. Primero, al inicio de los años 80, el gobierno federal asumió como política nacional, que el sistema escolar rindiera cuentas sobre los logros educativos. El informe "Una Nación en Riesgo" (1983) de la Comisión Nacional sobre Excelencia en Educación había puesto en claro las deficiencias de la educación de ese país y se buscaba lograr consensos sobre lo que los estudiantes de la educación básica y media debían aprender en términos de conocimientos, habilidades y destrezas (Burger (1997); Marzano y Kendall (1997). En 1990, el presidente Bush anuncia las metas educativas nacionales par el año 2000, las cuales son el producto político de la “Cumbre sobre Educación" de los gobernadores de los estados de la Unión, realizada en Virginia en 1989. En marzo de 1994, el presidente Clinton firmó la ley Metas 2000, legislación que estable las bases para que se definieran estándares educativos nacionales y programas de medición igualmente nacionales. En segundo lugar, los resultados del Programa Nacional de Medición del Progreso Educativo (NAEP) y de los estudios internacionales de medición, como el TIMSS (Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias), señalaron un pobre desempeño de los estudiantes estadounidenses en estas materias. Además, la existencia de una enorme cantidad de currículos con metas disímiles marcó la pauta para promover el establecimiento de estándares nacionales.

[4] La autora de este resumen participó en este proyecto bajo un contrato profesional con la CEEC como especialista en matemáticas,

En Latinoamérica y en particular en Centroamérica, la necesidad del establecimiento de estándares es notoria, dada que la calidad de la educación ha sido repetidamente cuestionada. Por ejemplo, Puryear (1997), establece cinco indicadores que sugieren el problema de la baja calidad de la educación en América Latina,

I) El gasto promedio por estudiante está por debajo del mismo en los países industrializados. 2) Las tasas de repetición son altas. 3) Las tasas de estudios completos son bajas. 4) Los puntajes en las pruebas, en los pocos estudios comparativos que existen, son bajos. 5) El rendimiento en ciencia y tecnología es débil.

Por otra parte, Diálogo Interamericano y la Corporación de Investigaciones para el Desarrollo, CINDE (1997) establecieron la Comisión Internacional sobre Educación, Equidad y Competitividad Económica, que señaló tres indicadores de la crisis educacional de la región: 1) Bajos puntajes en las pruebas producto de los estudios internacionales. 2) Bajo nivel educacional de los estudiantes que ingresan a la fuerza laboral. 3) Falta de equidad entre escuelas privadas y públicas y entre escuelas rurales y urbanas.

Esta comisión propone cuatro recomendaciones claves a los gobiernos, educadores, comunidad empresarial, líderes políticos, padres de familia y organismos internacionales:

1. Establecer estándares para el sistema de educación y medir el avance en su cumplimiento.
2. Introducir pruebas a nivel nacional.
3. Utilizar los resultados para corregir los programas y reasignar recursos.
4. Participar en pruebas a nivel internacional para comparar la calidad de sus escuelas con las de otros países.

La primera de las recomendaciones refuerza el argumento en pro del establecimiento de estándares de calidad para la educación centroamericana. La preparación de los ciudadanos competitivos está a cargo mayoritariamente, de la educación pública, por ello deben los gobiernos ofrecer una educación de la más alta calidad posible y la definición de estándares de calidad es un elemento fundamental para alcanzar la más alta calidad posible.

En Centroamérica, el establecimiento de estándares nacionales en educación tiene un antecedente: el Ministerio de Educación de Nicaragua inició, a mediados de 1998, un proyecto nacional de establecimiento de estándares que es un importante antecedente de este Proyecto Centroamericano, promovido por la CECC con fondos de la OEI

LOS ESTÁNDARES EN LA EDUCACIÓN

En los países que logran altos rendimientos en sus estudiantes se distinguen en especial porque establecen altas exigencias para sus estudiantes y porque tienen un currículo que concentra el esfuerzo en lograr conocimientos significativos con mayor profundidad. Esas altas expectativas son estándares compartidos por la comunidad educativa y por la sociedad en general.

Se puede decir que un **estándar** es una meta posible de medir y por lo tanto, es posible conocer si se logra o no.

Un **estándar de contenido** o **estándar curricular** describe lo que los maestros deben enseñar y lo que los estudiantes se espera deben aprender. (Ravitch, 1995). Son descripciones claras y precisas de los conocimientos y habilidades cognoscitivas que deben ser enseñadas a los estudiantes. En estas definiciones, los conocimientos son las ideas, conceptos, dilemas e información más importantes de la disciplina y las habilidades cognosctivas "incluyen las formas de pensar, trabajar, comunicarse, razonar e investigar que caracterizan cada disciplina" (National Education Goals Panel, 1993).

Según Esquivel (1998) la importancia del establecimiento de estándares en educación radica en los siguientes aspectos:

1) Permiten a los estudiantes, profesores, padres de familia y a la sociedad conocer claramente qué es lo que se espera que los estudiantes aprendan en la escuela.
2) Sirven para orientar las reformas de las pruebas que se aplican a los estudiantes, de los textos de estudios, del currículo y de la formación y capacitación de los educadores.
3) Cumplen una función coordinadora de las diferentes áreas del sistema educativo, pues logran que los diferentes elementos del sistema se centren en la misma meta, ayudar a que los alumnos logren los estándares.
4) Son necesarios para ofrecer igualdad de oportunidades, pues en su establecimiento está implícito el principio de que todos los estudiantes deben contar con las mismas oportunidades de aprender.

Por otra parte, como se afirma en el Informe Regional sobre este proyecto (1999): "En un sistema educativo la definición de estándares tiene implicaciones para la enseñanza. En ella los estándares determinan lo que será enseñado. Cuando esta información es compartida, dejando de lado toda sorpresa, los estudiantes satisfacen el estándar o lo sobrepasan. Se considera que todos los estudiantes pueden alcanzarlos, si se les da el tiempo y la instrucción adecuada. Los estándares, aunque ofrecen la guía general para la enseñanza de qué y el cuánto, no pretenden de ninguna manera señalar la forma de llevar a cabo dicha tarea; es decir no están comprometidos con el cómo (métodos o técnicas de enseñanza). No se debe pretender que los estándares sean una guía metodológica."

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA EMPLEADA EN EL PROYECTO

"Establecimiento de Estándares para la Educación Primaria en Centroamérica"

Objetivos Generales:

1 Establecer estándares nacionales de contenido y desempeño y estándares de ejecución para la Educación Primaria en cada uno de los países del área.

2 Establecer estándares regionales (centroamericanos) de contenido y desempeño y estándares de ejecución para la Educación Primaria Centroamericana.

Objetivos Específicos:

1 Definir estándares de contenido y desempeño para todos los grados de la Educación Primaria, en Matemáticas, Español y Ciencias Naturales, en cada uno de los países del área.
2 Definir estándares de ejecución y niveles de logro marcado para cada uno de los grados de la Educación Primaria, en Matemáticas, Español y Ciencias Naturales, en cada uno de los países del área.
3 Instaurar estándares de contenido y desempeño para todos los grados de la Educación Primaria Centroamericana, en las mismas asignaturas.
4 Instaurar Estándares de ejecución y niveles de logro marcado para cada uno de los grados de la Educación Primaria Centroamericana, en las mismas asignaturas.

Criterios para la definición de los estándares:

En este proyecto se siguieron los siguientes criterios para definir los estándares para la Educación Primaria:

1 Los estándares deben centrarse en lo académico.
2 Los estándares deben centrarse en las disciplinas (para cada una individualmente).
3 Deben fomentar que todos los estudiantes estén expuestos a un currículo básico común, de alta exigencia. (sin importar su condición social, económica, etnia o sexo).
4 Deben ser realistas con el tiempo disponible para la enseñanza.
5 Deben ser rigurosos y tener como marco de referencia estándares internacionales de calidad.
6 Deben incluir niveles múltiples de ejecución.

7 Deben combinar conocimientos y destrezas, pero no deben privilegiar unos a expensas de los otros. (deben mostrar un equilibrio entre conocimientos y destrezas).
8 No deben cumplir una función didáctica.
9 Deben ser escritos con claridad tal que permita que todos los interesados en la educación los entiendan.
10 Los estándares deben ser el resultado de un proceso interactivo de comentarios, retroalimentación y revisión que considere la opinión de los educadores y de toda la sociedad, y que refleje un consenso amplio.
11 Pueden basarse en el currículo oficial, pero no deben estar limitados a este currículo.

Metodología:

A) En primer lugar, presentamos las definiciones conceptuales y operacionales de los principales productos del proyecto (tomadas del Informe Regional Centroamericano):

Definiciones Conceptuales:

Esquemas curriculares:

Es un sistema de categorías y subcategorías que resumen el contenido curricular establecido en los planes y programas. Tiene tres dimensiones: a) El contenido de la materia. b) Las expectativas de desempeño. c) Las perspectivas.

- Contenido de la materia: está constituido por la información de la disciplina.
- Las expectativas de desempeño son las descripciones de las ejecuciones o conductas que se espera los estudiantes realicen con base en los contenidos. Son las habilidades y destrezas que se espera domine el estudiante. Debe haber una correspondencia entre a) y b), es decir, a cada contenido de la materia se le debe hacer corresponder una expectativa de desempeño.
- Las perspectivas están constituidas por las actitudes, intereses y motivaciones que el curriculum pretende promover. (En este proyecto no se trabajó este aspecto).

Metas:

Son las categorías y subcategorías de los esquemas de expectativas de desempeño que se señalan como deseables y que se espera sean alcanzables por los estudiantes. (McKnight, 1996).

Estándar de contenido y desempeño:

Es un enunciado que provee descripciones claras y específicas de las habilidades y conocimientos que los estudiantes deben lograr. (Ravitch, 1995)

Estándar de ejecución:

Enunciados en los que se definen los diferentes niveles de logro de los estándares de contenido y desempeño. (Ravitch, 1995, y Lewis, 1995)

Nivel de logro marcado: Es el o los niveles de logro que se determinen como importantes.

Definiciones Operacionales:

Esquemas curriculares:

En este proyecto, los esquemas curriculares se definen como determinaciones de las categorías y subcategorías correspondientes a los contenidos de la materia y expectativas de desempeño. Separadamente, se elaboran esquemas de contenido y esquemas de expectativas de desempeño. Las categorías, en los primeros, indican conceptos generales de la disciplina, en los segundos, son las habilidades cognoscitivas necesarias para el procesamiento de los contenidos de la disciplina. Las subcategorías son conceptos o habilidades de menor generalidad que las categorías y están supeditadas a esta.

Metas:

Del conjunto total de categorías y subcategorías de los esquemas de expectativas de desempeño elaborados y validados, se seleccionan categorías y subcategorías para que se conviertan en los estándares de contenido y desempeño de una asignatura y grado.

Estándar de contenido y desempeño:

Es un enunciado que está compuesto por uno o más verbos activos que denotan habilidades cognoscitivas generales, derivan de las categorías de los esquemas de las expectativas de desempeño. Estas habilidades incorporan el contenido establecido en los esquemas de contenido.

Estándar de ejecución:

Es un enunciado que establece los logros específicos para cada uno de los estándares de contenido y desempeño definidos. Existen numerosos estándares de ejecución y niveles de logro marcado, para cada uno de los estándares de contenido y desempeño.

B) Etapas en la elaboración de los estándares centroamericanos:

A continuación se describen las etapas utilizadas en la elaboración de los estándares centroamericanos, la elaboración de los estándares para cada uno de los países siguió un modelo semejante.

Primera Etapa:

1 Selección y análisis de las fuentes para definir los esquemas curriculares ,centroamericanos. Se utilizaron los carteles de alcance y secuencia y los esquemas curriculares de cada país y por supuesto intervino en esta elaboración el conocimiento sobre la estructura teórica de la materia de cada especialista y sus colaboradores.

2 Selección de los Esquemas de Contenido y de estos se derivaron los respectivos Esquemas de Expectativas de Desempeño, a cargo del especialista del Equipo Central con la colaboración de especialistas nacionales. Se organizaron en 37 categorías, las cuales a su vez constan de varias subcategorías. En la validación se reducen a 35 .

3 Validación de los esquemas de expectativas de desempeño por cinco jueces especialistas, así, se convierten en los Esquemas de Contenido y Desempeño. La selección de los jueces en esta etapa, fue de importancia fundamental, pues con su experiencia y dominio de la materia enriquecieron y aportaron importantes puntos de vista en el enfoque y selección de los esquemas y posteriormente de los estándares.

Segunda Etapa:

4 Escogencia de las metas y submetas, a cargo del especialista del Equipo Central y sus colaboradores.

5 Validación de las metas centroamericanas en el Congreso Centroamericano (participaron todos los especialistas de cada uno de los especialistas de Centroamérica y otras personas vinculadas a este quehacer educativo).

Tercera Etapa:

6 Elaboración de los Estándares de Ejecución y Niveles de Logro Marcado a cargo del especialista del Equipo Central y de sus colaboradores.

7 Validación de los Estándares de Ejecución y Niveles de Logro Marcado a cargo de especialistas en la materia de cada uno de los seis países centroamericanos.

ESTÁNDARES CENTROAMERICANOS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN MATEMÁTICAS.

En los estándares definidos para Matemáticas y en los niveles de logro marcado, se enfatiza la importancia de la aplicación de los conceptos matemáticos en la solución de problemas y en la comprensión de estos conceptos. Además, como en el proceso de aprendizaje, los estudiantes para adquirir un nuevo conocimiento, utilizan como punto de partida los conocimientos y habilidades adquiridos anteriormente, en la definición de los Estándares de Ejecución y en los Niveles de Logro Marcado se toma en cuenta este proceso y se valoran tanto las características y el grado de dificultad de los contenidos, como las posibilidades intelectuales de los sujetos que deben asimilarlos. De esta manera, el estudio de algunos contenidos matemáticos se inicia en los primeros grados, pero utilizando números pequeños ya que la utilización de números grandes aumenta el grado de dificultad del contenido y el estudio de otros contenidos, como por ejemplo, razones y proporciones, dada su complejidad, se posterga para los últimos grados de la enseñanza primaria.

La redacción de los Estándares de Contenido y Desempeño, en la mayoría de los casos, se inicia con la frase: "Comprender el concepto.., o los conceptos de...", en el entendido de que este verbo "comprender" significa que los niños y niñas, deberían alcanzar alguna o algunas de las habilidades descritas a continuación con respecto al concepto: a) Reconocer y recordar información importante,. B) Describir y explicar información en sus propias palabras. C) Representar en forma gráfica, escrita o en otra forma, el concepto. D) Relacionar la información con otros hechos básicos. E) Comparar y contrastar la información relativa a ese concepto. F) Aplicar hechos, principios y procedimientos relativos al concepto. G) Sintetizar o arreglar y combinar información importante, hechos y principios para producir una idea, plan, procedimiento o producto. Entonces, en los Estándares de Ejecución y Niveles de Logro Marcado se describen cuáles de estas habilidades se espera logren los niños y niñas en cada nivel escolar con respecto a cada concepto matemático seleccionado.

Por razones de espacio, pondremos un único ejemplo

ESTÁNDAR DE CONTENIDO Y DESEMPEÑO No 5

Comprender los conceptos de ángulo y de unidad de medida de ángulo; trazarlos, utilizarlos en la clasificación de ángulos y en la solución de problemas.

Estándares de Ejecución y niveles de logro marcado:

Tercer grado:

5.1 Reconocer ángulos en cuerpos geométricos o en figuras planas identificando sus partes o elementos (lados, vértices, interior y exterior) y notaciones utilizadas para representar ángulos.

5.2 Identificar el ángulo recto y ángulos más abiertos que el ángulo recto (ángulos obtusos) y ángulos menos abiertos que el ángulo recto (ángulos agudos)

Cuarto grado:
5.3 Reconocer ángulos en cuerpos geométricos o en polígonos hasta de 12 lados identificando sus partes o elementos (lados, vértices, interior y exterior) y las notaciones empleadas para representarlos.
5.4 Reconocer el grado como una unidad de medida de ángulo.
5.5 Trazar ángulos agudos, rectos y obtusos cuyas medidas sean menores o iguales que 180°.

Quinto grado:
5.6 Reconocer ángulos en cuerpos geométricos y en polígonos hasta con 20 lados identificando sus partes o elementos y las notaciones empleadas para representarlos.
5.7 Reconocer el grado como una unidad de medida de ángulo y su aplicación a la determinación de la medida de ángulos menores o iguales que 360°.
5.8 Clasificar ángulos según su medida en, agudos, rectos, obtusos, llanos y perigonales.
5.9 Identificar ángulos complementarios y ángulos suplementarios.
5.10 Resolver problemas que involucren ángulos cuyas medidas sean menores o iguales que 360°, a sus elementos, a su medida o al concepto de ángulos complementarios o suplementarios.

Nota: Los estándares de ejecución escritos en negritas, constituyen los Niveles de Logro Marcado en cada uno de los grados escolares.

Referencias bibliográficas

Informe Regional Centroamericano del Proyecto Establecimiento de Estándares para la

Educación Primaria en Centroamérica.. O.E.I. - C.E.E.C. , Centroamérica, 1999

Ravitch, D. (1995) National Standards in American Education: A citizen's guide. Washington: Brookings Institution Press.

Lewis, A. (1995). Standards. Phi Delta Kappan, June.

Esquivel, J.M, 1998. Pruebas, estándares y equidad. En A.Gurdián (ED) Reforma del sector educación y su impacto en los derechos de la niñez y adolescencia. San José, UNICEF-UCR.IIMEC,(en prensa).

Generalización del Teorema de Morgan

Edison De Faria Campos
edefaria@cariari.ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Media, Geometría

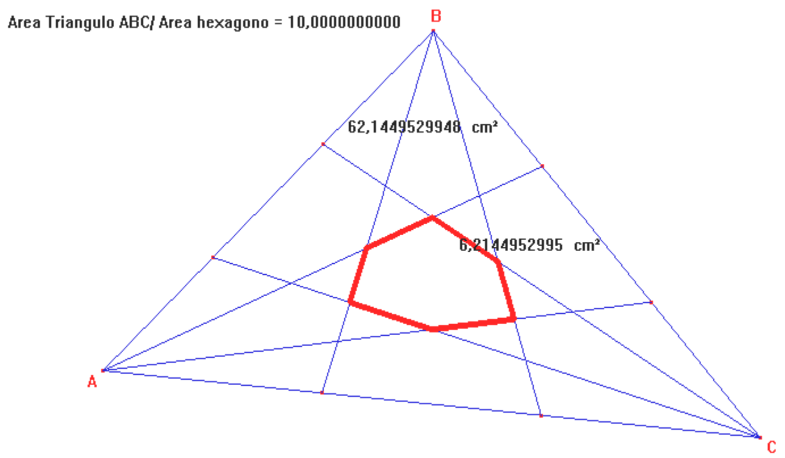
Resumen

El teorema de Walter Marion establece que: “Si los puntos de trisección de los lados de cualquier triángulo son conectados a los vértices opuestos, la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono resultante es 10.” Este resultado fue generalizado por el estudiante de enseñanza media Ryan Morgan, cuando cada lado del triángulo es dividido en n segmentos congruentes, con n impar.

En este artículo se generaliza el teorema de Morgan, para el caso en que n sea par. El autor utilizó el software de geometría dinámica Cabri Geometry y modelos de regresión incorporados en la calculadora graficadora TI92 para hacer experimentos y conjeturas que llevaron al descubrimiento de la fórmula para n par.

Introducción

En 1993, durante una lección de geometría para estudiantes de noveno grado de la enseñanza media del Patapsco High School en Baltimore County, Maryland, el profesor presentó una actividad para que sus alumnos utilizaran un software de geometría para redescubrir el teorema de Walter Marion que establece lo siguiente: “*Si los puntos de trisección de los lados de un triángulo arbitrario son unidos a los vértices opuestos, entonces la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono resultante es 10.*”



Uno de los estudiantes, Ryan Morgan intentó ir más allá de comprobar el *teorema* propuesto y preguntó: ¿qué sucedería si dividimos cada lado del triángulo en n partes congruentes con n > 3? Utilizando Geometer’s Sketchpad [1], Ryan experimentó con diferentes valores de n, hasta que logró establecer un patrón que se cumplía para n impar. Ryan se dio cuenta de que la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono central formado era constante.

N	5	7	9	11	13
Razón entre áreas	28	55	91	136	190

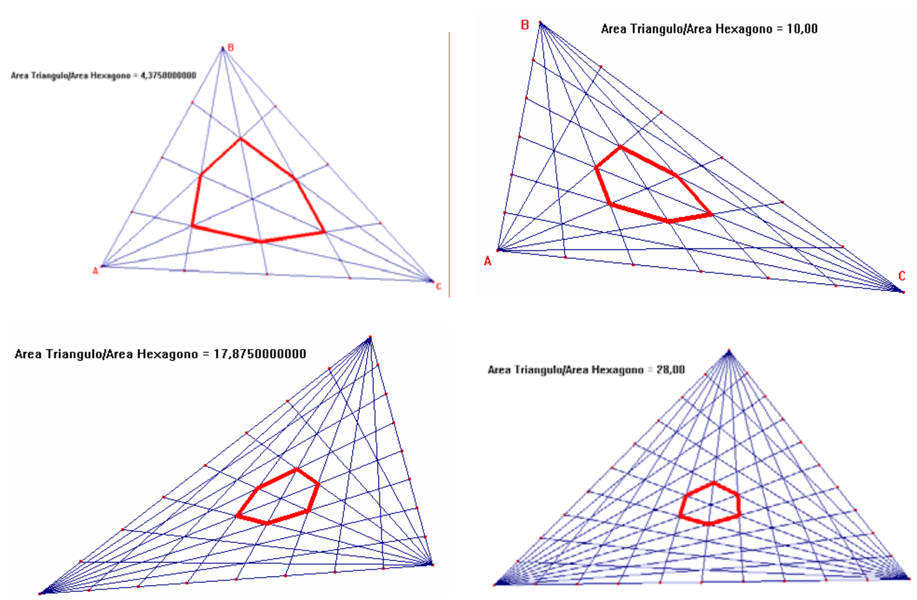
Utilizando regresión cuadrática, él conjeturó que la razón entre las áreas era igual a

$$\frac{9n^2 - 1}{8}$$

si n es impar.
Posteriormente Ryan verificó que la conjetura era verdadera para otros valores impares de n, pero pasaron varios meses hasta que se lograra probar la conjetura [2].

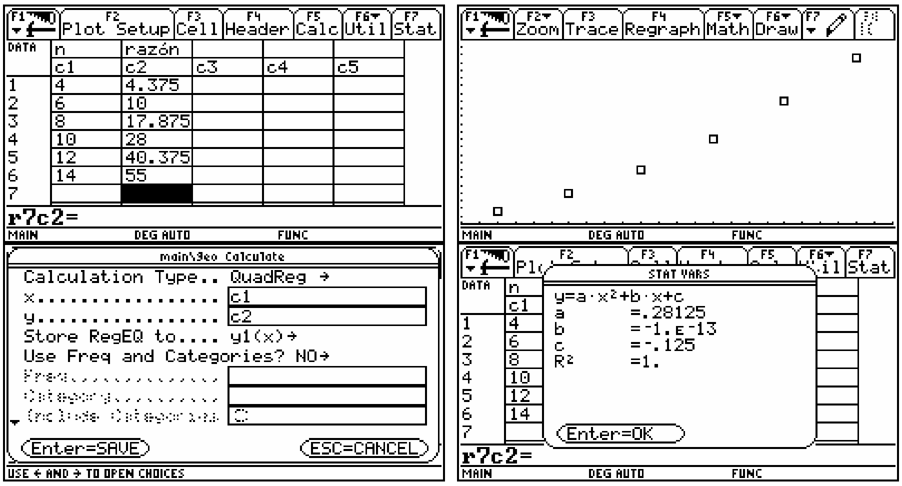
Generalizando el teorema de Morgan

Durante el mes de Enero del año 2000, estuve utilizando el software de geometría dinámica Cabri Geometry [3] para intentar descubrir algún patrón para la razón entre las áreas, para n par. Abajo vemos algunos ejemplos y una tabla con algunos de los valores encontrados:



N	4	6	8	10	12	14
Razón entre áreas	4.375	10	17.875	28	40.375	55

Al ajustar los datos mediante un polinomio cuadrático se obtuvo la siguiente fórmula para la razón entre las áreas:



Al analizar los coeficientes de la curva de ajuste, conjeturé que la razón entre el área del triángulo original y el hexágono central correspondiente era igual a:

$$\frac{9n^2-4}{32}$$

para n par.
Posteriormente verifiqué la conjetura para otros valores pares de n, y noté que la fórmula funcionaba bien. Faltaba demostrar que el resultado obtenido era correcto.

Una demostración de la generalización

Para demostrar la conjetura, se sigue el mismo razonamiento que el utilizado en [2]. Utilizaremos el siguiente teorema debido a Steiner-Routh [4]:

Si los lados AB, BC y CA del triángulo *ABC son divididos en los puntos L, M y N con razones λ:1, μ:1, y ν:1 respectivamente, entonces los segmentos AM, BN y CL forman un triángulo con área*

$$A=\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\nu\lambda+\nu+1)(\lambda\mu+\lambda+1)(\mu\nu+\mu+1)} \text{ *(Área Triángulo ABC)}$$

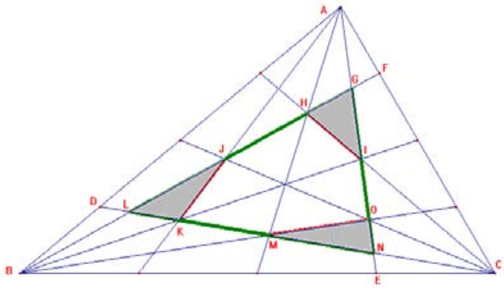
Por *ejemplo*, para n = 4 tendremos (figura abajo), para calcular el área del hexágono formado, tendremos que calcular el área del triángulo GLN y el área de cada uno de los triángulos congruentes GHI, JLK y MNO.

Para el Triángulo GLN, el punto D divide AB en una razón $\lambda=\frac{3}{1}$. De la misma forma, para los puntos E, F tendremos $\mu=3, \nu=3$. Utilizando el teorema de Steiner-Routh, obtendremos que:

$$Area_{\Delta GLN}=\frac{4}{13}Area_{\Delta ABC}$$

Para el triángulo GHI, vemos que $\lambda=\frac{1}{3}$, $\mu=\frac{3}{1}$, $\nu=\frac{3}{1}$, y por lo tanto su área es igual a :

$$Area_{\Delta GHI}=\frac{12}{455}Area_{\Delta ABC}$$



Para el triángulo JKL, $\lambda = \frac{3}{1}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{3}{1}$ mientras que para el triángulo MNO, $\lambda = \frac{3}{1}$, $\mu = \frac{3}{1}$, $\nu = \frac{1}{3}$. Por lo tanto $Area_{\Delta GHI} = Area_{\Delta JKL} = Area_{\Delta MNO} = \frac{12}{455} Area_{\Delta ABC}$.
El área del hexágono central es igual a:

$$Area\ hexagono = Area_{\Delta GLN} - 3Area_{\Delta GHI} = \left(\frac{4}{13} - \frac{36}{455}\right) Area_{\Delta ABC} = \frac{8}{36} Area_{\Delta ABC}$$

Concluimos que $Area_{\Delta ABC} = \frac{36}{8} Area\ hexagono = 4.375 Area\ hexagono$, lo que concuerda con la conjetura.
En general, si n es par, cada lado del triángulo ABC es dividido en n segmentos congruentes, y si utilizamos la misma notación que la que hemos utilizado para n = 4 tendremos:

Para el triángulo GLN, $\lambda = \mu = \nu = \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1} = \frac{n+2}{n-2}$, $n \geq 4$, y por lo tanto al aplicar el teorema de Steiner-Routh, obtendremos que $Area_{\Delta GLN} = \frac{16}{3n^2+4} Area_{\Delta ABC}$.

Para el triángulo GHI, $\lambda = \frac{n/2-1}{n/2+1} = \frac{n-2}{n+2}$, $\mu = \nu = \frac{n+2}{n-2}$, mientras que su área es igual a

$Area_{\Delta GHI} = Area_{\Delta JLK} = Area_{\Delta MNO} = \frac{16(n-2)(n+2)}{(3n-2)(3n+2)(3n^2+4)} Area_{\Delta ABC}$, y así

$$\frac{Area\ hexagono}{Area_{\Delta ABC}} = \frac{Area_{\Delta GLN} - 3Area_{\Delta GHI}}{Area_{\Delta ABC}} = \frac{32}{9n^2-4}$$

es decir,

$$\frac{Area_{\Delta ABC}}{Area\ hexagono} = \frac{9n^2-4}{32}$$

lo que demuestra la conjetura.

Conclusiones

La National Council of Teachers of Matematics (NCTM) [5] recomienda la integración de la tecnología en todos los niveles de la enseñanza de matemática para:

- Explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como relaciones, propiedades numéricas y algebraicas, y funciones.
- Desarrollar y reforzar habilidades tales como cálculos, gráficas, y análisis de datos.
- Dar énfasis al proceso de resolver problemas con datos reales, en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas.
- Acceder ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales con papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización.
- Desarrollar conceptos y reconocer patrones.
- Evaluar habilidades matemáticas y conceptos.
- Construir modelos.
- Experimentar, conjeturar y verificar propiedades matemáticas.
- Explorar y desarrollar nuevas formas de enseñar.

De acuerdo a los nuevos paradigmas de la matemática educativa, la función del profesor (o de otros agentes didácticos, como la tecnología) es la de organizar (a través del diseño e implantación de una situación) un encuentro entre el sujeto (alumno) y el medio para que surja el conocimiento. Este encuentro debe buscar, en general, que tenga lugar una perturbación del sistema de tal forma que la búsqueda de un nuevo estado de equilibrio del sistema produzca un nuevo conocimiento acorde a las condiciones impuestas por el sistema. El aprendizaje tiene lugar como proceso de reconstrucción de un equilibrio del sistema

Hemos visto como la tecnología puede apoyar la acción del agente didáctico en el diseño de la situación que define el encuentro entre el sujeto y el medio, actuando como agente didáctico que influye el funcionamiento del sistema.

En mi opinión, esta es una forma correcta de utilizar la tecnología como mediadora en la construcción de nuevos conocimientos.

Referencias bibliográficas

[1] Jackiw, N. The Geometer’s Sketchpad. Berkeley, California: Key Curriculum Press, 1991.

[2] Watanabe, T., Hanson, R., Nowosielski, F. *Morgan’s theorem*. The Mathematics Teacher, Vol. 89, No. 5, May 1996.

[3] Bellemain, F., Laborde, J. *Cabri Geometry. Guidebook for Macintosh, Windows and MS-DOS.* USA, 1997.

[4] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry.* New York, John Wiley & Sons, 1989.

[5] NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics*. Standards 2000.

Incorporación de Tecnología en la Enseñanza de la Matemática

Anabelle Castro Castro
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Sede Regional San Carlos
Costa Rica

Superior y Medio Superior
Tecnología y aprendizaje significativo

Resumen

El presente trabajo es el resultado de un proyecto de investigación realizado durante dos años por un equipo de investigadores de las cuatro universidades estatales de Costa Rica, en búsqueda de posibles alternativas de cambio, ante el problema presente en el ámbito nacional de tener un sistema de enseñanza de la matemática, con métodos tradicionales que promueven un aprendizaje memorístico y de repetición, razón por la cual se pretendió promover innovaciones tecnológicas en la enseñanza de la Matemática y a la vez seleccionar una metodología que permitiera al alumno la construcción de un aprendizaje significativo.

Antecedentes

La Licda Mayra Segura y la M.Sc. Isabel Chacón, (1996)[5] que los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no dan al estudiante las herramientas para indagar, analizar y discernir la información que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse por distintas vías.(p.29).

El competir con el televisor a color, juegos electrónicos y otras tecnologías, hace urgente, iniciar un proceso de cambios curriculares en los distintos sistemas educativos, que involucren a los estudiantes en actividades de aprendizajes interesantes, innovadoras, creativas, facilitándoles reflexionar sobre sus propias acciones y así construir por sí mismos sus conocimientos y avanzar a su propio ritmo. Todo esto implica nuevas formas de enseñar, de aprender nuevas metodologías y de la utilización de recursos y herramientas disponibles.

La implementación de la tecnología en el aula es un reto actual y es responsabilidad de los profesionales o investigadores, actualizar los procesos de formación de los profesionales de tal manera que estén acorde con las exigencias del proceso de globalización, en el que estamos inmersos.

Es claro, que en el presente, ya no en un futuro, los estudiantes irán a enfrentarse a un mundo competitivo que exige una amplia capacidad de manejo de la tecnología, la resolución creativa de problemas que se presentan a diario, y quien no esté preparado, en este sentido le será muy difícil, desarrollarse profesionalmente.

Las aplicaciones que posee la calculadora TI - 92, conjuntamente con **un uso adecuado,** (según un análisis exhaustivo sobre los tipos de tecnología que se pueden utilizar en la enseñanza de la matemática) es uno de los mecanismos que permite lograr desarrollar en los estudiantes: la capacidad de análisis, el pensamiento lógico, el proceso dialéctico de concreción o abstracción, capacidad de síntesis y creación. Le permite además a los estudiantes el avanzar a su propio ritmo, pero con gran interés y motivación.

A los profesores se les facilita el trabajo interdisciplinario y considerando también que en los niveles en los que se estudian aplicaciones en física y química, ésta tecnología permite la transposición y la comprensión de los conceptos y entender el papel que juega la matemática en estas disciplinas.

---

[5] Segura, M, Chacón, 1 1996; UMBRAL, Competitividad en la educación superior. Vol. I 1. p 29.

Al disminuir el uso del papel y lápiz, como ya algunos estudios lo demuestran, (Cordero,1996; Oliveros 1996; Martínez Cruz 1996; Martínez Falcón,1996; López, 1996; Álvarez, 1996; Ramírez. 1996); el alumno tiene más tiempo para explorar, descubrir, entender y aplicar conceptos y llegar a la resolución de problemas, elevando así el nivel de pensamiento del estudiante.

Problema:

La enseñanza de la matemática, con métodos tradicionales que promueven un aprendizaje memorístico y de repetición.

Objetivo:

Promover innovaciones tecnológicas en la enseñanza de la Matemática a través de la utilización de laboratorios con calculadoras TI - 92 de la Texas Instruments y los C.B.L. en el I.T.C.R. de Cartago y San Carlos, en la Escuela de Matemática de la UNA y la Sede en Pérez Zeledón, la Escuela de Matemática y la Sede de Guanacaste de la U.CR. y los C.C.C., como centros de investigación, formación y capacitación de estudiantes, profesores, y la comunidad de cada región.

Objetivos específicos:

- Incorporar la tecnología en los procesos de enseñanza - aprendizaje.
- Implementar el uso adecuado de las calculadoras TI-92 y de los C.B.L. en las aulas de las instituciones de educación del país.
- Implementar metodologías que promuevan el razonamiento, desarrollo de la capacidad creadora y la construcción de los conceptos por parte de cada uno de los estudiantes.
- Realizar las adecuaciones curriculares necesarias.
- Elaborar material didáctico apropiado
- Investigar el impacto de las calculadoras en le proceso enseñanza - aprendizaje.

METODOLOGÍA

Para el logro de los objetivos el proceso investigativo, éste se dividió en vanas etapas y por medio de una investigación de tipo cualitativa.

- Capacitación a profesores de Matemáticas, Física y Química de los C.C.C. y profesores Universitarios interesados.
- Investigación en el aula como un medio para generar experiencias de aprendizaje significativas.
- Sesiones de trabajo de los investigadores para explorar más las posibilidades del equipo a utilizar, así como el evaluar el progreso del proyecto.
- Sesiones de trabajo con los profesores, para evaluar y compartir las experiencias de cada uno.
- Analizar, elaborar y seleccionar la metodología, ejercicios y actividades a desarrollar.
- Elaboración de guías de laboratorio de parte de los investigadores y profesores involucrados
- Revisión anual y ajustes curriculares.
- Aplicación de pruebas comprensivas y entrevistas a estudiantes y profesores.
- Observaciones de las lecciones.

Conclusiones

- Es más fácil para el estudiante la exploración y en general la utilización de esta tecnología, que para el profesor quien requiere conocer las diferentes teorías de aprendizaje, tener muy claro cuáles son las actividades a realizar en el aula, cuáles son los conocimientos previos que debe tener el alumno, lo que además exige planeamiento con mucha anticipación de tal manera que se puedan hacer los cambios en el orden tradicional de presentación de los contenidos.

- El uso de calculadoras permite al estudiante realizar ensayos, simulaciones, experimentos, demostraciones y reflexión. Le facilita visualizar el sentido que para él tiene ese nuevo aprendizaje al relacionarlo con sus conocimientos anteriores y algo muy importante es la oportunidad que el alumno tiene de plantear hipótesis de manera comprometida individual o en grupo (justificando su planteamiento), para concluir con la aceptación o modificación de su hipótesis, lo que provoca cambios significativos en el ambiente de aula, con clase más participativas y dinámicas.

- El contar con el CBL además de la calculadora programable es un recurso que facilita ver las transposición de algunos conceptos de la matemática con los conceptos físicos, químicos y biológicos.

- Al igual que cualquier otra tecnología, no se puede afirmar que sea la solución al problema de la enseñanza tradicional. El impacto de la incorporación depende de la metodología utilizada por el profesor y se puede con certeza decir: "el *profesor es el único responsable de generar situaciones de aprendizaje conducentes a lograr en el estudiante aprendizajes significativo",* pero es importante destacar el potencial que esta tecnología posee para lograr la interacción del estudiante con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a la construcción de su conocimiento matemático.

- Se pudo observar interés por esta tecnología tanto en profesores en servicio de instituciones públicas y privadas, participantes en los talleres impartidos por miembros del equipo de investigadores y profesores colaboradores en actividades nacionales e internacionales. Además profesores de otras áreas como Agronomía, no solo mostraron interés sino que además solicitaron capacitación en el uso del equipo para ser utilizado en sus proyectos de investigación; específicamente al hacer mediciones del oxígeno disuelto en el proyecto de investigación de la Cuenca del Río San Carlos y medición del PH en una laguna de oxigenación.

- Inicio de un nuevo proyecto de investigación que pretende determinar las metodologías que permitan la integración de ciencias y matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- Permitir a estudiantes de X año de Colegios Científicos el participar en eventos a nivel nacional e internacional con ponencias y talleres dirigidos a profesores sobre uso de la tecnología en diferentes áreas y sobre el impacto del uso de tecnologías por parte de los profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje de ellos.

- Se confeccionaron guías de trabajo para los temas:
    - Ángulos inscritos, semi-inscritos e internos.
    - Funciones.
    - Utilización del CBL.
    - Práctica de Laboratorio " Preparación de disoluciones de electrolitos y no electrolitos. Conductividad".
    - Práctica de Laboratorio "Determinación de la masa molar de un compuesto por crioscopia".
    - Práctica de Laboratorio "Determinación de la acidez de tina muestra incógnita
    - Límites y continuidad.
    - Derivada y aplicaciones.
    - Geometría Euclida

Referencias bibliográficas

Boggino, N. (1997): "Cómo elaborar mapas conceptuales en la escuela". Aprendizaje significativo y globalizado. Ed. Horno Sapiens, pp. 9-30.

Dorado, C “Aprender a Aprender” Estrategias y técnicas. La Fuente Psicológica. pp. 1 - 8..1997

Doryan Garrón Eduardo. , Hacia la formulación de un proyecto de educativa nacional para mediano y largo plazo, Memoria 11 Congreso Nacional de Educación: Desafíos de la Educación Costarricense en la formación del Ser Humano para la Sociedad del Nuevo Siglo. Costa Rica, Febrero 1996.

Gómez P. (1998): -Tecnología y educación matemática". . Informática educativa. Vol. 10 N01. pp93- 111.

Guzmán, M. (1993): "Tendencias Innovadoras en la Educación Matemática” Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Ed. Popular, pp. 1 - 2.

Pozo, J. (1996): -Teorías cognitivas de] aprendizaje". Madrid. Ed. Morata, pp. 209 222,

Segura M., Chacón 1. , Competitividad *en la educación superior,* UMBRAL Vol. . 11 , No.5 1996.

Wayland, K. Y Ramirez, B. (1997) "Technology and the Misconceptions of Teaching Matematics". Mayague. University of Puerto Rico. pp. 1 - 5.

Enseñanza Significativa de la Matemática en las Carreras de Ciencias Técnicas

Dr. Eduardo Ramón Bravo de las Casas
ebc@ucfinfo.ucf.edu.cu, ebc2047@hotmail.com
Facultad de Informática. Universidad de Cienfuegos
Cuba.

Resumen

En el trabajo se abordan diferentes cuestiones como son Educación Matemática y su Enseñanza Significativa. Una introducción necesaria referente a la historia de las Matemáticas. Crítica a diferentes tendencias en la enseñanza de las Matemáticas y características de las Matemáticas importancia social de los diferentes enfoques del currículo en la enseñanza de las Matemáticas. *E*l bourbakismo en Cuba y otros países de Latinoamérica. Las Matemáticas y su Enseñanza Significativa relacionadas con los mapas conceptuales y los conceptos básicos de las Matemáticas. La utilización de los métodos problémicos en la enseñanza de las Matemáticas en ingeniería. Una introducción necesaria al tema. La estructuración problémica de la enseñanza de la Matemática en ingeniería.

1. EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA SIGNIFICATIVA

1.1 Una introducción necesaria referente a la historia de las matemáticas

Parece difícil de negar el hecho de que las diversas interpretaciones epistemológicas acerca del status científico de las Matemáticas tienen una influencia decisiva en la consideración de su Historia y su Enseñanza. Por poner sólo un ejemplo bastante reciente, qué duda cabe que la consideración Bourbakista de dicha ciencia, sintetizada en el artículo firmado por el colectivo autodenominado Nicolás Bourbaki sobre la **"Arquitectura de las Matemáticas "** ha determinado su visión de la Historia de la misma, así como su concepción de qué y cómo enseñarla, puesta de manifiesto en la década de los 60 bajo la denominación de la **"matemática moderna"** o la **"nueva matemática"**. El slogan que acuñó Jean Dieudonné, quizás el bourbakista más osado a la hora de asumir y defender sus peculiares posiciones pedagógicos, amparándose incluso en los planteamientos cognitivos de Jean Piaget, con motivo del coloquio de Royaumont realizado en 1959, pone de manifiesto esta interrelación entre las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza. Su **¡Abajo Euclides!***,* pues ese fue su slogan, está plenamente justificado en función de sus planteamientos históricos, recogidos en su **Elementos de historia de las Matemáticas,** así como de su afirmación de que la enseñanza debe centrarse en la comprensión del método axiomático. Podríamos también recurrir, retrocediendo hacia el pasado, al gran filósofo de las ideas, Platón, el cual también explicitó a lo largo de sus Diálogos cuál era su concepción de las Matemáticas, su Historia y su Enseñanza, pero pensamos que no es necesario ejemplificar más ante lo evidente del asunto.

1.2 Propósitos fundamentales

En nuestro epígrafe pretendemos debatir explícitamente cuatro tesis respecto a la Enseñanza de las Matemáticas:

1. La Educación Matemática, su enseñanza, al no fundamentarse en una adecuada epistemología e historia de la misma, no favorece la concreción de una educación Intercultural, más necesaria que nunca en esta llamada Aldea Global
2. Significado del Bourbakismo para la Enseñanza de la Matemática.
3. La Educación Significativa y su Importancia en la Educación Matemática.
4. La Educación Problémica y su Importancia en la Matemática en las Carreras de Ciencias Técnicas.

1.3 Crítica a diferentes tendencias en la enseñanza de las matemáticas y características de las matemáticas

Para defender estas tesis vamos a criticar, todo lo que nos permite el espacio puesto a nuestra disposición, un amplio conjunto de textos de historia de las matemáticas elaborados tanto en las países del entonces llamado segundo mundo, o países del Este, hasta la caída del muro de Berlín, como en los países desarrollados del primer mundo, ahora llamados, de manera algo más aséptica, países del Norte.

Creemos que antes de continuar debemos de hacer una pequeña reflexión acerca del desarrollo del currículo y los estudios sobre didáctica de las matemáticas.

El campo de la Educación Matemática ha experimentado un desarrollo muy considerable, en extensión y profundidad, en los últimos treinta años. Tanto es así que en la actualidad es prácticamente imposible que una persona aislada pueda simplemente estar al tanto de la bibliografía que se publica relativa al tema, mientras que, en la década de los cincuenta, los escasos matemáticos, psicólogos y/o didactas interesados profesionalmente en el problema de la transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos en las diversas instituciones escolares, podían estar perfectamente al día de todo lo que se publicaba e investigaba al respecto.

1.4 Importancia social de los diferentes enfoques del currículo en la enseñanza de las matemáticas

La importancia social de los diferentes enfoques del currículo tiene, por lo menos, dos caras:

- En primer lugar, la diferenciación en el trabajo y el conocimiento de la escolaridad representa diferentes sensibilidades y concepciones necesarias para el acceso a posiciones de privilegio y de jerarquía en la sociedad;
- En segundo lugar, la diferenciación en las escuelas representa tensiones y luchas más amplias que no sólo reproducen, sino que son elementos dinámicos dentro de la estructura social.

Por otro lado, existen tres dinámicas que ilustran los códigos sociales que hay detrás de la enseñanza de las matemáticas:

- En primer lugar, la enseñanza de las matemáticas hace referencia simbólica a la base tecnológica y científica de la sociedad. Su carácter cognitivo representa para muchos la creencia ilustrada de que una sociedad racional y basada en la ciencia generará progreso.
- La creencia ilustrada produce una segunda dinámica, relacionada con su rango de categoría preferida para el entendimiento. Las matemáticas han de ser reconocidas como un valor incluso por quienes no las tienen como asignatura. La categoría de curricular concede legitimación a aquellos expertos que han adquirido los conocimientos y los modos de interpretación y que ocupan puestos en los que se hace del conocimiento matemático parte de un mandato profesional.
- Una tercera implicación social es la cualidad dual de las matemáticas en la construcción de la realidad. Puede permitirnos comprender relaciones y guiar interpretaciones de un modo que está fuera del alcance de otros discursos sobre nuestro mundo, pero puede también oscurecer y falsear nuestras condiciones sociales, puede desviar la atención hacia nuestro mundo de manera que desvíe la atención del modo en que se construyen humanamente las pautas sociales, convirtiendo los números, por sí mismos y en sí mismos, en una realidad.

Por su importancia y significación hagamos un breve análisis del efecto en nuestros países de una corriente de enseñanza de la matemática, de la que ya hicimos mención en la introducción de nuestro trabajo, que si bien desde el punto de vista de la formalización de las matemáticas tuvo sus aspectos positivos, desde el punto de vista de la enseñanza, la consideramos muy perjudicial.

1.5 El bourbakismo en cuba y otros países de Latinoamérica

El proceso que vamos a describir a continuación no solo se manifestó en Cuba, sino que por nuestra experiencia personal y las conversaciones que hemos tenido con Colegas de otras partes de nuestro hemisferio podemos decir que fue la tónica de la enseñanza de las matemáticas en las décadas de los sesenta- setenta en nuestro continente.

El entusiasmo de quienes tenían en sus manos la enseñanza en la Carrera de Matemáticas en las Universidades Cubanas durante los primeros años de la década del sesenta, los llevó a pensar que el camino correcto para la formación científica de sus alumnos debía ser desde el principio , a través de los textos de la Bourbaki, , consideramos que todos los que pasaron la " prueba Bourbaki " pueden hacer suya la idea de que si bien Bourbaki representó un paso de avance en cuanto a la formulación lógica de la Matemática, desde el punto de vista de la enseñanza de la misma, no fue en modo alguno lo ideal.

En estos momentos considero que estamos en condiciones de analizar las cuestiones referentes a la Educación Significativa y su Importancia en la Educación Matemática.

1.6 Las matemáticas y su enseñanza significativa

Debemos tener en cuenta algunas cuestiones generales del aprendizaje significativo, antes de entrar en cuestiones concretas, consideramos que el aprendizaje significativo es una vía muy posible para la enseñanza que tiene diferentes implicaciones como son:

1. El aprendizaje significativo implica la asimilación de nuevos conceptos y proposiciones en estructuras cognoscitivas ya existentes, que resultan en consecuencia modificadas.
2. El conocimiento se organiza jerárquicamente en la estructura cognoscitiva y la mayoría de todo lo nuevo que se aprende implica una subsunción de conceptos y proposiciones en jerarquías ya existentes.
3. El conocimiento adquirido por aprendizaje memorístico no se asimilará en las estructuras cognoscitivas, ni modificará las estructuras de proposiciones ya existentes.

De aquí surgió la idea de ensayar diferentes esquemas para representar las estructuras del conocimiento, llegando con ello a los que ocupan nuestra atención que son los mapas conceptuales, estos mapas conceptuales ilustran tres ideas claves:

1. El aprendizaje significativo lleva a una diferenciación progresiva de la estructura cognoscitiva.
2. Una recopilación integradora de nuevos y viejos conocimientos, puede corregir
3. preconcepciones.
4. El conocimiento adquirido mecánica o casi-mecánicamente, no se asimila adecuadamente en las estructuras cognoscitivas.

Desde su creación los mapas conceptuales han servido de potentes herramientas para representar las estructuras del conocimiento en todos los campos temáticos, por consiguiente la Matemática no podía ser una excepción, los mapas conceptuales también son aplicables a alumnos de todas las edades.

En matemática se dice que la eficacia de la memoria funcional se ve aumentada o disminuida por la cantidad y calidad de nuestras estructuras cognoscitivas, todos los estudios apuntan a la conclusión de que la capacitación de los alumnos descansa en nuestra ayuda a organizar y utilizar unas estructuras jerárquicas de conocimientos cuidadosamente elaborados.

Tanto en la enseñanza de las ciencias, como en la de las matemáticas, la materia es por norma no clara para los alumnos y a veces para los profesores, rara vez se visualiza la estructura de los conceptos que dan sentido a los enunciados que memorizan o a los problemas matemáticos que resuelven aplicando algún algoritmo, para que pueda ser aprendida la materia significativamente la materia debe ser conceptualmente transparente.

Los estudiantes necesitan ayuda para construir y aplicar las estructuras conceptuales jerarquizadas a la interpretación de los hechos, enunciados y reglas de procedimiento que memorizan, mediante los mapas conceptuales sencillos podemos lograr que estas cosas resulten durante el proceso de enseñanza aprendizaje, dichos mapas deben de ser sencillos y no constar de muchos miembros, porque de otra forma pierden su utilidad y beneficio.

1.7 Los mapas conceptuales y los conceptos básicos de las matemáticas

Se ha dicho que no hay nada tan imparable como una idea a la que le ha llegado su hora, consideramos al uso de los mapas conceptuales y otras técnicas que contribuyen al aprendizaje significativo,

2.- LA UTILIZACIÓN DE LOS MÉTODOS PROBLÉMICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

2.1 Introducción necesaria al tema

El perfeccionamiento de la enseñanza se ha convertido, desde hace algunos años, y en casi todas las latitudes, en centro de atención de didactas y pedagogos. Ello es el resultado de las nuevas y elevadas exigencias que la Revolución Científico-Técnica le plantea a la escuela contemporánea. Para Cuba, país en vías de desarrollo, cuyo pueblo se halla enfrascado desde hace más de 35 años en la realización de una revolución social en condiciones excepcionales, la necesidad de un mejoramiento sustancial de la enseñanza adquiere dimensiones extraordinarias.

2.2 Enseñanza problémica

A partir de entonces se habla en la literatura especializada de **ENSEÑANZA PROBLÉMICA**, entendiéndose como tal aquella forma de enseñanza donde los alumnos se sitúan sistemáticamente ante problemas, cuya resolución debe realizarse con su activa participación, y en la que el objetivo no es sólo la obtención del resultado sino además su capacitación para la resolución independiente de problemas en general.

La organización problémica de la enseñanza no puede significar, sin embargo, un abandono de la actividad reproductiva de los alumnos en la clase. La inclusión del enfoque problémico en la didáctica debe verse como expresión de la dialéctica en el proceso de enseñanza, y por tanto como la dependencia recíproca de los momentos productivos y reproductivos del aprendizaje.

La importancia de esta forma de organizar la enseñanza radica en que:

- Eleva el grado de actividad mental en la clase,
- Propicia el pensamiento creador de los estudiantes, y
- Contribuye al desarrollo de la personalidad.

La puesta en práctica de la Enseñanza Problémica requiere del conocimiento por el profesor, no sólo de los resultados que habrá de alcanzar sino además, de las condiciones en que deberá trabajar. Ellas son las siguientes:

- Se necesita más tiempo para la preparación de la clase que cuando se planifica sólo sobre la base del uso de métodos no problémicos.
- Para el desarrollo de un mismo contenido, consume más tiempo de la clase durante la familiarización de los alumnos con ella que la Enseñanza Explicativo-ilustrativa.
- Sus ventajas por sobre la enseñanza tradicional no se logran a mediano plazo.

Como la Enseñanza Problémica implica una visión más abarcadora del proceso de enseñanza-aprendizaje, es conveniente describir más profundamente los rasgos que la diferencian de otras formas de enseñanza.

2.3 La estructuración problémica de la enseñanza de la matemática en ingeniería

Aún cuando el tratamiento problémico de la enseñanza de la Matemática se considere una necesidad, no debe perderse de vista que la estructuración problémica del proceso de enseñanza-aprendizaje no es siempre conveniente.

Luego, habría que preguntarse CUANDO resulta apropiada la utilización de la Enseñanza Problémica en el tratamiento de la asignatura.

Además, en caso de elegirse la vía problémica de estructuración de la enseñanza, quedaría otro aspecto a considerar: CUÁL de los Métodos Problémicos seleccionar.

La decisión de utilizar la Enseñanza Problémica, y la elección del Método Problémico más conveniente, de acuerdo con los criterios expuestos anteriormente, no son suficientes para propiciar una estructuración problémica óptima del proceso de enseñanza de la Matemática. El profesor debe también conocer **COMO** dirigir ese trabajo con efectividad.

2.4 Tipos de problemas a utilizar

Se ejemplificará a continuación la utilización de los criterios de aplicación de los Métodos Problémicos en una situación de enseñanza del curso de Matemática de Ingeniería.

Resolución del siguiente ejercicio Geometría Analítica, la situación problémica surge de hacer notar que se exige calcular la temperatura a doscientos metros de profundidad conociendo que la misma aumenta a razón de un grado cada diez metros por debajo de la superficie, para precisar el problema, el profesor puede propiciar una conversación heurística con los alumnos, cuyo desarrollo podría ser aproximadamente el siguiente:

***PROFESOR*:** "De acuerdo con los datos, ¿disponemos de algún punto de referencia?".

***ALUMNOS*:** "De uno la superficie de la tierra".

PROFESOR: "¿Es totalmente cierto esto en nuestro problema?"

ALUMNOS*:* "Es cierto existen muchos puntos separados diez metros bajo la superficie".

Este análisis posibilitará mostrar la conveniencia de organizar la actividad de búsqueda sobre la base del método de la Geometría Analítica pues se trata de la búsqueda de la ecuación de una recta.

Con la ayuda, además, de las reglas heurísticas puede encontrarse la idea de la solución. el trabajo conjunto del profesor y los alumnos podría continuar de la siguiente forma:

PROFESOR*:* "Necesitamos determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, ¿Cuáles son esos puntos?

ALUMNOS*:* "Sabemos que los puntos son $(t_0 , 0)$ y $(t_0 + 1 , 10)$".

PROFESOR: "Ya tenemos un conjunto de puntos a partir del que podemos obtener la ecuación de la recta. ¿ Cuál es dicha ecuación?".

ALUMNOS*:* "La ecuación es $h = 10(t – t_0)$".

PROFESOR: "Evidentemente como esta la ecuación no podemos calcular la temperatura a 200 metros bajo la superficie. ¿Disponemos de todos los datos y que debemos hacer con la ecuación?" <rh> (recordar teoremas del dominio matemático correspondiente).

***ALUMNOS**:* Necesitamos la temperatura en la superficie y despejar la temperatura en la ecuación.

En este caso solamente queda despejar la temperatura $t = h/10 + t_0$ y dar un valor de la temperatura en la superficie, recalcando que la temperatura a doscientos metros bajo la superficie variará de acuerdo a la temperatura en la misma.

CONCLUSIONES

La Enseñanza Problémica es una necesidad de la enseñanza de la Matemática en Ingeniería en las condiciones de la escuela contemporánea, por lo que el profesor de Matemática debe garantizar un espacio para el tratamiento problémico de la asignatura sobre la base de las especificidades de los objetos matemáticos, de las contradicciones que afloran de la utilización de sus formas de trabajo y pensamiento, y de su aplicación a la práctica. De esta forma se puede dar cumplimiento a la mayor parte de los objetivos generales de la enseñanza de la Matemática.

Referencias bibliográficas

__________ (sf.): El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza General Politécnica y Laboral I y II (mimeografiado). Instituto Superior Pedagógico "Frank País García". Santiago de Cuba.

____________________ (1995 b): Enseñanza de la Matemática y dinámica de grupos. En PROMET, Editorial Academia. La Habana.

____________________ (1995 c): La sistematización de los conocimientos matemáticos. Informe de Investigación [inédito]. Universidad Pedagógica "Enrique José Varona". Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática.

Guilford J. P. (1976): Fronteras del pensamiento que los profesores deberían conocer. En "En torno a la creatividad y la dinámica grupal" [Chivás F., comp.]. Editorial Academia. La Habana, 1992. p.83-91

Morenza Padilla Liliana, Psicología Cognitiva Contemporánea y Representaciones Mentales. Algunas aplicaciones al Aprendizaje, Curso del Evento Pedagogía´97. Ciudad de la habana, 1997.

Müller, H. (1987): Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática. Folleto mimeografiado. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana.

Novack J.D., ¿Qué sabemos acerca de como aprenden las personas?, Santiago de Compostela,

Rico Luis (Editor), Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria, Editorial Síntesis, 1997.

Valera Alfonso Orlando, Fundamentos psicólogos de las Corrientes y Teorías Pedagógicas Contemporáneas, sus implicaciones para la Educación Latinoamericana. Curso del Evento Pedagogía´97.

La Informática en la Transformación del Curriculum de Matemática en las Carreras de Ingeniería.

Dr. Eugenio Carlos Rodríguez, ecarlos48@yahoo.com
Lic. Lourdes Casañas Cruz.
Lic. Mayra Durán Benejam.
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.
La Habana, Cuba.

Introducción.

El presente trabajo forma parte de las tareas del proyecto de Investigación Perfeccionamiento de la Disciplina Matemática en una carrera de Ciencias Técnicas para el uso de la Informática en el proceso de Enseñanza- Aprendizaje, el cual se ejecuta por el grupo de Matemática Educativa del Departamento de Matemática General en la Facultad de Ingeniería Industrial del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, en La Habana, Cuba, en la carrera de Ingeniería Informática.

Como resultado de esta investigación se realizará una transformación completa en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática Básica para una carrera de Ingeniería, tomando como base el uso de la Informática en todas sus posibilidades: uso de Asistentes Matemáticos en el aula y en laboratorios, uso de tutores inteligentes, multimedia, etc, con un enfoque pedagógico que permita tanto el rediseño de los sistemas de objetivos, conocimientos y habilidades a lograr, como las formas de enseñanza. Las transformaciones de los contenidos y habilidades a lograr con el uso de la computadora permitirá hacer más énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de aprender, la creatividad y la resolución de problemas.

En este trabajo se recogen las tareas relacionadas con:

- Elaboración de estrategias para el uso de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que incluye el uso de asistentes matemáticos profesionales, tutorales y otros softwares educativos en clases, laboratorios y en el trabajo independiente del estudiante.
- Investigación, fundamentación y establecimiento de los aspectos del curriculum que es necesario perfeccionar. Esta tarea incluye el diagnóstico de los objetivos y contenidos que deben ser modificados a partir del uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, así como la determinación de aquellos en los cuales el uso de softwares educativos contribuyen a alcanzar resultados superiores.
- Diseño del programa de la Disciplina y los programas de las asignaturas que la componen. Se incluye la elaboración de los sistemas de objetivos, conocimientos y habilidades de la Disciplina a partir del perfil del profesional, teniendo en cuenta el papel de la Disciplina en el curriculum de la carrera y su articulación con las demás disciplinas de la misma. Considerando además las posibilidades que brinda el uso de las computadoras como medio de enseñanza y como herramienta de cálculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en la vida profesional del futuro egresado.
- Análisis de las distintas formas organizativa de la docencia para cada asignatura.

Los resultados que se muestran a continuación están referidos solamente a las asignaturas que se imparten en el primer año de la carrera, Matemática I, Matemática II y Álgebra Lineal, fundamentalmente las dos primeras

Estrategia para el uso de la Informática.

La estrategia para el uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje considera la utilización de la computadora en las siguientes tres formas:

- Como medio de enseñanza, en las conferencias para mostrar ejemplos e introducir definiciones y conceptos, utilizando un asistente matemático profesional. En este caso se escogió el sistema DERIVE.
- Como medio de aprendizaje, mediante el uso de tutoriales o entrenadores en el trabajo independiente del alumno.
- Como herramienta de cálculo, en la resolución de ejercicios de aplicación donde los cálculos pueden ser engorrosos, mediante el uso de un asistente matemático (DERIVE) en laboratorios y trabajos independientes.

Perfeccionamiento de los Programas.

En el proceso de investigación realizado con respecto a la transformación de la Disciplina se plantearon dos alternativas:

1. Modificar el programa de la Disciplina actual transformando un conjunto de objetivos y contenidos y algunas de las formas organizativas de las docencia, a partir del uso de la Informática, pero sin hacer transformaciones radicales en cuanto a las asignaturas que componen este programa.
2. Transformar radicalmente el Programa de la Disciplina a partir del resultado de analizar programas de otras universidades y de la consulta con expertos, lo que conduce a un análisis de las asignaturas que componen la Disciplina, para tener en cuenta temas de Matemática Discreta y otros temas de Álgebra, tales como Estructuras Algebraicas.

En una primera versión se decidió a trabajar e la primera alternativa y trabajar posteriormente la alternativa dos. Teniendo esto en cuenta todas las tareas se abordaron sobre la base del programa actual.

Para dar cumplimiento a estas tareas se empleó el trabajo con expertos, la búsqueda bibliográfica y la revisión de planes de estudio de otras universidades.

Se entrevistaron 18 expertos, especialistas en asignaturas de Matemática y en las Disciplinas del perfil del Profesional, se revisó bibliografía de la especialidad y se consultaron los planes de estudio de 8 universidades de España y una de Perú.

La asignatura que sufrió más cambios fue el Álgebra Lineal, la cual fue diseñada completamente teniendo en cuenta que, según los expertos, es la que más tributa a la carrera.

Se plantea como objetivo general de la signatura resolver problemas de procesamiento de la información (almacenar, transformar e interpretar la información) mediante la utilización de objetos matemáticos (matrices, vectores y aplicaciones lineales) y métodos del Álgebra Lineal (operaciones con matrices, resolución de SEL, cambio de bases y la determinación de la imagen de un vector mediante la matriz asociada a una aplicación lineal), lo que permite desarrollar en los estudiantes capacidades cognoscitivas de razonamiento, hábitos de proceder reflexiblemente, de evaluar los resultados de su trabajo, así como de utilizar los medios necesarios para buscar y procesar información.

Sobre la base de este objetivo se redefinió todo el sistema de habilidades de la asignatura, teniendo en cuenta el uso de un Asistente Matemático.

También se reelaboraron las orientaciones metodológicas de la asignatura, para garantizar el cumplimiento de objetivos y habilidades en su vínculo con la carrera y el uso de la informática.

Del análisis de las asignaturas Matemática I y II se decidió incluir el tema ¨Sucesiones¨, el cual según los expertos, también tributa a la formación del Ingeniero en Informática al contribuir al desarrollo de la habilidad de algoritmizar, a la búsqueda de generalidad en un conjunto de situaciones, al análisis de las regularidades y ordenamiento y al enlace entre la Matemática Discreta y la Continua.

En la Matemática I se modificaron los objetivos instructivos, incluyéndose el uso de la computadora como medio de cálculo, para la interpretación de los conceptos de función, límite, continuidad y derivadas y para el análisis del comportamiento de funciones.

En el sistema de habilidades se modificaron cuatro de ellas y se introdujeron otras cuatro. Tres de las modificaciones están relacionados con el uso de la Informática en el cálculo de límites y derivadas, y con el análisis del comportamiento de funciones reales de una sola variable.

Las cuatro habilidades introducidas están relacionadas con la introducción de nuevos temas (sucesiones y superficies cuadráticas) y la solución de problemas planteados en la asignatura utilizando un Asistente Matemático.

Los resultados anteriores se muestran en la siguiente tabla.

TABLA I

MATEMÁTICA I -SISTEMA HABILIDADES	
PLAN	PROPUESTA
1. Calcular limites utilizando la regla de L'Hospital y las propiedades del límite y la continuidad. 2. Obtener derivadas de primer orden y de orden superior empleando las reglas de derivación, la regla de la cadena y la definición correspondiente. 3. Aplicar los métodos de Cálculo Diferencial al análisis del comportamiento de funciones reales de una y varias variables.	1. Calcular limites sencillos y utilizar la computadora para calcular otros tipos de limites. 2. Calcula derivadas y derivadas parciales de primer orden y de orden superior empleando las reglas de derivación y la regla de la cadena para los casos más simples utilizando la computadora para calcular otros casos de mayor complejidad. 3. Interpreta el comportamiento de funciones reales de una variable utilizando métodos del Cálculo Diferencial y haciendo uso de la computadora. 4. Resolver problemas planteados en la asignatura utilizando un asistente matemático.

En la Matemática II se modificaron los objetivos instructivos al introducir el cálculo de algunos tipos de integrales utilizando un Asistente Matemático. Se modificaron las habilidades relativas al cálculo de integrales, mediante el uso de un Asistente Matemático y se introdujo una habilidad relacionada con la solución de problemas planteados en la asignatura, también utilizando un Asistente Matemático.

Los resultados anteriores se muestran en las tablas siguientes.

TABLA II

MATEMÁTICA II - SISTEMA DE OBJETIVOS INSTRUCTIVOS	
PLAN	PROPUESTA
1. Contribuir a que los estudiantes interpreten los conceptos de integral indefinida, integral definida, integral doble, triple, de línea y superficie y establezcan sus relaciones con problemas de la realidad.	1. Interpretar los conceptos de integral indefinida, integral definida, integral doble, triple, de línea y superficie y establecer sus relaciones con problemas de la realidad.

2. Contribuir a que los alumnos utilicen esos conceptos para interpretar modelos ya creados, y para modelar problemas sencillos de índole físico, geométrico y técnicos. 3. Calcular integrales indefinidas, definidas dobles, triples, de línea y de superficie y resolver problemas modelados con ellas.	2. Interpretar modelos ya creados y modelar problemas sencillos de índole físico, geométrico y técnico utilizando los distintos tipos de integrales. 3. Calcular integrales indefinidas, definidas, dobles, triples, de línea y superficie sencillas y resolver problemas modelados con ellas. 4. Calcular algunos tipos de integrales utilizando un asistente matemático.

TABLA III

MATEMÁTICA II-SISTEMA DE HABILIDADES	
PLAN	PROPUESTA
1. Calcular integrales indefinidas usando métodos de integración y tabla de integrales. 2. Calcular integrales definidas utilizando los teoremas fundamentales del cálculo integral y métodos aproximados con interpretación geométrica sencilla. 3. Utilizar los conceptos, teoremas y propiedades del calculo integral para la modelación y solución de problemas geométricos, físicos y-o vinculados a la especialidad.	1. Calcular integrales indefinidas usando métodos de integración, la tabla de integrales y asistentes matemáticos. 2. Calcular integrales definidas utilizando los teoremas fundamentales del cálculo integral y asistentes matemáticos. 3. Resolver problemas planteados en la asignatura utilizando un asistente matemático.

Formas organizativas de la docencia.

El diagnóstico realizado para determinar el estado del curriculum de Matemática del Ingeniero Informático para las asignaturas Matemática I y II, con respecto a la utilización de la tecnología informática arrojó los siguientes resultados:

Matemática I: De un total de 90 horas clases frente al alumno no se utilizaba la computadora en ninguna de ellas.

Matemática II: De un total de 64 horas frente al alumno, tampoco se utilizaba computadora en ninguna de ellas.

En los dos últimos cursos ya se han introducido algunos laboratorios con el uso de un Asistente Matemático en estas dos asignaturas.
La propuesta actual considera el uso de la computadora en el aula de conferencia como medio de enseñanza y en el laboratorio como se muestra a continuación:

En la Matemática I de 16 conferencias planificadas en el plan calendario, en siete de ellas se utilizará el Asistente Matemático como apoyo del profesor, se planificaron además cinco actividades en el laboratorio de microcomputadoras.

En la Matemática II de doce conferencias planificadas en el plan calendario, en ocho de ellas se utilizará el Asistente Matemático y se planificaron siete actividades en el laboratorio.

El uso de la computadora como medio de aprendizaje no está considerado en esta propuesta por no haberse concluido la elaboración de los softwares educativos con estos fines.

Conclusiones:

Aunque los resultados que se muestran son todavía parciales, estos reflejan las potencialidades que da el uso de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Actualmente se está trabajando en el diseño práctico de laboratorios y en el rediseño de las restantes asignaturas.

Referencias bibliográficas

Colectivo de Investigadores.- Perfeccionamiento de la Disciplina Matemática en un carrera de Ciencia Técnicas para el uso de la Informática en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje . Proyecto de Investigación en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.

Fernández de Alaíza García Madrigal, Bertha. La investigación-acción en el perfeccionamiento curricular para la Educación Superior. Memorias del III Taller Internacional sobre enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, La Habana, Cuba, 1998.

Hernández Fernández, Herminia. Objetivos en la Formación de la Matemática. Folleto Didáctica de la Matemática. Artículo a debate, E.P.N. Quito, Ecuador, 1993.

Valido González, Iván. Propuesta de un sistema didáctico para la enseñanza de las integrales con el empleo de un Asistente Matemático. Tesis de Maestría, La Habana, Cuba,1997.

Los Métodos Económicos Matemáticos y su contribución al desarrollo de cualidades personales en los estudiantes. Una experiencia en la Universidad de Holguín.

Pedro Escalona Ávila, pedroe@uho.hlg.edu.cu
Lic. Pedro Sánchez del Toro, psanches@uho.hlg.edu.cu
Universidad de Holguín "Oscar Lucero Moya"
Cuba

Matemática Aplicada en la Educación Superior

Resumen:

Este trabajo tiene como objetivo mostrar las experiencias de un experimento aplicado en la asignatura Métodos Económicos Matemáticos II en el curso 1998-1999 en el cuarto año de la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad de Holguín, en el cual, a partir de una nueva concepción del proceso de enseñanza aprendizaje en la asignatura en cuestión, y con la utilización del método de investigación en la acción como una alternativa, se desarrolla la independencia cognoscitiva en los estudiantes y otras cualidades personales.

A partir de la aplicación de técnicas cualitativas, se valora como se califican desde el punto de vista del usuario, los diferentes criterios de este instrumento como técnica sociológica. En los resultados se observan cómo ven los estudiantes la contribución de la asignatura en la formación y consolidación de cualidades personales (valores), algunos de ellos declarados por la carrera.

Introducción

A pesar del intenso trabajo que en la Enseñanza Superior, se ha venido realizando en nuestro país, durante la década del 90, relacionado con el perfeccionamiento de los Planes y Programas de Estudios, es una realidad innegable que aun en el escenario educativo se presentan como protagonistas del proceso de enseñanza aprendizaje: al alumno como receptor de conocimientos y valores y al maestro como transmisor de estos. Esta tradición limita a los actores del proceso, los ubica en un aula de clases donde se realiza el rito secuencial de informar y repetir, esta forma de identificar a estos protagonistas excluye otros elementos que pueden aportar elementos valiosos, de tal magnitud que serían capaces de elevar el impacto de la eficiencia y la eficacia del proceso a niveles cualitativamente superiores.

La aplicación de métodos participativos, está estrechamente vinculado al compromiso de la universidad con la transformación del entorno, esta transformación es algo más que la entrega de conocimientos y la sensibilización alrededor de el mismo, se trata además de el análisis, valoración de los problemas, no basta con el hecho de conocerlos, sino como actuar para transformarlo, permitiendo desarrollar el proceso de conocimiento desde su dimensión *Acción - Reflexión - Acción.*

Este trabajo puede apoyarse o combinarse con la enseñanza a través de **proyectos,** sobre la que existen experiencias. Según María Eugenia Venegas R., profesora interina de investigación Educativa de la Universidad de Costa Rica, por su experiencia y de la búsqueda realizada, se entiende por proyecto al conjunto de acciones que se realizan de un tema de estudio o problema mediante procedimientos de investigación, para ser expuestos y juzgados mediante diversas etapas:

1. Proyecto de redescubrimiento.
2. Proyecto de aporte.
3. Proyecto de Innovación. (citados por Venegas, M,1990)

¿Qué es un Proyecto en una Disciplina Básica Específica?

- Es un problema, que sin ser un problema profesional, esté directamente vinculado con los mismos.
- y que requiere para su solución del desarrollo de las habilidades generalizadoras de la disciplina en su grado más próximo al problema profesional

Este estilo de trabajo es clave para el logro de una enseñanza científica significativa en el proceso de investigación, da posibilidad al docente a darle tratamiento especial a cada estudiante, la enseñanza se transforma en más participativa, técnicas que deben estar presentes (entre otras): *la discusión, el debate, confrontación de ideas, discernir, seleccionar, valorar.*

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores nos proponemos con este trabajo analizar una nueva concepción en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Modelos Económicos Matemáticos II en la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad de Holguín.

Desarrollo

El extraordinario desarrollo de la computación electrónica ha elevado notablemente la aplicabilidad y efectividad de la matemática aplicada a la Ingeniería Industrial y en correspondencia con ello la disciplina proporciona los conocimientos y habilidades necesarias para la utilización, en situaciones prácticas, de paquetes de programas para computadoras que permiten elevar la efectividad del trabajo del Ingeniero Industrial.

Por otra parte, los documentos sobre plan C de la carrera de Ingeniería Industrial y la revisión hecha sobre el diseño curricular sobre la base de actuación del profesional, diseñamos la asignatura atendiendo a: **Por qué**, **Para qué**, **Con qué** y **Cómo** derivados desde la profesión, carrera, disciplina, asignatura, tema. En la propia concepción del desarrollo de la asignatura se plantearon dos aspectos fundamentales que están en correspondencia con las nuevas tendencias en el plan C:

1. Lograr que la asignatura tributara a la estrategia de computación.
2. Que los estudiantes aprendan a aprender.

La asignatura MEMA-II, está encaminada al planteamiento y solución de problemas de programación dinámica, fundamentalmente en cuanto al enfoque, y de otros problemas presentes en la dirección, planificación y organización de las empresas y relacionados con los métodos heurísticos y la toma de decisiones secuenciales. Las conferencias (4 una por tema) estarán dirigidas a informar sobre la problemática de cada tema, la bibliografía a consultar y la orientación para la preparación de los seminarios evaluativos. Se planificarán actividades para desarrollar fuera del aula, con el objetivo de autoprepararse para dichos seminarios, actividades en los laboratorios con el mismo fin y los seminarios evaluativos que se desarrollarán en los laboratorios. La solución de los problemas se exigirá el uso del Excel para los cálculos y para resolver los problemas en situaciones de competencia, así como para los seminarios se exigirá el uso del Power Point.

Durante el desarrollo del experimento se le prestó atención al control del proceso el cual implica reunir información acerca del desempeño y realimentar con ello el sistema, pudiendo comparar los resultados reales con los planificados y decidir que hacer.

El control permite identificar los elementos perturbadores que provoquen desviaciones con respecto a las características deseables, el que debe realizarse dentro del proceso y mediante este.

En el proceso docente el control de la calidad juzga el valor de los recursos educacionales, comparando lo pretendido con lo conseguido, es un medio de diagnóstico, permite una acción posterior, es una alerta, permite identificar las perturbaciones que desvían la buena marcha del proceso.

En aras de medir el grado de satisfacción del experimento por parte de los estudiante se aplicó una encuesta. Para la misma se procedió de la siguiente forma:

La población del cuarto año de la carrera de Ingeniería Industrial, curso 1997-1998 es de 83 estudiantes, con tres grupos: 4.1, 4.2 y 4.3. Para realizar el estudio se decidió seleccionar una muestra, empleándose para ello la expresión siguiente, utilizada para el caso de poblaciones finitas:

$$n = \frac{4pqN}{d^2(N-1)+4pq}$$

donde:
n: Tamaño de la muestra
N: Tamaño de la Población
d: Error máximo permisible
p: probabilidad de éxito q = 1- p

Se tomó d = 0.1. Se calculó n (46) y se distribuyó proporcionalmente entre cada subgrupo (estrato) mediante la fórmula:

$$n_e = n * \frac{N_g}{N}$$

donde:
n_e : Tamaño de cada estrato.
N_g : Tamaño de cada grupo
N: Tamaño de la Población

Se obtuvo de esta forma la cantidad de estudiantes a encuestar por cada grupo:

Grupo 4.1 16 estudiantes
Grupo 4.2 16 estudiantes
Grupo 4.3 9 estudiantes

Del procesamiento de los datos obtenidos y relacionados con algunos indicadores evaluados, sobre todo los que tienen relación con los valores declarados por la carrera como son de compromiso, sentido de responsabilidad y profesionalidad y otros que por su importancia y objetivo de la investigación mostramos(Anexo I)

Conclusiones

Como conclusiones de esta primera parte de nuestra investigación, podemos afirmar que la Asignatura MEM II que reciben los estudiantes de Ingería Industrial en la Universidad con la concepción que se desarrolló, contribuye de forma satisfactoria y superior a la formación de valores en el futuro profesional, al cumplimiento de los objetivos declarados en el plan de estudio, así como al desarrollo de habilidades en la adquisición de conocimientos de forma independiente y a la posibilidad de usar la Computación como una herramienta indispensable para su actividad profesional.

Referencias bibliográficas

Escalona Ávila, Pedro, “Una alternativa para el desarrollo de la independencia cognoscitiva de los estudiantes en el proceso enseñanza aprendizaje”, ponencia presentada en RELME 13. UASD " Universidad Autónoma de Santo Domingo". República Dominicana. 1999.

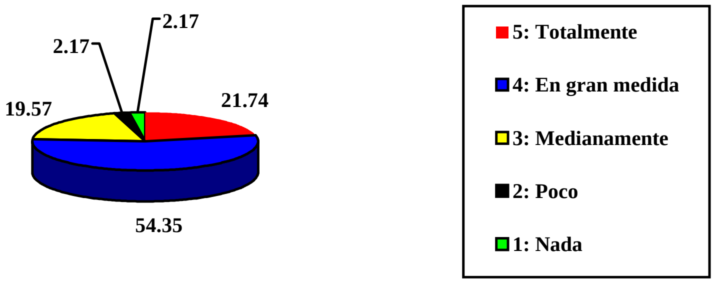
Jiménez Fallos Kemly, ¨ Metodología y Didáctica para los seminarios de Realidad Nacional ¨. Revista Universidad de Costa Rica. Educación. Página 111. Volumen 14. Nr.2. 1990.

Mariño Betancourt, Manuel, "Programa para la optimización de la formación matemática básica de profesionales de las Ciencias Técnicas", Tesis en Opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Cuba, 1997.

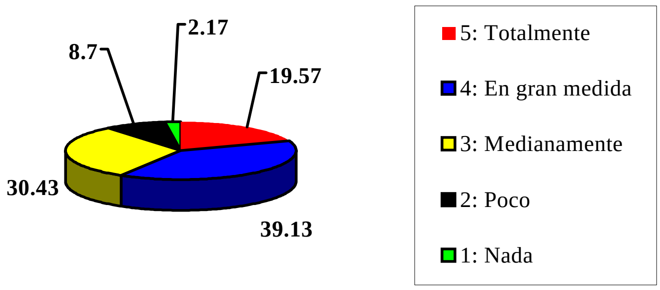
Venegas R, María Eugenia., ¨ Propuesta de Clasificación para tres modalidades de Proyectos Científicos. Revista Universidad de Costa Rica. Educación. Página 103-107. Volumen 14. Nr.2. 1990.

Anexo I

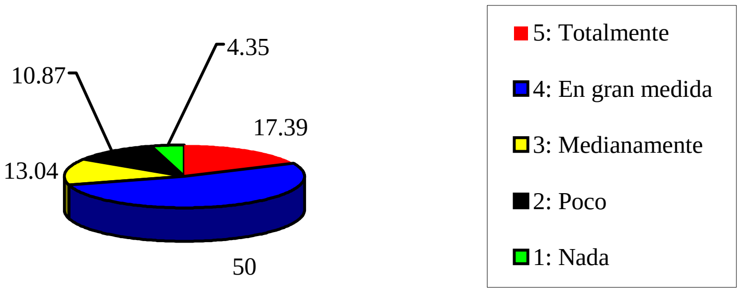
Capacidad para autosuperarse de manera continua en los avances de su futura profesión



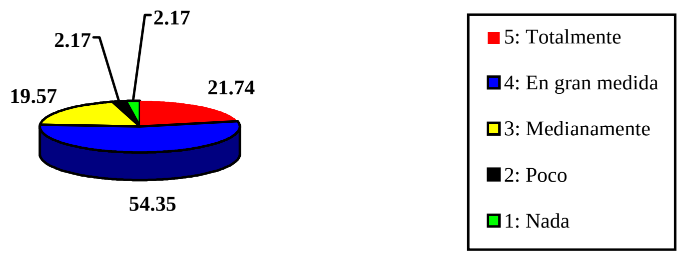
Independencia para el futuro trabajo profesional



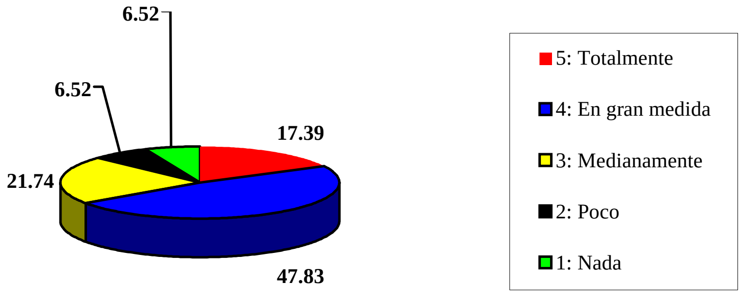
Habilidades necesarias para aplicar en futuras tareas profesionales



Capacidad para autosuperarse de manera continua en los avances de su futura profesión



Independencia Cognoscitiva



Representar: Una Habilidad Esencial en la Geometría Analítica del Espacio

Lic. María de los Angeles González Peñalver
mangeles @ civil.ispjae.edu.cu
Depto de Matemática, Facultad Ingeniería Civil
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echevarría
Cuba

Introducción

La asignatura Cálculo Diferencial e Integral I tiene 92 horas de clases dentro de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería Civil. Esta asignatura se ubica en el segundo semestre de primer año de dicha carrera, y está formada por los temas: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral (de una variable real) y Geometría Analítica del Espacio. Es el tema Geometría Analítica del Espacio la que ocupa nuestro interés y entrena a nuestros estudiantes en las representaciones espaciales de entes Geométricos a partir de las ecuaciones y viceversa. Desarrolla en los estudiantes habilidades que apoyan a la propia Matemática (tema de funciones de varias variables e integrales múltiples); Dibujo, Física, etc.

El mismo fue ubicado en nuestro estudio, como tercer tema de la asignatura por diferentes razones:

1. El tema de Cálculo Integral, presenta tradicionalmente dificultades en el proceso de aprendizaje y puede ser retomado, en el tercer tema, en las aplicaciones del Cálculo Integral, al Cálculo del área o volumen, de una región plana determinada por la proyección de un sólido.
2. Es un tema que presenta otro tipo de motivación, comparado con los temas anteriores.
3. El alumno se siente descansado de conceptos mucho más analíticos y abstractos, al aprender un gran apoyo Geométrico.

En tales circunstancias se ha pretendido organizar los contenidos del tema con un enfoque sistémico-estructural, partiendo de aquellos componentes teóricos del contenido que resultan esenciales y generales y son el hilo conductor del proceso de enseñanza-aprendizaje. Hemos definido las formas y métodos de enseñanza, permitiendo dedicar más tiempo al trabajo individual, conduciendo el proceso docente de forma tal, que los estudiantes tengan la posibilidad de valorar problemas, ir a la búsqueda de su solución, intercambiar experiencias y argumentar decisiones, contribuyendo al desarrollo de la expresión oral, escrita y de representación. Por otra parte, el profesor tiene la posibilidad de modelar tareas y simular situaciones que vinculen el objeto de estudio del tema, con la futura actividad del alumno.

El desarrollo del proceso de representación gráfica de problemas, constituye, conjuntamente con el de la creatividad y el del pensamiento lógico, uno de los logros a alcanzar en este tema ¿ y como se alcanza este entendimiento?
Con una buena formación básica que lo permita.

Objetivos

Con este trabajo pretendemos mostrar el diseño del tema Geometría Analítica del Espacio, de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral I para la carrera de Ingeniería Civil aplicando el enfoque sistémico-estructural así como las formas y métodos de enseñanzas utilizadas para llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje.

Desarrollo

En el enfoque sistémico-estructural, utilizado como forma para organizar los contenidos de este tema, se necesita que éstos sean distribuidos de tal forma, que se parta de las invariantes de conocimientos ó componentes teóricos del contenido de la enseñanza que resultan esenciales y generales y que son el hilo conductor de la dirección del proceso docente. Esto permite una nueva forma de organizar los contenidos, muy diferente a la forma organizativa tradicional, aunque se puede utilizar las mismas formas de enseñanza que habitualmente empleamos, como son, la Conferencia, Clases Prácticas, Seminarios, etc.

En tales circunstancias, los profesores deberán entender que su función no es la de simples transmisores o actualizadores de conocimientos, sino verdaderos entrenadores de habilidades intelectuales que propicien soluciones, para que los alumnos sean capaces de aumentar su poder para manipular sus conocimientos. Y para ello, estructuramos la impartición de las Conferencias, Clases Prácticas, Seminarios, Laboratorios, etc., utilizando los métodos activos de enseñanza, que se definen como vías, procedimientos y medios sistematizados de la organización y desarrollo de la actividad del grupo de estudiantes sobre la base de conocimientos no tradicionales de las posibilidades cognoscitivas y afectivas.

El enfoque sistémico-estructural, dado al tema de Geometría Analítica del Espacio se expone de forma esquemática como se muestra en la figura 1.

A: 1- Analizar las variables de la ecuación.
2- Analizar los coeficientes de la ecuación.

B: 1- Obtener interceptos.
2- Obtener trazas.
3- Determinar simetría.
4- Determinar secciones planas paralelas a los planos coordenados.
5- Obtener extensión.

C: 1- Determinar las características de un plano a partir de su ecuación.
2- Analizar las ecuaciones de una recta, obteniendo características de la misma.
3- Determinar característica y tipo de superficie, a partir de su ecuación.
4- Analizar las ecuaciones que definen una curva en el espacio.

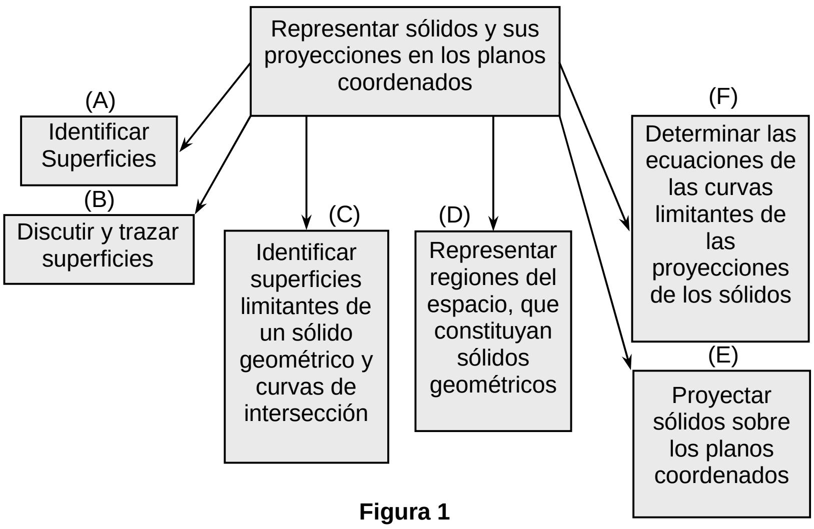


Figura 1

D: 1- Trazar varios planos en un solo sistema coordenado.
2- Trazar rectas de intersección.
3- Trazar planos y superficies en un solo sistema coordenado.
4- Trazar curvas de intersección.
5- Analizar y señalar los puntos que pertenecen al sólido a partir de las condiciones dadas.
6- Determinar los contornos del sólido.

E: 1- Utilizar los convenios para trazar los planos de proyección.
2- Señalar las trazas del sólido.
3- Dibujar las proyecciones de las curvas espaciales.
F: 1- Determinar interceptos de las curvas o rectas con los ejes Coordenados.
2- Determinar las ecuaciones de las trazas.
3- Determinar la ecuación de la proyección de una curva espacial.

Objetivos del tema.

Lograr que el estudiante pueda representar gráficamente un sólido, conociendo su expresión analítica así como realizar la proyección del mismo sobre los planos coordenados

Formas y métodos de enseñanza.

Actividad	Forma de enseñanza	Método a aplicar	Contenido
1	Conferencia orientadora	• Método Problémico • Conversación Heurística	Geometría Analítica del Espacio
2	Clase Práctica	• Discusión en Pequeños Grupos • Discusión Plenaria	Discusión y trazados de planos y rectas en el espacio
3	Clase Práctica	• Discusión en Pequeños Grupos • Discusión Plenaria	Discusión y trazado de superficies cuadráticas en el espacio
4	Taller	• Técnica de la Rejilla • Discusión Plenaria P.N.I	Trazados de sólidos
5	Taller	• Trabajo Independiente	Trazados de sólidos, sus proyecciones
Entrega de Trabajo Extraclase. Recogida el día de evaluación de este tema			

Breve descripción de cada actividad

Conferencia orientadora. (Actividad # 1)

Sumario:

- Sistema coordenado Rectangular en R^3
- Interceptos con los ejes coordenados.
- El plano.
- Superficies cuadráticas.
- Curvas en el espacio.
- Sólidos y sus proyecciones.

En esta conferencia, a partir de la representación gráfica de un sólido, el profesor representará el problema (método problémico) de forma escrita al los estudiantes. Bien en una pancarta, dibujado en una pizarra o utilización del retroproyector.
Esta forma de presentación permitirá a los estudiantes analizar, meditar individualmente, para dar respuestas a preguntas como estas:

¿Qué conceptos tendremos que aprender, para conociendo la expresión analítica de un sólido, poder llegar a representarla gráficamente como aparece ante ustedes?

Se acompaña instrucciones en las que se orienta el análisis de las causas y condiciones que ocasionaron el surgimiento del problema y se pregunta acerca de cómo creen que se pueda dar solución.

Esta variante tiene un propósito motivacional, se insta al estudiante a analizar y evaluar determinada situación presentada, como ilustración del contenido que se imparte.

El profesor comenzará a dar respuesta a las preguntas planteadas, como una situación a resolver, desarrollando los contenidos del sumario sobre la base de la participación de los estudiantes, utilizando la Conversación Heurística, para que ellos puedan plantear sus puntos de vistas y experiencias basadas en los contenidos objeto de estudio y polemizar con criterios novedosos.

El docente por su parte, tiene la responsabilidad de desarrollar el tema de forma tal que encierre una contradicción lo suficientemente interesante, para que despierte el interés de participar con sus criterios los alumnos.
Se orienta que se discutan los elementos que encierra una expresión como esta:

$$A = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 ; 0 \leq x \leq y ; y \geq 0 ; z \geq 0\}$$

Para buscar finalmente la correspondencia qué existe entre la discusión de cada concepto y el trazado que aparece en pizarra u otro medio durante el desarrollo de la Conferencia Orientadora.

Quedará bien clara la metodología a seguir para discutir y trazar el sólido, dada su expresión analítica y se formarán los equipos con vistas a la Clase Práctica así como el contenido a investigar (Búsqueda Parcial). Se formarán 5 equipos de 4 alumnos cada uno y el contenido que le corresponda a investigar y estudiar por cada equipo se les entregará en tarjeta.

El objetivo de la actividad docente siguiente, consiste en discutir y trazar planos y rectas en el espacio, dada su expresión analítica. Cada equipo tendrá la información necesaria con el siguiente contenido, para diferentes funciones. Por ejemplo:

Dada a) x+y+z=16 b) 3x+2y=14 c) 8y=4 d) z=3 e) x+y+3z=14; 9x+6y-3z=9
Represente cada uno de los planos y la recta del inciso (c)

Clase Práctica (Actividad # 2)

Los equipos formados en la actividad anterior, se reunirán para discutir los trabajos que cada uno de sus integrantes preparó para cada una de esta actividad. Tanto la exposición como las preguntas orales, girarán entorno al los aspectos siguientes:

Dada diferentes expresiones analíticas de planos y rectas, describir la posición de cada plano, por las características de sus ecuaciones y llegar a una organización conceptual de los pasos necesarios para representar una recta en el espacio.

Seleccionar el trabajo de mayor calidad que servirá para representar al equipo en la exposición. En este momento se le solicitará a dicho equipo, que represente la recta en el espacio.

Actividad en el plenario. Constará de dos momentos: el primero para aprobar los indicadores de evaluación y el segundo de exposición de trabajos y discusión colectiva.

En esta actividad es muy importante la labor que desarrollen los estudiantes que tienen asignado roles específicos, como el registrador (que tiene a su cargo la responsabilidad de resumir los indicadores de evaluación, los aspectos interesantes e la discusión y los resultados de las conclusiones a que se llegue.

Esta actividad se evaluará aplicando un P.N.I donde seguramente surgirán aspectos que permitirán establecer el desarrollo de futuras actividades docentes.

Clase Práctica (Actividad # 3)

Similar a la Actividad #2 (superficies cuádricas y curvas)

Taller (Actividad # 4)

Objetivo: Desarrollar habilidad para representar sólidos, dado un conjunto, aplicando los conceptos estudiados, así como algunas de sus propiedades y características.

Desarrollar habilidades para seleccionar toda la información obtenida y proceder al trazado de dicho sólido.

Se formarán 5 equipos de 4 estudiantes cada uno, formándose la Rejilla de la siguiente manera:

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Al inicio del Taller, se explicará al grupo, que esta técnica se compone de dos momentos desiguales de trabajo. Un primer momento, en que cada equipo abordará un mismo ejercicio y se formará con los números que quedaron de la misma columna. Un segundo momento, en que los equipos se forman pro filas, quedando en el mismo, representantes de cada uno de los equipos tomados verticalmente y por lo tanto se discutirá y analizarán todos los ejercicios que se proponen para la actividad. Cada miembro de los equipos del primer momento tiene la responsabilidad de resolver correctamente el ejercicio asignado y entenderlo a tal punto que pueda explicarlo en el segundo momento.

En el segundo momento, que se reorganizan los equipos en sentido horizontal, cada equipo tiene representantes de todos los anteriores. Por lo tanto, tienen resueltos todos los ejercicios. Una vez finalizada esta etapa, se constituye el plenario y se selecciona al azar o se designa el equipo que dará la versión general de las soluciones de los ejercicios a partir de la cual se procederá al debate y análisis de conjunto.

Esta forma de actividad se planificará con anterioridad para un tiempo que permita llegar al plenario para la representación de 3 sólidos, haciendo que varíe el trabajo de cada equipo del primer momento, por lo tanto la técnica de la Rejilla se aplicará 3 veces.

Al finalizar la actividad, el profesor insistirá en aspectos importantes del tema tratado y pedirá opiniones para la evaluación de la técnica utilizada. Veamos un ejemplo de ejercicio para esa Actividad:

Equipo A (1,6,11,16)

Dado el siguiente sólido:

$$M = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 \leq 16 \,;\, 2x \leq y \,;\, y \geq 0 \,;\, 0 \leq z \leq 4 \,;\, x \geq 0\}$$

a) Identifique cada una de las superficies que intervienen en el sólido M.
b) Represéntelas gráficamente en un sistema coordenado.

c) Obtenga las curvas de intersección dos a dos.
d) Determine el sólido M.

Taller (Actividad # 5)

Objetivo: Desarrollar habilidad para representar sólidos y proyectarlos sobre los planos coordenados.

Esta actividad se trabajará de forma individual, tratando de adiestrarlos en la concentración y soledad ante la solución de un problema. Esta actividad fue orientada y preparada con un estudio que permitirá enfrentar dicha experiencia. Tiene el propósito de prepararlos para la evaluación parcial del tema, que precede al examen final de la asignatura. Es por ello muy importante la labor individual y al final la confrontación de los resultados, aclarándose las dudas y errores cometidos. Este es un momento, donde se muestra la asimilación del conocimiento, donde existe un grado mayor de conciencia o reflexión. Se busca un determinado grado de independencia.

Finaliza la actividad con la confrontación de los resultados a través de alumnos que obtuvieron resultados acertados en cada ejercicio y se orienta el Trabajo Extra-Clase, que será entregado por los alumnos el día de la Evaluación Parcial de dicho tema.

Estos ejercicios están orientados a reafirmar conceptos e identificar superficies, dada su ecuación en el primer Octante.

Conclusiones

Este trabajo es el resultado de la aplicación de dos cursos consecutivos, 1997-98; 1998-99, donde los resultados académicos de dicho tema han ido aumentando significativamente de forma positiva. La aplicación de diversidades de métodos didácticos, transformaciones esenciales en la impartición de las clases tradicionales, en los diseños de los contenidos y otros muchos elementos más, favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje. De un lado el docente, que además de ser un experto en su disciplina, necesita conocer las técnicas y medios didácticos que pueden ser implementados con los grupos. Por el lado del alumno, se le exige una participación y actividad a la que no está acostumbrado tradicionalmente. La instrumentación de estos temas utilizando métodos y técnicas participativas, permite al docente desarrollar una labor eficiente, creativa y directriz. Si se desea que el estudiante desarrolle habilidades para representar, en la Geometría Analítica del Espacio, es necesario un enfoque diferente de la enseñanza y el aprendizaje tradicional.

Referencias bibliográficas

"Los métodos participativos. Una nueva concepción de la enseñanza"? Colectivo de autores. Departamento de Pedagogía y Psicología del CEPES. Universidad de la Habana. Cuba.

Arcos Ismael; "Influencia del uso de un lenguaje geométrico en el aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo". IV Seminario Nacional de investigación en Didáctica del Cálculo, Monterrey, N; L. Mayo de 1993.

Articulo: La dirección del proceso de aprendizaje. Miembros de la Academia de Ciencias Pedagógicas de Rusia. A. R. Luria.

Texto: Geometría Analítica. José Calderón y otros.

"Utilización del Mathematica en la impartición de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"

Valentina Badía Albanés
valia@rsrch.isctn.edu.cu
Departamento de Física General y Matemática
Instituto Superior de Ciencias y Tecnología Nucleares
Cuba

Resumen

Poco a poco, el uso de Sistemas Algebraicos Computacionales va ganando terreno en la docencia. El presente trabajo es la continuación de lo que se está haciendo desde hace dos años con la utilización del sistema *Mathematica* como complemento al curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se brindan ejemplos concretos de actividades en el laboratorio computacional, se discute la experiencia de aplicación y los resultados que se alcanzan en el nivel de comprensión de la asignatura por los estudiantes.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se han enseñado tradicionalmente como un catálogo de recetas para la solución algebraica de ejemplos integrables clásicos. Sin embargo, las reformas curriculares en muchos países, en lo que se refiere a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, tienden a disminuir el énfasis tradicional en técnicas analíticas especializadas de búsqueda de soluciones exactas y a aumentar el uso de la tecnología para incorporar métodos cualitativos y numéricos de análisis.

Se investigan estrategias de enseñanza que tratan de coordinar desde un inicio los enfoques algebraicos, numéricos y gráficos con la solución de las ecuaciones diferenciales asociadas. En este trabajo presentamos una alternativa del uso de las técnicas de computación con diferentes propósitos y además analizamos especialmente el papel que puede jugar la visualización.

Marco Teórico

El marco teórico general en que se inserta la investigación se basa en la perspectiva que intenta coordinar la perspectiva cognitiva individual del constructivismo con la concepción del proceso de enseñanza - aprendizaje desde un enfoque histórico cultural. Así, el aprendizaje de la Matemática es visto "como un proceso individual de construcción activa y un proceso de inculturación en las prácticas matemáticas de la sociedad".

Un marco teórico más específico, lo constituyen las ideas aparecidas en la literatura sobre la utilización de la computadora en la enseñanza, la necesidad de acercarse al enfoque numérico y de apoyarse en la visualización para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Objetivos de la Investigación

Como objetivo general puede enunciarse la elaboración de una propuesta didáctica para aumentar la efectividad del aprendizaje de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias basada en el uso de la informática y de métodos didácticos de desarrollo del pensamiento matemático.

Fue necesario realizar las siguientes tareas:

- Valorar las unidades de la asignatura en que es más factible la introducción de los métodos propuestos.

- Diseñar laboratorios computacionales con el uso del *Mathematica.*
- Experimentar con los estudiantes las clases de laboratorio diseñadas y valorar los resultados obtenidos.

Metodología

Para el diseño de los laboratorios se comenzó con el análisis del programa de la disciplina y de la asignatura, se tuvieron en cuenta sus objetivos generales instructivos y educativos, los contenidos, las indicaciones metodológicas, el perfil del graduado, así como las características del software a utilizar.

Usando la experiencia acumulada en la impartición de esta materia durante varios cursos académicos, se realizó un análisis de los conocimientos y de las dificultades de los estudiantes, así como de los contenidos de la asignatura donde el uso de la tecnología podía ser más provechoso.

Durante el desarrollo de las clases, la profesora, a través de la observación, fue ganando elementos de juicio y valoraciones sobre el diseño y ejecución de las actividades. Posterior a la experiencia, fue realizada una encuesta a los estudiantes que participaron en los laboratorios. Además se efectuaron entrevistas a la mayoría de los alumnos, las mismas fueron grabadas.

El método de investigación empleado fue el de análisis para determinar las características del diseño a realizar y el método empírico-experimental para la valoración de las actividades diseñadas y ejecutadas.

Ideas generales sobre el diseño de los laboratorios

El profesor es el diseñador de las actividades donde el contenido matemático es el objetivo central. La estructuración de las actividades de aprendizaje es crucial para lograr alguna reorganización cognitiva. Las situaciones deben ser cuidadosamente diseñadas tomando en cuenta las limitaciones y las potencialidades de la herramienta computacional. La elección de las aplicaciones presentes en la actividad y su articulación deben contribuir a perfeccionar la experimentación.

En nuestro caso concreto, no vamos a utilizar la tecnología para introducir conceptos nuevos, sino para experimentar con conceptos estudiados anteriormente, manipularlos, visualizarlos y llegar a una mejor comprensión y a una conceptualización más rica. En otras palabras, pretendemos hacer la diferencia entre qué se aprende y qué tan bien es aprendido.

Para garantizar la efectividad de la clase de laboratorio debe contarse con el suficiente número de computadoras, aunque no hace falta tener una computadora por alumno, pues podrían trabajar dos estudiantes por máquina. Además el tiempo de máquina debe ser suficiente para culminar la actividad y las condiciones en el salón de clases deben permitir la discusión colectiva.

Durante la discusión de las actividades, tanto el tipo como la secuencia de las preguntas que haga el maestro son importantes para el desarrollo de las habilidades cognoscitivas. Toda la secuencia de preguntas del profesor determinará la calidad del pensamiento que se da en la respuesta.

El contexto experimental

El contexto aquí es el nivel universitario. Los estudiantes cursan el cuarto semestre de la especialidad Licenciatura en Física Nuclear.

Entre todas las asignaturas de la disciplina Matemática, se escogió la materia Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como plataforma para realizar el estudio. En este momento, los estudiantes ya han vencido dentro de la disciplina Matemática, los cursos de Álgebra, Geometría Analítica y Análisis Matemático. Han recibido cursos de programación en lenguajes de alto nivel. Están cursando paralelamente un curso de Métodos Numéricos. Además la elección se fundamenta en que el propio objeto de estudio de la asignatura brinda un marco apropiado y da inmensas posibilidades para el empleo de ideas creativas, novedosas, para la exploración numérica y para el análisis e interpretación de resultados.

El escenario

La experiencia se realizó con un grupo de doce estudiantes. Los estudiantes cumplimentaron los laboratorios en parejas, aunque no necesariamente se mantuvo la misma pareja en cada actividad. Estaban lo suficientemente cercanos unos de los otros, para que pudieran interactuar libremente, aún en el caso de que no trabajaran en la misma computadora. La duración de cada laboratorio fue de dos horas.

El salón de clases tiene un pizarrón ubicado al frente, que se utilizó para brindar algunas instrucciones y como apoyo durante la discusión colectiva. Se tomaron notas de campo de lo que aconteció durante el desarrollo de las clases. Tan pronto como fue posible después de cada clase, se escribió un sumario que recogía los detalles de las sesiones.

Descripción de los laboratorios

Fueron diseñadas varias actividades de laboratorio con el uso del *Mathematica* (versión 3.0), que tratan los diferentes contenidos del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.. Las sesiones de trabajo con el *Mathematica* se planificaron al término del tema: “Sistemas de ecuaciones diferenciales”. A continuación, presentaremos el enfoque de una manera concreta. Nos referiremos sólo a los momentos más importantes de las sesiones. Ejemplificaremos con tres clases de laboratorio:

Clase de laboratorio N 1: *Tipos simples de puntos de reposo de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con coeficientes constantes.* Esta actividad fue diseñada como clase tipo demostrativa. Estuvo dedicada al estudio de los **tipos simples de puntos de reposo** de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos.

Uno de los objetivos de este episodio fue brindar la primera experiencia de trabajo de los estudiantes con el *Mathematica*. Otro objetivo, más relacionado con los contenidos de la asignatura fue la realización del análisis de los retratos de fase de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y la clasificación de los puntos de reposo según la disposición de las trayectorias.

Se analizaron los comportamientos esperados de x(t) e y(t) en cada sistema cuando $t\to\infty$ y se vinculó este análisis con la forma de las trayectorias y con la cuestión de la estabilidad. Estas ideas fueron confrontadas con la solución analítica que brindaba el *Mathematica* y con los gráficos de diferentes soluciones en el plano de fases.

La profesora estimuló la exploración, a través de preguntas, tales como: ¿Habrá intersección de las trayectorias?, ¿ Qué es un punto de reposo?,¿ Qué significa que el punto de reposo es estable/ inestable?, ¿Por qué las trayectorias tienen una forma determinada?. Los estudiantes lograron una mayor comprensión sobre: el teorema de existencia y unicidad, el concepto de estabilidad y el teorema global de la estabilidad.

Se dedicó especial atención a la interpretación de los gráficos. Por ejemplo, un estudiante comentó que los gráficos de la figura 1 a) y de la figura 1 b) eran cualitativamente iguales. ¿Cómo saber si las trayectorias se alejan o se acercan al origen?. Desde el punto de vista de la estabilidad, la pregunta sería: ¿puede tenerse alguna idea sobre la estabilidad del punto de reposo, por simple inspección del gráfico?. Esto fue ampliamente discutido, llegándose a sugerencias concretas.

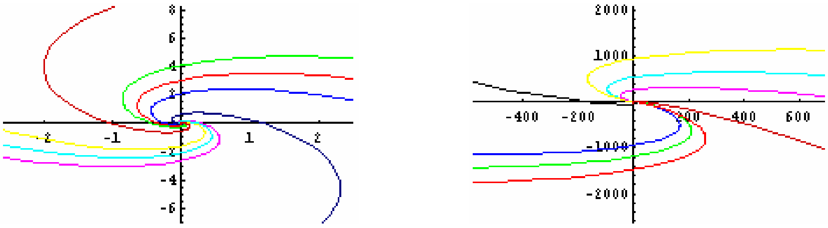


Figura 1. Orbitas para un punto de reposo:
a) asintóticamente estable (foco estable); b) inestable (foco inestable)

Clase de laboratorio N 2: Uso del paquete *Mathematica* en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. La clase contemplaba la resolución por métodos analíticos de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (homogéneas y no homogéneas), así como la búsqueda de soluciones generales y particulares de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de dos y tres variables. Esta actividad requirió de la participación más activa de los estudiantes. Durante la realización de un ejercicio consistente en la ecuación diferencial para el oscilador lineal unidimensional, se dedicó un espacio de tiempo al análisis del significado de la trayectoria en el plano de fases(ver figura 2).

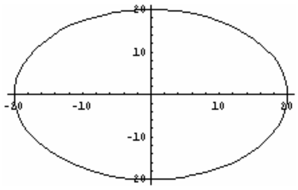
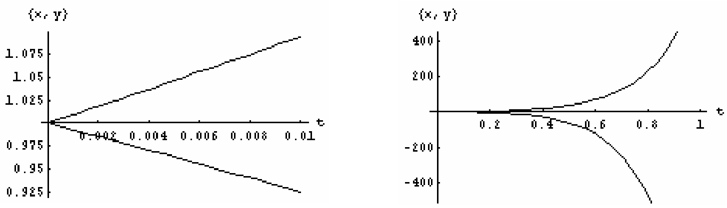


Figura 2. Diagrama de fases para la solución de la ecuación del oscilador lineal unidimensional, $x''+\omega^2x=0$.

No todos los estudiantes establecían las conexiones entre el modelo matemático de la situación física y lo que está representado en el gráfico de la figura 2. Por ejemplo, qué estados del sistema representan los puntos (20,0) ó (0,20). La mayoría de los estudiantes no interpretó que una coordenada representaba la velocidad y la otra la amplitud de las oscilaciones, y que por lo tanto, éstos son puntos donde una magnitud alcanza su valor máximo, mientras que la otra se anula.

Otro momento importante de la clase fue cuando se graficaron las dependencias temporales *x(t)* e *y(t)* para dos intervalos de variación de la variable independiente: $t \in [0; 0{,}01]$ y $t \in [0{,}1]$. Si se observa la figura 3 a), puede pensarse que la dependencia es lineal, sin embargo, al graficar para un intervalo mayor (figura 3b), se evidencia que sólo se trataba de linealidad local. En este punto se habló sobre el enfoque visual a la noción de diferenciabilidad, es decir, el gráfico de una función diferenciable ampliado infinitamente, se ve como una línea recta.



a) b)

Figura 3. Gráficos de *x(t)* e *y(t)* para dos intervalos de variación de la variable independiente:
a) $t \in [0; 0{,}01]$; b) $t \in [0{,}1]$.

Clase de laboratorio N 3: Resolución *numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales*. Trató sobre la **resolución por métodos numéricos** de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales. La proposición de problemas que no tienen solución analítica permitió explotar la posibilidad de irse más allá de lo que normalmente se hace en el aula y alejarse de los problemas estereotipados que aparecen en los libros de texto. Los estudiantes investigaron la sensibilidad de tales sistemas no lineales a las condiciones iniciales y a la variación de los parámetros del modelo.

Al resolver la ecuación del péndulo no lineal amortiguado para tres condiciones iniciales diferentes y obtener las trayectorias en el plano de fases, los alumnos observan que en todos los casos hay estabilidad asintótica, pero las trayectorias se enrollan alrededor de diferentes puntos:*(0,0), (2π, 0), ...(2kπ,0)* (figura 4).

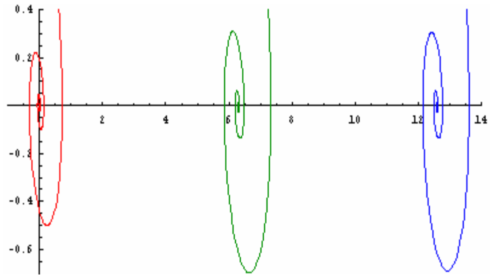
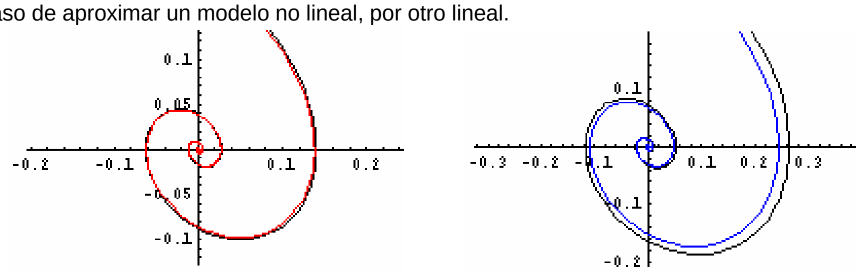


Figura 4. Orbitas de la ecuación del péndulo no lineal amortiguado, *x''+0.5 x'+x= 0*, para tres condiciones iniciales diferentes.

Los estudiantes observan que la segunda coordenada siempre es cero, lo cual quiere decir que el péndulo se detiene, esto es esperado. Pero, ¿qué significa que la primera coordenada sea igual a 2π, 4π, ... 2kπ?. Finalmente ellos mismos concluyen que lo que ha ocurrido es que el péndulo da 1,2, ... k vueltas completas alrededor del punto fijado, en dependencia de la velocidad inicial que se imprime.

Los estudiantes, bajo la guía de la profesora, discutieron sobre la influencia de las condiciones iniciales en estas ecuaciones no lineales y sobre el significado físico de los atractores (en ausencia de fuerzas externas, el péndulo se detiene).

La comparación de los retratos de fase de las soluciones de la ecuación del péndulo lineal amortiguado y del péndulo no lineal (figura 5 a) se utilizó productivamente para el análisis de la validez de la sustitución bajo determinadas condiciones de un modelo no lineal por otro lineal (la sustitución de la función *sen x* por la función lineal *x* para pequeños valores del argumento). Al repetir la experiencia para la condición inicial x(0)=1 (la amplitud $\cong$ 57°), los gráficos resultaron muy diferentes (figura 5 b), concluyéndose sobre lo desafortunado en este caso de aproximar un modelo no lineal, por otro lineal.



a) b)

Figura 5. Diagrama de fases de los sistemas *x''+0.5x'+x=0* y *x''+0.5x'+sen x= 0* para las condiciones iniciales: a) x(0) = 0 e x'(0) = 1, b) x(0) = 1 e x'(0) = 1

Para estudiar la posibilidad de que surjan soluciones periódicas aisladas, se examinó como modelo, el sistema diferencial no lineal siguiente:

$$dx/dt = -y + x\,(1 - x^2 - y^2),$$
$$dy/dt = x + y\,(1 - x^2 - y^2).$$

Se sugirió la exploración de las trayectorias en el plano de fases para tres condiciones iniciales diferentes: partiendo de un punto ubicado en la circunferencia unidad, partiendo de uno ubicado dentro y de otro ubicado en el exterior de ésta. En la figura 6, se reflejan los retratos de fase obtenidos. De la inspección de éstos, algunos estudiantes concluyeron que cuando $t \to \infty$, las trayectorias alcanzan la circunferencia unidad.

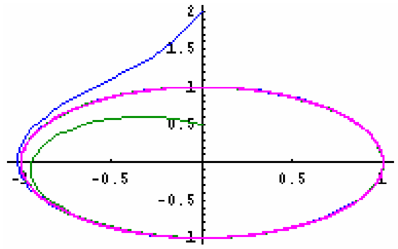


Figura 6. Retratos de fase del sistema para tres condiciones iniciales diferentes.

Sin embargo, se analizó que este sistema puede resolverse por métodos analíticos a través de la introducción de un nuevo sistema de coordenadas, lo que permite demostrar que contrariamente a la impresión que nos brinda el gráfico, existe una única trayectoria cerrada aislada. En este caso la observación del gráfico condujo a errores de interpretación.

Discusión de la experiencia de aplicación

Fueron coleccionados datos a partir de la observación del grupo durante la fase de experimentación, de una encuesta aplicada al grupo y de entrevistas a algunos de los estudiantes. Lo siguiente brinda una idea acerca de la relación de los estudiantes hacia el experimento:

- La mayoría usaba el software por primera vez, por lo que acogieron la tarea con entusiasmo.
- Los estudiantes se mostraron muy motivados durante la realización de las actividades, en particular de la tercera, surgieron muchas ideas e interrogantes que ellos fueron capaces de explorar e investigar por sí mismos.
- Las dificultades de manipulación observadas en un comienzo, desaparecieron progresivamente.
- El tiempo adicional dedicado a lograr un acceso efectivo a la herramienta computacional, aseguró una relación eficiente con el software durante las actividades posteriores.

Desde una perspectiva cognitiva individual, fueron encontrados obstáculos que influenciaron el desarrollo de la comprensión de los estudiantes: la complejidad vinculada a los sistemas dinámicos no lineales y la complejidad relacionada con las interpretaciones de los gráficos, fundamentalmente de los diagramas de fase.

Desde una perspectiva sociocultural, la comprensión de los estudiantes estuvo limitada por el uso de tecnología en cierta medida desconectada del proceso de aprendizaje: fue la primera experiencia del uso del *Mathematica* para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos y el número de actividades programadas aún resulta insuficiente.

Conclusiones

Con el trabajo presentado pretendemos contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el nivel superior a través de la formulación de una propuesta metodológica para la introducción del uso de la computadora en la impartición de las Ecuaciones Diferenciales. Los resultados de su puesta en práctica, han permitido valorar la efectividad de la misma para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Hemos arribado a las siguientes conclusiones:

- La transformación de la computadora en un instrumento matemático para los estudiantes, implica un complejo proceso que no conduce necesariamente a una mejor comprensión de la Matemática.
- Los profesores deben integrar la computadora como una herramienta heurística, pedagógica y cognitiva, pues esta integración no es espontánea.
- Las observaciones de los estudiantes usando las computadoras, ilustran que la transformación de la computadora en un instrumento matemático eficiente varía de estudiante en estudiante, según los perfiles de éstos.
- Las interacciones de los estudiantes y el discurso matemático son cualitativamente diferentes y más ricas en un medio computarizado.

El trabajo realizado ha brindado a la autora la oportunidad para obtener criterios, valoraciones, puntos de vista significativos, ganar comprensión sobre la complejidad de la tarea que se acometió y permite dar respuesta parcial y no acabada a la pregunta: ¿Cómo organizar la introducción de la computación para convertir las computadoras en instrumentos matemáticos eficientes en la enseñanza de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias?

Sin embargo, los resultados del trabajo permiten confirmar que: *El uso de la computación en la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias contribuirá al aumento de la efectividad del aprendizaje de los estudiantes.*

Referencias bibliográficas

Beltrami, E. (1987) *Mathematics for Dynamic Modeling*. Academic Press, Inc.

Dubinsky, E. & Tall D. O. (1991) *Advanced Mathematical Thinking and the Computer*. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, pp. 231-244.

Guzmán, M. de (1997). *El Rincón de la Pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Ediciones Pirámide.

Hillel, J. (1991) *Computer algebra systems as learning tools*. International Reviews on Mathematical Education. ZDM ,No.5.

Rasmussen, C.L. (1998) *Reform in Differential Equations: A Case Study of Students' Understandings and Difficulties.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Tall,D. O. (1987) *A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods* . Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. UK.

Wolfram, S. (1991) *Mathematica: A system for doing Mathematics by computer*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Acerca de las relaciones entre errores algebraicos y obstáculos epistemológicos

Juana Inés Pérez Zárate
UAEH – MEXICO
Carlos Rondero Guerrero
UAEH – CINVESTAV – MÉXICO

El presente proyecto tiene como objetivo profundizar en el estudio y caracterización de los errores algebraicos, en estudiantes del nivel medio superior en situación escolar. Partiendo de dos obstáculos epistemológicos conocidos:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$$

se busca que los estudiantes construyan aprendizajes significativos, utilizando éste como elemento teórico que hacemos intervenir explícitamente en el diseño y aplicación de situaciones de aprendizaje, que contengan representaciones numéricas, gráficas y analíticas.

Introducción

En una primera etapa del presente trabajo de investigación, se realizó una clasificación de los errores algebraicos en estudiantes del tercer grado de secundaria, en esta segunda etapa, se tiene como objetivo profundizar en el estudio y caracterización de los mismos en estudiantes del nivel medio superior en situación escolar.

Al estar trabajando en la segunda etapa surgió una pregunta de investigación ¿es posible a partir de algunos obstáculos epistemológicos construir aprendizajes significativos de saberes algebraicos?

Es así como nos dimos a la tarea de diseñar situaciones de aprendizaje que partiendo de dos obstáculos epistemológicos conocidos $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$, posibiliten a los estudiantes el darle significación y sentido al llamado binomio al cuadrado, todo ello enmarcado dentro de las representaciones, numérica, gráfica y algebraica.

Hemos puesto en experimentación dos diferentes situaciones de aprendizaje, con estudiantes de bachillerato, las cuales fueron videograbadas, con la finalidad de tener más elementos de carácter cognitivo, que permitan hacer ajustes a los diseños, de tal que manera que la siguiente etapa será su puesta en escena en situación escolar.

Enmarcamiento teórico

Tomando como base los fundamentos epistemológicos de Popper (1998), una de sus tesis centrales es *toda parte de nuestro conocimiento por tradición es susceptible de examen crítico y puede ser abandonado*, es decir, la mayoría de las cosas que aprendemos son por el ejemplo, o bien, porque las hemos escuchado o leído previamente, por consiguiente en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, el error está presente de manera ineludible.

Por su parte Bachelard (1983), refiere que *la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación.* De manera que el obstáculo epistemológico lo considera como un constituyente importante en la construcción y avance de nuevos conocimientos.

El mismo Bachelard (1983), señala: *en la educación, la noción de obstáculo epistemológico es igualmente desconocido, son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión.*

Al situarnos precisamente es en el ámbito de la enseñanza del Álgebra, nos ha interesado utilizar la noción de obstáculo epistemológico, como punto de partida para el estudio, sistematización, análisis y explicación de algunos errores que se presentan más frecuentemente en el pensamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato.

Como lo menciona Rico et al (1995),
". . . cabe señalar que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, que surgen en un marco conceptual consistente, y que es necesario modificar la tendencia a condenar los errores culpando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje, ". . . todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, como consecuencia de las reflexiones anteriores admitimos que a partir de sus errores los jóvenes aprenden distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente".

Estas consideraciones nos llevan precisamente a darle sentido a esta investigación, ya que en el diseño de la misma situación de aprendizaje se están considerando los errores más comunes y se busca que los estudiantes tengan más control y previsión sobre los mismos, para ello se hacen intervenir explícitamente las representaciones numéricas, gráficas y analíticas utilizando como punto de partida el obstáculo epistemológico como elemento teórico.

Aprendizaje significativo

Siempre que al individuo se le prepara para que aprenda nuevos conocimientos, recurre a una especie de anclaje para relacionarlos o conectarlos con los conocimientos previamente adquiridos, es decir, existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción de conocimientos. Las motivaciones dependen de dichas estructuras y un cambio de motivación compromete una modificación de estructuras cognitivas que Ausubel (1989), utiliza para designar el conocimiento de un tema determinado, organizándolo de manera clara y garantizada.

Debemos tomar en cuenta que los errores aparte de que se presentan de manera sistemática, aparecen como un elemento común, generador de nuevos conocimientos, y que además éstos, sean genuinos.

A diferencia del aprendizaje memorístico o repetitivo, el aprendizaje significativo, por el contrario, tiene lugar cuando se intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos y los ya existentes en los estudiantes, o con alguna experiencia anterior, de esta manera construyen su propio conocimiento en la medida que están interesados y decididos a enfrentar nuevos retos de aprendizaje.

Lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es un proceso activo y personal. La clave del aprendizaje significativo está en establecer una relación entre el nuevo material y las ideas ya existentes en la estructura cognitiva de los alumnos. Cuando el estudiante muestra interés en dedicarse a un aprendizaje en el que intenta dar sentido a lo que aprende, hay consecuentemente una tendencia del alumno al aprendizaje significativo.

Aprovechando el estudio realizado por A. Sierpinska (1994) desde la filosofía de los obstáculos epistemológicos, ella afirma que *el conocimiento no es un proceso acumulativo, debe lograrse mediante una reorganización de entendimientos previos* y que *los obstáculos epistemológicos son inevitables, necesarios para lograr un buen entendimiento.*

Metodología

- La presente investigación se inició realizando una clasificación de los errores algebraicos en estudiantes del tercer grado de secundaria.

- Posteriormente, al tener como objetivo profundizar en el estudio y caracterización de los mismos, sólo que ahora en estudiantes del nivel medio superior, se diseñaron situaciones de aprendizaje y cuestionarios, partiendo de dos obstáculos epistemológicos conocidos, que son: $(a+b)^2 = a^2 + b^2, \sqrt{a^2+b^2} = a+b$, mediante las cuales se busca que los estudiantes construyan aprendizajes significativos de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y de $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ precisamente se parte del obstáculo epistemológico como elemento teórico que hacemos intervenir explícitamente en el diseño y aplicación de dichas situaciones de aprendizaje, que contienen representaciones numéricas, gráficas y algebraico-analíticas.
- El siguiente paso consistió en experimentar con las dos situaciones de aprendizaje y la aplicación de cuestionarios con dos estudiantes de bachillerato que cursan el cuarto semestre en diferentes escuelas.
- El análisis de las entrevistas videograbadas nos ha dado elementos de carácter cognitivo para hacer los ajustes necesarios que posibilitarán el rediseño de las situaciónes de aprendizaje y su puesta en escena en grupos de estudiantes de bachillerato en situación escolar.

Hipótesis de trabajo

"En el diseño de las situaciones de aprendizaje consideramos a los obstáculos epistemológicos como punto de partida para la construcción de aprendizajes significativos de $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$, buscando de ese modo que los estudiantes tengan control sobre sus procesos, como acción preventiva de errores"

En este caso partimos de los obstáculos epistemológicos ampliamente reportados en diferentes investigaciones, usando las representaciones numéricas, gráficas y analíticas ya que ello posibilita el que le den significado.

Las situaciones de aprendizaje

Se desea conocer cómo piensa el estudiante algunas cuestiones algebraicas.

<u>Primera situación</u>

Binomio al cuadrado

Hay que iniciar la situación presentando al estudiante las siguientes expresiones:

$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ (representación numérica)

$(6 + 2)^2 = 6^2 + 2^2$

- ¿Son correctas las expresiones anteriores?

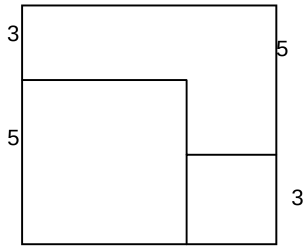
  En el momento que el estudiante investigue -realizando operaciones- que para que se cumpla la igualdad, falta sumar el doble producto del primer término por el segundo, se le presenta la siguiente expresión:

  $(a + b)^2 =$ (representación analítica)

- Se le solicita resolver y justificar la igualdad.

  Una vez justificada la igualdad, se le presenta otra expresión numérica diferente de las anteriores, para comprobar que haya construido el conocimiento, esto es, a través de la solución y justificación

  $(4 + 7)^2 =$



- Ahora pasamos a la representación gráfica

- Se le pide al estudiante que identifique en la figura donde está el 52 y donde el 32 y qué figuras se forman además de los cuadrados.
- ¿Habías visto que un binomio se puede representar en términos de una figura?
- ¿Qué piensas de esto?
- Y si ahora tenemos (6 + 2)2, ¿en qué cambia la figura?
- ¿Qué te representa un binomio al cuadrado, geométricamente?
- ¿Habías reflexionado con esto alguna vez?

Segunda situación

Partiendo del obstáculo epistemológico $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, se le cuestiona al estudiante de la siguiente manera:

- ¿Es correcta la expresión? $\sqrt{(3^2)(4^2)}=(3)(4)$ (representación numérica)
- ¿Es correcta la expresión? $\sqrt{3^2+4^2}=3+4$
- ¿Cuál es la diferencia entre la dos expresiones?

  Cambiando valores $\sqrt{5^2+2^2}=5+2$
- ¿Qué pasa si elevas al cuadrado el lado izquierdo y también el lado derecho de la expresión anterior?

  Partiendo de la siguiente expresión:

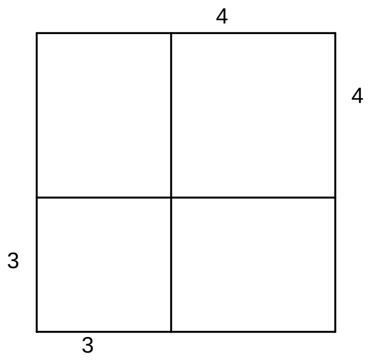
  $5^2 + 2^2 = (5 + 2)^2$

  si se tiene $(a + b)^2 =$ (representación analítica)
- ¿Cómo se desarrolla el binomio al cuadrado?

  Una vez resuelto y justificado el binomio al cuadrado.
- ¿Qué le falta al lado izquierdo de las expresiones numéricas?

  Ahora vamos a pensar en lo siguiente:

  Identifica el 3^2 y el 4^2 en la figura



- ¿Qué otras figuras hay?
- ¿Qué relación hay entre la figura y el binomio al cuadrado?
- ¿Cómo se descompone?
- ¿Habías visto esta situación con números, letras y figuras?

Descripción de la parte experimental

Primera situación

Uno de los obstáculos epistemológicos más conocidos que presentan los estudiantes del nivel medio superior cuando se les enseña álgebra es el llamado binomio al cuadrado, el cual algunos lo resuelven así $(a+b)^2=a^2+b^2$

Berenice es una alumna del cuarto semestre de preparatoria que cuando se le preguntó si la siguiente expresión es correcta: $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$

- Respondió: "*le faltan los paréntesis, le sobran los exponentes*", pero finalmente, después de realizar operaciones tanto del lado izquierdo, como del lado derecho de la igualdad, se dio cuenta que en el miembro derecho faltaría sumar el número 30 para que el valor de la izquierda fuera igual al de la derecha.
- *"O sea que eso no es una igualdad porque le falta sumar 30 para que sea igual"*

Después se le presentó la siguiente expresión: $(6 + 2)^2 = 6^2 + 2^2$

- Se le pregunta ¿Cómo entran en juego las estructuras de las expresiones anteriores?

Berenice encuentra rápidamente que en esta expresión falta el número 24 del lado derecho para que la igualdad se cumpla.

Posteriormente, al presentarle la expresión: $(a+b)^2$, y tal como en los casos numéricos anteriores tuvo problemas con el número 30 y el 24, advierte que en esta expresión se le presenta el mismo problema.

- Tú hiciste operaciones y anotaste lo que falta, pero ¿Qué tiene que ver el 30 con el 5 y el 3, y que tiene que ver el 24 con el 6 y el 2?
- Haz el desarrollo de (a + b)2 como lo conoces en álgebra.
- Berenice resuelve como un producto aplicando sus conocimientos previos de que un número al cuadrado es dos veces la multiplicación de ese mismo número, procediendo de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a^2 + b^2 + ab + ab \\
&= a^2 + b^2 + 2ab \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

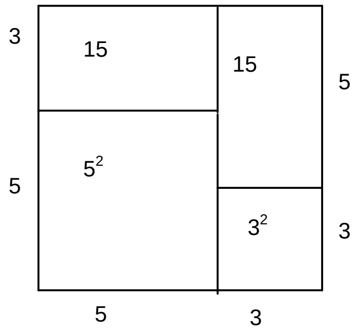
- Entonces, ¿Cómo dice la regla con la que aprendiste en secundaria y prepa el binomio al cuadrado?
- *"El cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo"*

Entonces, al regresar a la primera expresión numérica, deduce como se obtiene el número 30, diciendo:

- *"sale de multiplicar dos veces el 5 por el 3".*

Haciendo lo mismo con la segunda expresión, pero en este momento lo hace de una manera segura e interesada cuando se le pregunta si al observar la expresión $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$ está correcta, inmediatamente responde:

- *"está incorrecta"*
- ¿Cuánto es $(4 + 7)^2$?
- Berenice responde *11^2*
- $11^2 = 4^2 + 7^2$ ¿Es correcto?
- *"No, le falta el doble producto del primero por el segundo"*
- Y 56 ¿es cuadrado de algún número?
- *"No, es el doble producto del primero por el segundo"*
- Dibuja un cuadrado de (5+3) (5+3)



$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2(5)(3) + 3^2$
$8^2 = 25 + 30 + 9$
$64 = 64$

- Ahora, identifica en la figura donde está el 5^2 y el 3^2
- ¿Qué figuras se te forman aparte de los cuadrados?

"2 rectángulos de 5 por 3 y de ahí sale el 30"

- ¿Habías visto que un binomio se puede representar en términos de una figura?

"No, a mi me enseñaron con representación algebraica, pero nunca con numérica, gráfica y algebraica al mismo tiempo"

- ¿Y qué piensas ahora?

"Que es más fácil en el sentido de que se pueden representan los términos de un cuadrado mediante figuras", "Si así nos enseñaran matemáticas, sería otra cosa"

- ¿Qué te representa un binomio al cuadrado, geométricamente?
  "Un cuadrado que mide a+b de lado"
  "a^2 representa un cuadrado de lado a"
  "b^2 representa un cuadrado de lado b"
  "2ab representa 2 rectángulos de área ab"
- ¿Habías reflexionado con esto alguna vez?
  "No, la figura me sirve como guía para el procedimiento numérico y algebraico"

Segunda situación

Otro obstáculo epistemológico conocido en estudiantes de bachillerato cuando están aprendiendo álgebra es el siguiente: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

Ángel tiene 16 años, estudia el cuarto semestre de bachillerato.

Al ver la siguiente expresión $\sqrt{(3^2)(4^2)} = (3)(4)$, él pensó que no es correcta, pero al realizar las operaciones indicadas pudo darse cuenta que es correcta.

Sin embargo, cuando se le presentó la expresión $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$, respondió: *"es correcta"*, al resolverla se da cuenta que es incorrecta.

En el momento de comparar las dos expresiones, Ángel nota que en el primer caso es un producto y en el otro caso se trata de una suma.

Paso seguido se le presenta la expresión $\sqrt{5^2 + 2^2} = 5 + 2$ y como no se le ocurre otra cosa para justificar que la igualdad no es cierta, se le sugiere elevar al cuadrado tanto el lado izquierdo como el lado derecho.

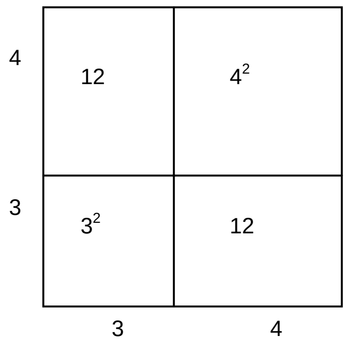
< Obtiene la expresión $5^2 + 2^2 = (5 + 2)^2$

< Teniendo como antecedente (a + b)2

< Se da cuenta que la expresión $\sqrt{8^2 + 3^2} \neq 8 + 3$

Ahora se le pide que construya un cuadrado que mida 3+4 de cada lado

< Logra representar el 3^2, el 4^2 y los dos rectángulos de 3 por 4, en la figura que construyó.



$(3 + 4)^2 = 3^2 + 2\ (3)\ (4) + 4^2$
$(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2\ (3)\ (4)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

¿Qué relación hay entre la figura y el binomio al cuadrado y cómo se descompone?"

"$7^2 = 49 = 9 + 16 + 12 + 12$"

Si ahora escribes $(a + b)^2$

¿Podrías construir una figura como en caso anterior?

"Si"

¿Habías visto con números, letras y figuras geométricas, la representación de un binomio al cuadrado?

"Lo había visto con número y letras, pero no con figuras y así es mucho más fácil"

Conclusiones y reflexiones

- Los estudiantes tienen serias dificultades para darle significado a las representaciones numérica y gráfica, aún cuando tengan dominio sobre la representación algebraica-analítica.
- Se corrobora que la enseñanza tradicional del álgebra es estática, es decir, se le considera como un concepto acabado. El diseño de la situación de aprendizaje va en la dirección de propiciar una enseñanza dinámica. *"a mi me enseñaron con representación algebraica, pero nunca con numérica, gráfica y algebraica al mismo tiempo"*
- En la etapa de desarrollo de la investigación, hay evidencias que muestran el predominio de lo algebraico sobre lo numérico y gráfico que propicia en "anclaje cognitivo" que impide darle significado a los aprendizajes.
- Tomar en consideración en el diseño de la situación de aprendizaje a los obstáculos epistemológicos propicia el hacer entender a los estudiantes la necesidad de tener control y previsión sobre sus procesos matemáticos. *"la figura me sirve como guía para el procedimiento numérico y algebraico"*

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P.; Novak, J. D., Hanesian, H. (1989). *Psicología Educativa.* Trillas. México.

Bachelard, G. (1983) *La Formación del Espíritu Científico.* Editorial Siglo XXI. México.

De la Torre, S. (1993) *Aprender de los Errores.* Escuela Española. España.

Kilpatrick, J; Gómez, P; Rico, L. (1995) *Educación Matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Mancera, E. (1998) *Errar es un placer.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Popper, K. R. (1998) *Los dos problemas fundamentales de Epistemología*. Editorial Tecnos. México.

Sierpinska A. (1994) *Understanding in Mathematics.* Studies in Mathematics Education Series Vol. 2. Series Editor: Paul Ernest. School of Education University of Exeter. The Falmer Press.

S.E.P., (1995) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. CONALITEG.* México.

Algunas Construcciones de Comportamientos Asintóticos Senoidales en Estudiantes de Precálculo y Cálculo

Francisco Cordero Osorio, fcordero@mail.cinvestav.mx
Ignacio Domínguez García, idomingu@mail.cinvestav.mx
Cinvestav-IPN; México

Resumen

Se presenta un estudio preliminar acerca de algunas construcciones de asíntotas senoidales que realizaron estudiantes de cálculo. La hipótesis del estudio consiste en suponer que las representaciones de los comportamientos asintóticos usuales que aluden a funciones exponenciales, hiperbólicas y racionales componen un obstáculo didáctico para generalizar la noción de asíntota de una función. El diseño de situación que se aplicó llama la atención sobre las acciones que realizaron los estudiantes de los "comportamientos tendenciales" de las funciones y el papel que éstos pudieran desempeñar en la generalización del concepto asíntota de una función.

Introducción

La privilegiación de ciertas representaciones gráficas de las asíntotas de las funciones que aparecen en el discurso matemático escolar provoca obstáculos didácticos que imposibilitan que los estudiantes construyan comportamientos asintóticos senoidales. Tal privilegiación es favorecida por los textos de matemáticas y las concepciones matemáticas de los profesores. Además, cualquier construcción de comportamiento asintótico senoidal contradice las características principales de las asíntotas de funciones que componen a sus representaciones gráficas y que comúnmente son tratados con funciones exponenciales, hiperbólicas y racionales. Entonces, el estudiante necesariamente es obligado a reorganizar su conocimiento sobre estos comportamientos y construir una nueva representación. Estudiantes de precálculo y cálculo serán la fuente para la recolección de datos de la investigación, puesto que las representaciones de asíntota dependen de las diversas experiencias escolares.

En ese sentido el proyecto de investigación consiste fundamentalmente en el diseño de situaciones y en establecer la diversidad de éstas que permitan que el estudiante construya la nueva representación. Contamos actualmente con una hipótesis de investigación que consiste en que cuando las construcciones de comportamiento tendencial de las funciones hechas por los estudiantes sean consideradas como, o pasen a ser, un argumento en el contexto gráfico, esto posibilitará la nueva representación. Para tal efecto, el proyecto se basa en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Actualmente exploramos la naturaleza del entendimiento asintótico del estudiante para conocer sus concepciones del concepto. Se tomaron en cuenta dos aspectos: el primero es una representación de la asíntota que favorece la interpretación de que "una curva tiende a acercarse a una recta" y el segundo es, que existen formas de comportamiento asintótico que no pueden identificar los estudiantes o que no logran visualizar si no existe un punto o puntos del dominio de una función, donde tal función no está definida. En esta ocasión se reporta un estudio preliminar sólo con estudiantes de cálculo. El análisis se basó en las discusiones entre los estudiantes en equipos y en los reportes escritos por los mismos formulados por las actividades.

Antecedentes: reconstrucción de significados

La problemática fundamental de la enseñanza de la matemática que atiende la disciplina matemática educativa, consiste en considerar una confrontación entre la obra matemática[6] y

[6] La problemática fundamental y la obra matemática son consideradas en el mismo sentido que la escuela francesa (véase Chevallard, et al, 1998): la didáctica es la ciencia que trata, en definitiva, de una verdadera reconstrucción de las obras que forman el currículo. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo (como tradicionalmente se le había confiado a la pisicopedagogía), sino de realizar un trabajo matemático de

la matemática escolar. Ambas son de naturaleza y funciones distintas, entonces la tarea principal del matemático educativo consiste en teorizar acerca de cómo interpretar y reorganizar la obra matemática. Esto ha llevado a precisar elementos teóricos que ayuden a la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. Las fuentes han sido las producciones del conocimiento, al formular epistemologías modelizadas por la actividad matemática. Sin embargo, la reconstrucción de significados compone categorías del conocimiento matemático que no sólo son el resultado de la actividad matemática, sino también de la actividad humana. La fuente se convierte, por el contrario, en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. Si ése es el caso, se deben formular epistemologías modelizadas por la actividad humana que ayuden a habilitar esas categorías del conocimiento matemático en la matemática escolar.

Entonces, en el marco de la problemática fundamental y la visión teórica se plantea la problemática de las construcciones de las asíntotas senoidales, en donde el comportamiento tendencial de las funciones es la categoría del cálculo que reorganiza la matemática para que se dé la nueva representación. La concreción de este hecho debiera estar reflejada en el diseño de la situación.

Un aspecto importante a señalar, que hace original el planteamiento tratado aquí, consiste en que la construcción de la nueva representación se enfoca en "el comportamiento de la asíntota", no en "la propiedad asintótica". Por ejemplo, Palma (1999) reporta algunas construcciones de las asíntotas oblicuas en un ambiente gráfico, en donde identifica a la suma de funciones como un patrón de construcción seleccionado por los estudiantes. La experiencia se realiza utilizando la función hiperbólica, $f(x)=\frac{1}{x}$, que es identificada en el contexto de la experiencia como la función prototipo para construir asíntotas oblicuas. Formula secuencias variando situaciones, por ejemplo, al sumarle una constante a la función *f(x)*, o una recta, o una cuadrática, así hasta sumarle cualquier otra función *g(x)* o bien cualquier curva. El estudiante identifica ciertos patrones de comportamientos de estas sumas que le posibilitan construcciones de asíntotas oblicuas. Mientras que Yerushalmy (1997) reporta la semántica de las asíntotas que se genera cuando los estudiantes de bachillerato son sometidos a hallar asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de funciones racionales en un ambiente tecnológico. La semántica consiste en relacionar el tipo de asíntota con la forma algebraica de las funciones racionales, $F(x)=\frac{P(x)}{R(x)}$, en donde la operación algebraica define la relación.

La diferencia entre ambos acercamientos consiste en que uno enfoca su estudio en la construcción de comportamientos asintóticos oblicuos que logran hacer los estudiantes y el otro, en la semántica de las asíntotas cuando los estudiantes se someten hallar tipos de asíntotas a través de la tecnología. Esta diferencia en el contexto de la perspectiva planteada anteriormente, puede ser explicada de la siguiente manera: la construcción de comportamientos representa la categoría que sustenta la reorganización matemática para establecer la matemática escolar de las asíntotas de las funciones en un sentido general. La categoría comportamiento es la herramienta seleccionada por la actividad humana para construir el concepto de asíntota de una función, pero comportamiento no es una definición matemática. Sin embargo, la propiedad asintótica es una definición matemática despersonalizada, es decir, es un objeto matemático y el estudiante formula una semántica para valerse de procesos que le ayuden a determinar tal objeto.

reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que compone cada obra matemática con base en las cuestiones que ésta responde.

Problemática: representaciones y obstáculo didáctico

Las asíntotas de las funciones generalmente están representadas por gráficas como las de la figura 1.

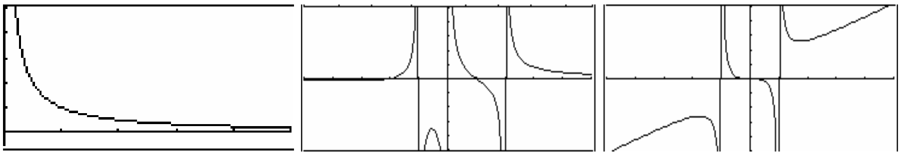


Figura 1

Cada una de las situaciones asintóticas, que aparecen en la figura 1, aluden a funciones *f(x)* que cuando "*x* tiende a infinito" éstas se aproximan a una constante *k* o a una *recta*, y que cuando "*x* tiende a un punto *b*" la función *f(x)* se aproxima al infinito. Estas representaciones gráficas y estos argumentos analíticos privilegian dos aspectos que implícitamente "definen la asíntota de una función": 1) "la curva se aproxima tanto como se quiera al eje de la *x* o a la recta *y*=*k* pero no la toca" y 2) "el cálculo de estos límites se hace sobre funciones racionales: $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = recta$ y $\lim_{x\to b}\frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$". Implícitamente, el estudiante asume los dos aspectos como el universo de funciones asintóticas. Sin embargo, cuando el estudiante se encuentra representaciones gráficas como las de la figura 2, en su experiencia matemática escolar, requiere ampliar tal universo.

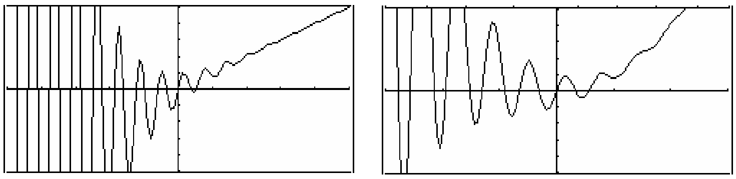


Figura 2

Para que el estudiante logre ampliar el universo de funciones asintóticas, necesariamente tendrá que hacerse de una nueva representación. Los dos aspectos anteriores que le han definido la asíntota de una función tendrán que ser negados. En ese sentido se ha referido a este hecho como obstáculo didáctico. Necesariamente el estudiante tendrá que reorganizar su conocimiento y reconstruir nuevos significados para generalizar el concepto de asíntota.

Hipótesis: el comportamiento tendencial

La hipótesis de investigación es formulada en los siguientes términos: cuando las construcciones de comportamiento tendencial de las funciones hechas por los estudiantes pasen a ser un argumento en el contexto gráfico, esto posibilitará la nueva representación. Es decir, un argumento significa una reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas, es una construcción original que utiliza material conocido, como por ejemplo, las ideas y las concepciones compartidas por los participantes. El comportamiento tendencial de las funciones significa un argumento que establece relaciones entre funciones y está compuesto de una colección coordinada de conceptos y vive en situaciones del Cálculo donde se discuten aspectos globales de variación. Además, el argumento ha sido identificado o hallado en situaciones escolares, muchas veces en forma implícita y siempre en un marco funcional que organiza contenidos matemáticos.

En ese sentido, la asíntota de una función consiste de una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento no sería otra cosa que establecer relaciones entre dos funciones, *h* y *f*, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando *x* toma valores grandes, con ello el estudiante reconstruirá significados a la relación h=f+g cuando x tiende a infinito, siempre que g tienda a cero.

El aspecto epistemológico interesante es el papel que desempeña la noción de "comportamiento asintótico" en la actividad de los participantes para lograr el argumento y no en sí, la propiedad de asíntota de una función en la estructura de la matemática.

Diseño de la situación: asíntotas senoidales

El diseño de la situación, en la etapa exploratoria, fue pensado para conocer las experiencias escolares que los estudiantes tienen del concepto asíntota de una función. Para ello, dada la problemática, se tomaron en cuenta tres aspectos: las gráficas que representan diversos comportamientos asintóticos, las funciones o fórmulas que son asociadas a gráficas de diversos comportamientos asintóticos y las posibles definiciones de asíntota de una función que los estudiantes pueden expresar a la luz de sus experiencias en los dos puntos anteriores. Estos tres aspectos, presumiblemente, ayudarían a conocer los roles de "comportamiento asintótico" y de "propiedad asintótica" en las construcciones de los participantes de las actividades que compusieron la situación.

Tres contextos necesariamente fueron considerados: el gráfico, el algebraico y el analítico. La secuencia de la situación trató, primero, las experiencias gráficas de los estudiantes: "Determinar si las gráficas que a continuación se presentan tienen comportamiento asintótico"; después, las experiencias algebraicas: "Relacionar las siguientes funciones con sus respectivas gráficas" y, finalmente, la analítica: "Proporcionar una definición de la asíntota de una función" (véase Anexo).

La situación se les aplicó a nueve estudiantes de ingeniería7, quienes fueron agrupados en dos equipos de trabajo, uno de cuatro estudiantes y otro de cinco. Dos entrevistadores formaron parte de la experiencia. Para la entrevista se dispuso de un espacio físico permanente. Dos cámaras de vídeo, una fija y otra móvil, registraron las entrevistas. Además, se audiograbaron y la duración de la entrevista por equipo fue de una hora y media.

Algunas construcciones: comportamiento y propiedad asintótica

El estudio preliminar ayudó a localizar aspectos sobre los cuales los estudiantes pusieron particular tratamiento en sus construcciones. Por ejemplo, implícitamente aparecen dos tratamientos de las asíntotas: las verticales y las horizontales. Estos reflejan el universo de asíntotas que conocen los estudiantes. Aparece una categoría como un recurso esencial para interpretar las gráficas y las funciones, representada por el "comportamiento de las funciones", algunas veces identificaron explícitamente "comportamientos asintóticos" pero otras veces no. Sus construcciones dependieron de los contextos, es decir, la actividad 1 atiende el contexto gráfico y sólo reconocieron como "comportamientos asintóticos" a los verticales a pesar de la existencia de otros "comportamientos asintóticos". Sin embargo, en la actividad 2, que atiende el contexto algebraico, el estudiante considera los puntos donde es indefinida la función, a partir de la fórmula, para relacionarlo con una gráfica con asíntota vertical, pero por otra parte, relaciona adecuadamente gráficas con funciones, considerando "comportamientos de las funciones" sin que explícitamente las reconozcan como asíntotas de una función. Mientras que en la actividad 3, el contexto analítico refleja concepciones de asíntota de los estudiantes, la cual consiste en formular la propiedad de asíntota de la función a través de los puntos indefinidos de la misma y de la "línea imaginaria".

A continuación se exhibe una selección de extractos de las construcciones realizadas por los estudiantes que indican sus concepciones de asíntota.

[7] Anatolio Reyes Reyes, estudiante de maestría, colaboró en el diseño de la situación e implementación de la experiencia en el laboratorio de Didáctica y Cognición del AES del DME del Cinvestav.

Actividad 1: Determinar si las gráficas que a continuación se presentan tienen comportamiento asintótico (véase Anexo)

1.1	Si hay comportamiento asintótico. **Asíntotas verticales en x=-1, x=0 y en x=2**
1.2	No hay comportamiento asintótico, por que los puntos en *x* tocaban muchos puntos de y.
1.3	No hay comportamiento asintótico. No muestra una asíntota y su comportamiento en su dominio es visible, ya que no hay lugar donde se indefina. No hay comportamiento asintótico ya que tiene un comportamiento diferente pasando o tendiendo sobre una línea indefinida.
1.4	**Si hay asíntotas. Asíntota vertical en x=1 y x=-1**
1.5	No hay comportamiento asintótico. Todos los reales están definidos en la función. La función en el contradominio y en el dominio, están definidas en todos sus puntos. Por que en todos sus puntos esta definida y todos lo reales están definidos.
1.6	No tiene comportamiento asintótico. Su contradominio es de 1 hasta infinito. La función está definida solo en un contradominio positivo y en un dominio de menos infinito a mas infinito.

Las asíntotas verticales vienen a ser prototipos de asíntotas que no son sometidos por los estudiantes a ninguna discusión. Sin embargo, para negar el comportamiento asintótico argumentan que no cumplen las condiciones que ellos han formulado a las funciones con asíntota, como son: "puntos donde se indefina la función", "su comportamiento (de la gráfica) es visible en su dominio", "todos los reales están definidos en la función", "un comportamiento diferente pasando o tendiendo sobre una línea imaginaria", "los puntos en x tocan muchos puntos en y".

Actividad 2: Relacionar las siguientes funciones con sus respectivas gráficas (Véase Anexo)

En la ecuación b) observaron que en x=1 y en x=-1, es indeterminada y observaron las gráficas 2.3 y 2.6. Posteriormente descartaron la gráfica 2.6.
En la ecuación c), observaron que en *x=1* la función se indeterminaba y en *x=-1* el resultado era –2, y la relacionaron con la 2.6.
Para la ecuación d), observaron el comportamiento del coseno, cuando *x=0,* cos(0)=1 y f(x)=2, relacionandola con la gráfica 2.4.
Para la ecuación e), analizaron el comportamiento de e^{-x}, viendo que e^{-x} y e^{x} tienen gráficas invertidas. Un estudiante observó que la ecuación e) tenia un x^2, tal que se comportaba como una parábola que se abría hacia arriba. Señalaba que cuando la gráfica crecía, la función tomaba valores positivos. Por lo que concluyeron que la gráfica de la ecuación e) era la 2.5.
En la ecuación f) cuando *x=0*, la función pasaba por el punto *y=1*, observando los estudiantes que la ecuación era una función lineal con una exponencial. Por lo que concluyeron que su gráfica era la 2.1.
En la ecuación de a) concluyeron que era la 2.2, ya que en *x=3 y en x=-3,* la función se indeterminaba.

Los estudiantes relacionaron funciones y gráficas a través de analizar, primero, ciertos aspectos algebraicos de las funciones para después asociarles una gráfica según su comportamiento. El comportamiento de la gráfica fue central en las relaciones que lograron, sin embargo, identificaron comportamientos sin determinar que eran asintóticos.

Actividad 3: Proporcionar una definición de la asíntota de una función (véase Anexo)

Una asíntota, es el valor en donde una función no está definida.
Es un punto en el que se indefine la función en cualquiera de los ejes.
Es una línea indefinida, y por lo tanto no toca ninguno de los ejes.
Es un límite de una función que se representa con una línea imaginaria y que no tiene definido un punto donde éste tienda a infinito.
Límite de una función que se representa con una línea imaginaria que puede tener o no un punto definido en alguno de los ejes.

En las definiciones aparece la propiedad que los estudiantes quieren asignarle a las funciones con asíntota, por ejemplo: una asíntota es, "el valor donde una función no está definida", "un punto en el que se indefine la función", "un límite de una función que se representa con una línea imaginaria".

Comentarios finales

Hay dos aspectos que en el estudio preliminar llaman la atención: el papel que juegan, respectivamente, por un lado, el "comportamiento asintótico" y por el otro, la "propiedad asintótica". De alguna manera la propiedad analítica que los estudiantes quisieron asignarle a la asíntota niega las acciones de comportamiento de las funciones que éstos tuvieron necesidad de aludir para hacer los tratamientos respectivos en los diferentes contextos.

La observación del estudio preliminar obliga a formular una epistemología que ubique el estatus de la categoría "comportamiento de la función" en una situación de asíntota senoidal. Tal epistemología deberá estar reflejada en el rediseño de la situación de acuerdo al estudio planteado.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP

Cordero, F. (1998). "*El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y del análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones".* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número 1, 56-74.

Palma, A. (1999). *Algunas construcciones de la asíntota oblicua en un ambiente gráfico: la suma de funciones como un patrón de construcción.* Tesis de Maestría. Dirección de estudios de postgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

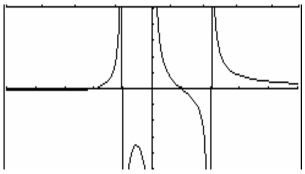
Vergnaud, G. (1990). La theorie des Champs Conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathematiques,*Vol. 10, 2-3, pp. 133-170.

Yerushalmy, M. (1997). *"Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of asymptotes".* International Journal of Computers for Mathematical Learning. Kluwer Academic Publisher.

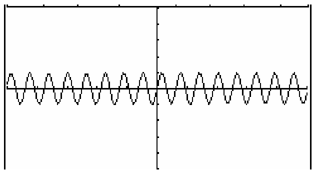
Anexo

Situación de asíntotas senoidales

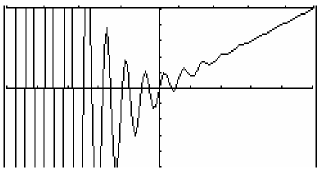
1.- Determina si las gráficas que a continuación se presentan tienen comportamiento asintótico.



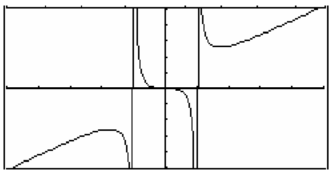
1.1



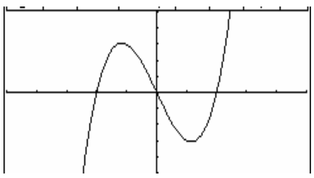
1.2



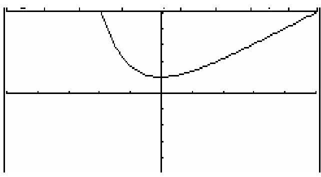
1.3



1.4



1.5

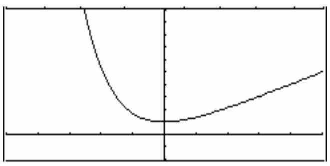


1.6

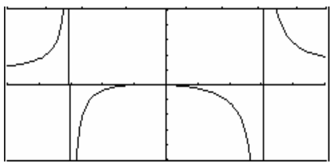
2.- Relaciona las siguientes funciones con sus respectivas gráficas. Escribe dentro del paréntesis la letra correspondiente.

$a)\, f(x) = \dfrac{x(x+2)}{x^2-9}$ $\quad b)\, f(x) = \dfrac{x^5-10}{x^4-1}$ $\quad c)\, f(x) = \dfrac{1-x-x^2}{x-1}$

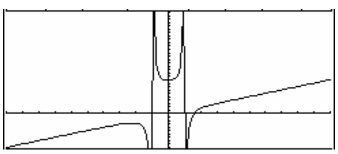
$d)\, f(x) = \dfrac{1+\cos(10x)}{1+x^2}$ $\quad e)\, f(x) = e^{-x} sen(10x) + x^2$ $\quad f)\, f(x) = e^{-x} + x$



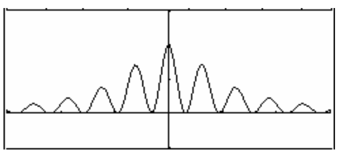
2.1 (   )



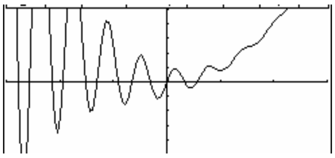
2.2 (   )



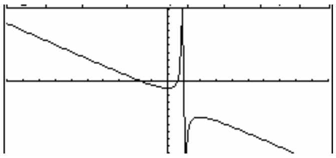
2.3 (   )



2.4 (   )



2.5 (   )



2.6 (   )

3.- Proporciona una definición de asíntota de una función

Desarrollo y Evolución del Cálculo Integral Durante (1600-1780 d.C.). Las aportaciones de Newton y las de Leibniz.

Encarnación Rosado Zavala
erosado@delfin.unacar.mx
Universidad Autónoma del Carmen
México

Nivel Superior-Temática Cálculo

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reúnen en su investigación a muchas ciencias y disciplinas. Una de las más importantes es la historia; en efecto el acudir a la historia cuando se planea un proyecto didáctico para la enseñanza de un concepto matemático tradicionalmente complejo, como es el caso de la integral, nos aporta una serie de beneficios entre los que podemos enumerar los siguientes: El tomar conciencia por parte del profesor de la verdadera complejidad del tema a enseñar, al ver los innumerables intentos por definir con precisión el concepto matemático, y que sólo la contribución de notables matemáticos durante cientos de años han logrado. El poder vislumbrar diversas aplicaciones del concepto matemático a partir de sus orígenes. Y, algo de suma importancia para nuestro estudio, que es el poder, a partir de su génesis aportar mediante el marco conceptual de una didáctica piagetiana, un planteamiento didáctico que tenga como fin la comprensión del concepto. Esta es precisamente la idea de este estudio aportar un ensayo de los orígenes y desarrollo del cálculo integral con la idea de rescatar los elementos más útiles bajo nuestro punto de vista, para desarrollar un proyecto didáctico aplicado a su enseñanza. Este ensayo reúne la investigación desarrollada durante el periodo de 1600 a 1780 y forma parte conjuntamente, con una contribución anterior que comprende de 3500 a. C. hasta 1450 d. C. (Rosado, 2000) y una posterior en desarrollo que comprende desde Euler a Lebesgue. Del proyecto histórico.

Por la brevedad de este artículo omitimos ejemplos y demostraciones.

A pesar de la notable contribución de Arquímedes (287-212 a.C.) al cálculo integral, su reconocimiento llego tardío. En efecto si bien el llamado período de los indivisibles (1615-1670) fue fuertemente influenciado por los trabajos de Arquímedes relativos al cálculo de tangentes y a la cuadratura del círculo que alcanzaron el oeste de Europa en 1544, sólo a inicios del siglo XX con el hallazgo de “El Método” por Heiberg en Constantinopla, Arquímedes recibió extenso reconocimiento como pionero en el desarrollo del cálculo integral.

Tradicionalmente se atribuye la invención del cálculo a dos matemáticos, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pero al igual que todas las contribuciones importantes en la matemática, el desarrollo del cálculo no puede ser del todo atribuido a uno o a dos hombres. Si no por el contrario a anticipaciones e importantes contribuciones de notables científicos que los antecedieron. En este sentido en el presente artículo presentamos una breve descripción de la evolución del cálculo en el período de 1600 a 1780, en donde más que pretender esclarecer la prioridad en la invención del cálculo, tarea fútil bajo nuestro personal punto de vista, mostraremos los resultados más relevantes durante este período.

Debido a un estado de rápida evolución del cálculo, durante el período 1630 a 1660 se desarrollaron una serie de técnicas que anticipaban resultados tan importantes como el teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, al ser mostradas en ejemplos específicos, carecen de la generalidad requerida en una teoría formal del cálculo; no obstante, durante este período se gestaron y desarrollaron las ideas que posteriormente iban a ser adoptadas por Newton y Leibniz.

> *Se encuentran ejemplos de la época anterior a Newton y Leibniz que, cuando se traducen al lenguaje matemático moderno, muestran que la diferenciación y la integración son procedimientos inversos; dichos ejemplos se refieren a problemas específicos y no a teorías generales. ... Aún así, no puede decirse que alguno de los dos diera una versión del cálculo con un grado de rigor más alta que sus predecesores. (Andersen, 1984, p. 22).*

Iniciemos el recorrido con Kepler (1571-1630), quien anticipándose a muchos de sus contemporáneos en su libro *Nova stereometria doliorum vinariorum* (“Nueva medida de volúmenes de toneles para vino”: 1615 a)., sobre medición de volúmenes, inicia el uso de métodos infinitesimales para calcular el volumen de un tonel de vino; consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos por una cantidad infinita de partes sólidas. Así, Kepler para calcular el volumen de una esfera consideraba a ésta, compuesta por un número infinito de conos, con vértice común en el centro de la esfera y cuyas bases infinitésimas, formando la superficie de la misma. Así, reduciendo el volumen de los conos infinitesimalmente y sumando dichos volúmenes obtenía el volumen de la esfera; lo anterior le condujo a concluir que, la esfera es igual en volumen, al cono cuya altura es el radio de la esfera y como base un círculo cuya área es igual al área de la esfera, es decir un círculo de radio igual al diámetro de las esfera (Anderson, 1984, p. 22-24).

En esta misma línea y aportando el nombre de indivisibles, aparece en 1635 “*Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota”* ("Un cierto método para el desarrollo de la nueva geometría de los continuos indivisibles”), publicado por Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Matemático italiano que mostraba un ingenioso método (“método de los indivisibles”) para calcular áreas y volúmenes de sólidos irregulares a través de comparar e igualar segmentos lineales (regula) para las áreas y secciones transversales de área para sólidos con segmentos y secciones pero de figuras geométricas conocidas. Técnicas muy semejantes a los métodos del cálculo integral. El método fue insatisfactorio y fuertemente criticado, una gran parte de las críticas iban dirigidas contra la naturaleza de sus indivisibles y el problema de la estructura del continuo. Sus contrapartes le atribuyeron la afirmación de que una figura estaba hecha de indivisibles y que estos indivisibles eran segmentos, por lo que Cavalieri a manera de réplica escribe *Exercitationes Geometricae Sex* ("Seis ejercicios geométricos”), estableciendo de una forma mucho más satisfactoria los principios a tal grado que este método fue ampliamente usado por los matemáticos del siglo XVII.

Una considerable estimulación al desarrollo del cálculo se dio con los trabajos de René Descartes (1596-1650) quien al algebrizar la geometría clásica, crea la hoy llamada geometría analítica. Este trabajo se publicó en un apéndice de su obra “Discours de la Méthode”. Descartes pública su Géométrie como un aplicación de su método de unificación, al unificar el álgebra y la geometría. En esta misma obra trata una gran variedad de temas con una habilidad sorprendente, por ejemplo la forma de calcular un máximo o un mínimo para una función cuadrática. Gran parte de su éxito se debió a la notación usada por Descartes, tan sorprendente, como que es el origen de la notación actual.

Uno de los resultados más notables para el cálculo diferencial, fue elaborado por Pierre de Fermat (1601-1665). En 1636 circuló entre los matemáticos franceses una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* (“métodos para investigar máximos y mínimos”). En esta obra Fermat da a conocer un método geométrico, equivalente a lo que hoy conocemos como diferenciación, para calcular el máximo, el mínimo y punto de inflexión de curvas polinomiales. Durante el mismo período de tiempo Fermat encontró fórmulas para calcular el área de regiones acotadas por esas curvas a través de procesos de sumas en una forma totalmente semejante a las usadas con el mismo propósito en el cálculo integral. Por ejemplo encontró que: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Sin embargo no se sabe si Fermat conocía que:

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$. Es decir que la integral venía a ser la inversa de la derivada. También se conoce que Fermat, Pascal y James Gregory, realizaban manipulaciones geométricas que representaban a procesos de integración por partes y cambio de variable.

El método (de Fermat) como pocos en la historia de la ciencia, fue examinado muy minuciosamente. (Andersen, 1984. p. 37-41).

En el estudio que Fermat realizó de curvas y ecuaciones presentaba otra característica notable, a saber: la idea de dar un incremento a una magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente.

Indudablemente que una de las contribuciones más importantes al cálculo, la realizó John Wallis (1616-1703), el matemático inglés más influyente después de Newton. De hecho el propio Newton nos aclara que llego al famoso teorema del binomio y al cálculo, a partir de estudiar los trabajos de Wallis durante su permanencia en Cambridge. El método de integración aritmética fue conseguido por Wallis en su *Arithmetica infinitorum* ("La aritmética de los infinitesimales")

Las demostraciones son mínimas, ya que Wallis confiaba en su asombrosa intuición de las relaciones de sumas de las diferentes series (Bos 1984).

A pesar de que ya anteriormente Fermat y Cavalieri habían logrado integrar la función, para n racional y $n \neq -1$. La contribución más importante de Wallis, en este apartado, fue el poder algebrizar métodos que hasta entonces estaban fuertemente ligados a procesos geométricos.

Wallis fue uno de los primeros en discutir las cónicas como curvas de segundo grado en lugar de secciones de un cono. Así la fórmula que nosotros escribiríamos ahora como: $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$; Wallis fue el primero en explicar con integridad su significado (Eves, 1976, p. 318).

Considerando que las principales contribuciones de Wallis, para el desarrollo del cálculo *están en la teoría de integración*, se le otorga como la más importante contribución de Isaac Barrow aquella ligada con la *teoría de la diferenciación*.

Uno de los resultados más notables en el desarrollo del cálculo y en el uso de los infinitésimos lo realizó James Gregory (1638-1675), un matemático escocés quien llega a resultados tan sorprendentes como la demostración del teorema fundamental del cálculo por primera vez, la serie binomial y la serie de Taylor en 1671. Desdichadamente muere a los 37 años.

Si él hubiera vivido estaría entre los inventores del cálculo al igual que Newton y Leibniz (Struik, 1967).

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), quien calculó el lugar en donde Aquiles alcanza a la tortuga, publica en 1647 el resultado de calcular el área de $f(x) = x^n$, para $n = -1$ y muestra que la función de área hiperbólica $y(t) = \int_1^t \frac{dx}{x}$ tiene la propiedad de:

$y(u \bullet v) = y(u) + y(v)$, que permite percatarnos de la relación inversa entre: $y(t) = \ln(t)$ y $y'(t) = \frac{1}{t}$.

Isaac Barrow (1630-1677), profesor de Newton, publica en 1670 en Lecture X, una demostración geométrica del teorema fundamental del cálculo en donde relaciona de manera sorprendente la tangente a una curva con el área que se genera.

Termina este breve recorrido, de esta fecunda época para el cálculo integral con los notables matemáticos de todos los tiempos: Newton y Leibniz.

Tanto Newton como Leibniz arriban al cálculo independientemente uno del otro en la misma época y ambos con motivaciones diferentes Newton en 1665-66 y Leibniz en 1684-86, Newton en la idea de un problema de cinemática y Leibniz como un problema geométrico. La primera publicación de Newton aparece en 1736 en Method of Fluxions y la de Leibniz en 1684 en el Acta Eroditorum y en esta publicación ya incluía la notación que hasta el día de hoy se usa, como por ejemplo d(vu) = vdu + udv, la diferencial del cociente; la condición de que $dy = 0$, para valores extremos y, $d^2y = 0$, para puntos de inflexión. Este artículo fue seguido de una especie de texto en 1786 en donde aparecen expresiones como $y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$; y, es aquí, en donde por primera vez aparece el símbolo para la integral.

En octubre de 1666, Newton escribió un manuscrito sobre fluxiones, en 1669 escribió un tratado sobre series infinitas, el De analysi, que circuló en forma manuscrita entre los miembros de la Royal Society; de 1671 data un tratado sobre el método de fluxiones y series infinitas. Sin embargo, el manuscrito de 1666 y el tratado sobre el método de fluxiones no fueron publicados en vida de Newton. Los Principia de 1687 habían suministrado por primera vez al público en general indicaciones de sus métodos en cálculo infinitesimal, pero no era suficiente para mostrar la amplitud y potencia de sus descubrimientos matemáticos. (Bos, 1984, p. 70).

Hacia fines de 1600 se había publicado ya una cantidad importante de información acerca del cálculo de Leibniz y se disponía también de información suficiente sobre el cálculo de Newton como para mostrar que ambos habían descubierto nuevos métodos en el mismo campo matemático. Y ésta fue precisamente la causa de una desagradable disputa sobre la prioridad en los descubrimientos. El resultado neto de la investigación histórica es el de que Leibniz descubrió el cálculo posteriormente a Newton e independientemente de él, y que lo publicó antes.

La publicación por parte de Leibniz de su cálculo en dos artículos en el Acta de 1684 y 1686, no provocó conmoción a los matemáticos; los artículos eran bastantes breves y quedaban deslucidos por las erratas, y en partes bastante oscuros, es sorprendente de que fueran entendidos por alguien durante la década siguiente. Jakob y Johann Bernoulli se estudiaron dichos artículos a partir de 1687, y en 1690, mediante artículos publicados en el Acta, demostraron haber conseguido dominar el simbolismo leibniziano y su uso. El contacto entre Johann y Leibniz fue intenso y productivo. A partir de 1690 una corriente ininterrumpida de artículos en el Acta y en otras revistas, escritos por los Bernoulli y por Leibniz, a los que se uniría más tarde l´Hôpital y otros, vino a demostrar al mundo culto que el nuevo cálculo era algo con lo que había que contar. Sin la intervención de los Bernoulli hubiera sido muy difícil, de hecho, el aprender el cálculo en esos dos artículos. Un buen libro de texto que explicase el cálculo apareció en 1696, aunque sólo trataba del cálculo diferencial, el Analyse des infiniment pour l´intellince des lignes courbes (“Análisis de los infinitésimos para el entendimiento de las líneas curvas”: 1696a) de l´Hôpital. (Bos, 1984, p. 72-73).

En los descubrimientos de Newton, tenemos *la relación inversa entre la diferenciación y la integración*, la concepción de las variables como expresión de un movimiento en el tiempo y la teoría de las razones *primeras y últimas*… (Bos, 1984, p. 74-76). Newton ofreció en el *Principia* tres modos de interpretación del nuevo análisis: en términos de infinitesimales (usado en su *De analysi,* en su primer trabajo); en términos de primera y última razón o límites (dada particularmente en *De quadratura,* y el panorama que le pareció haber considerado más riguroso); y que en términos de fluxiones (dado en su *Methodus fluxionum,* y uno de los cuales que aparece como haber utilizado fuertemente su imaginación) y en el *Principia* también *admitió que Leibniz tenía un método similar* considerando la generación de magnitudes – una aceptación que fue, sin embargo, omitida de las ediciones posteriores. (Boyer, 1949, p. 196-203).

Conclusión

Acudir a la historia cuando se planea un proyecto didáctico para la enseñanza de un concepto matemático tradicionalmente complejo, como es el caso de la integral, la historia nos aporta una serie de beneficios entre los que podemos enumerar los siguientes: El tomar conciencia por parte del profesor de la verdadera complejidad del tema a enseñar, al ver los innumerables intentos por definir con precisión el concepto matemático, y que sólo la contribución de notables matemáticos, durante cientos de años han logrado

El reconocimiento muy merecido, como aseveran estudiosos en la materia, no fue sino hasta sólo a inicios del siglo XX con el hallazgo de “El Método” por Heiberg en Constantinopla, Arquímedes recibió extenso reconocimiento como pionero en el desarrollo del cálculo integral.

Inicialmente Leibniz denomina a su cálculo “cálculo sumatorio” y le parece razonable expresarlo con el símbolo “$\int$ ” que es la primera letra de la palabra summa (esto es, una s alargada). Posteriormente de acuerdo con Bernoulli lo denominan cálculo integral y lo representan con el símbolo anterior.

Hacia fines de 1600 se había publicado ya una cantidad importante de información acerca del cálculo de Leibniz y se disponía también de información suficiente sobre el cálculo de Newton como para mostrar que ambos habían descubierto nuevos métodos en el mismo campo matemático. Y ésta fue precisamente la causa de una desagradable disputa sobre la prioridad en los descubrimientos. El resultado neto de la investigación histórica es el de *que Leibniz descubrió el cálculo posteriormente a Newton e independientemente de él, y que lo publicó antes*.

Finalmente con la breve descripción de las valiosas aportaciones que hicieron la gama de investigadores antes que Newton y Leibniz, el descubrimiento del cálculo no se debe, sólo a estos dos hombres.

Referencias

Andersen, Kirsti. 1980. Las técnicas del cálculo. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910 Una introducción histórica. comp.. Grattan-Guinness.

Analysis (in Mathematics): Real Analysis Measure and the period of indivisibles. Encyclopaedia Britannica 1994-1999

Berlisky, Davd. 1995. A Tour of the Calculus. Vintage Books.

Bos, H. J. 1980. Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910 Una introducción histórica. comp.. Grattan-Guinness.

Bourbaki, N. 1969. Elementos de historia de las matemáticas. Alianza Universidad.

Boyer, Carl B. The history of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc. New York 1949.

Edwards, C. H. Jr. The Historical Development of the Calculus. Springer Verlag. U.S.A. 1937.

Eves, Howard. An Itroduction to the History of Mathematics, Holt, rinehart and Winston U.S.A. 1953.

Grattan-Guinness, Ivor. Mathesis: Filosofía e Historia de las Matemáticas. Volumen VII, Número 3, 1991, UNAM-México.

Grattann-Guinness, Ivor. Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910

Smith, D. E. 1953. History of Mathematics. Dover

Struik, Dirk J. 1967. A Concise History of Mathematics. Dover.

Desde dónde leen los Maestros, las Innovaciones Educativas. El caso de las fórmulas

Irma Fuenlabrada, fuenlab@data.net.mx
Mónica Schulmaister, mschulma@sep.gob.mx
Departamento de Investigaciones Educativas/Cinvestav. IPN.
México.

Primaria-Geometría

En el campo de la didáctica, el estudio de la interpretación o realización en el aula de las innovaciones educativas, ha sido objeto de estudio de diversas investigaciones. El presente trabajo se inscribe en esta área de interés y particularmente se ocupa del análisis de las prácticas de enseñanza de las fórmulas para el cálculo del área de polígonos[8]. El contenido curricular referencia del estudio, se selecciona con base tanto en: la aparición recurrente de la temática en diversos currículos nacionales para la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, como en el valor utilitario que en México, maestros y padres de familia le otorgan al aprendizaje de este contenido.

Aunado a lo anterior, se tiene que la presencia recurrente de este contenido en los diferentes programas no garantiza que los maestros, cuenten con los conocimientos necesarios para realizar en su salón de clase una enseñanza en apego al conocimiento matemático constituido. Como tampoco han desarrollado estrategias para la enseñanza que tomen en cuenta el conocimiento actual sobre la manera como aprenden matemáticas los niños.

En el trabajo de investigación, las prácticas de enseñanza se documentaron a través de registros etnográficos de clases realizadas por 6 maestros de los dos últimos grados de la escuela primaria[9]. En este artículo solo se reporta lo sucedido en una clase cuyo propósito era la enseñanza de la fórmula para el cálculo del área del trapecio, así mismo se analiza cómo el proyecto de enseñanza de la maestra Sandra establece un diálogo de convergencias y divergencias con la propuesta (vigente durante casi 20 años) que le ofrece el Libro de Texto[10]. En medio de este diálogo encontramos a los niños tratando de dar una respuesta satisfactoria a las preguntas de la maestra que entran en conflicto cuando la información que les ofrece el libro o la propia actividad no responde a las expectativas de su maestra.

Cabe aclarar que no obstante que las observaciones de clase se realizaron al término de la vigencia del Programa correspondiente a la reforma educativa de la década de los 70, se encuentra que los resultados encontrados son pertinentes, ya que en el Programa actual, incorporado a nivel nacional a partir de 1993, la resolución didáctica para la enseñanza del cálculo de las áreas de los polígonos que se expresa en los Libros de Texto de quinto[11] y sexto grado[12] no promueve un razonable acercamiento a la significación de las fórmulas para el cálculo del área. A continuación se relativiza y amplía sobre el particular.

Lo que el Libro de Texto propone para el cálculo del área del trapecio.

En la lección "*El trapecio*"[13]el propósito es introducir este cuadrilátero como figura geométrica y deducir una fórmula para calcular su área.

---

8 Este reporte de investigación forma parte de un estudio más amplio denominado "La enseñanza de las fórmulas en la escuela primaria: un análisis didáctico". Tesis de Maestría del DIE/Cinvestav-IPN. De Mónica Schulmaister; dirigida por Irma Fuenlabrada.
9 Corresponde a clases de quinto y sexto grado; el rango de edad de los niños es de 10 años seis meses a 12 años. La experiencia se realiza en escuelas públicas del Distrito Federal.
10 SEP (1972) *Matemáticas Quinto Grado*. Libro de Texto Gratuito. México.
11 SEP (1993) *Matemáticas. Quinto grado.* México.
12 SEP (1994) *Matemáticas. Sexto grado.* México.
13 SEP (1972) *Matemáticas Quinto Grado*. Libro de Texto Gratuito. México.

A partir del dibujo de un trapecio isósceles que aparece con su nombre, se pide que los alumnos en una figura equivalente a la anterior (que se encuentra al final del libro), recorten el trapecio y una vez realizado esto, se corte por las líneas punteadas (que dividen a la figura en un rectángulo y dos triángulos), que junten los dos triángulos (así obtenidos) para formar un triángulo más grande y un rectángulo.

Se propone el cálculo de área a partir de las medidas que aparecen al recortar el trapecio y mediante una serie de preguntas se induce al alumno a calcular el área del triángulo grande, y del rectángulo; con los datos así obtenidos, se plantea a los niños que finalmente calculen el área del trapecio sumando las áreas parciales.

A continuación aparece otro trapecio con las medidas correspondientes de las bases mayor y menor así como la de su altura y se insiste que estos datos son necesarios para calcular el área. Se repite el procedimiento de corte del trapecio aclarándose que la base del triángulo grande (formado por los dos triángulos recortados) es el resultado de restar la magnitud de la base menor a la de la base mayor. Se obtienen las áreas del rectángulo y del triángulo grande y se relacionan con la fórmula:

$$\text{Área} = \text{base menor x altura} + \frac{(\text{base mayor - base menor}) \text{ x altura}}{2} \quad .(1)$$

Al final de la lección se propone el cálculo del área de otro trapecio isósceles y cuatro no isósceles.

Lo que sucede en la clase

A. El problema algebraico que subyace en la fórmula del trapecio

En la clase de la maestra Sandra sobre el área del trapecio y la obtención de la fórmula correspondiente se pueden identificar cinco momentos: a) consignas para que los niños tracen un trapecio; b) transformación de éste en un rectángulo;

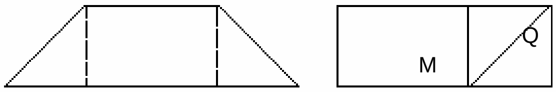
c) presentación de la fórmula convencional: $\frac{(B + b)xh}{2}$. (2)

d) ejercitación de la fórmula asignando valores (arbitrarios) a las literales y e) el cálculo del área de un trapecio como suma de las áreas de dos triángulos iguales y un cuadrado.

En el desarrollo de la clase se observa cómo la maestra actúa haciendo coexistir lo que el libro plantea. La clase se inicia con el libro abierto en la lección de “El Trapecio” y con lo que ella considera que debe hacerse para enseñar la fórmula del trapecio -que como se verá más adelante no lo tiene totalmente resuelto-. Y a este diálogo entre la maestra y el libro se agrega lo que los niños van elaborando en el transcurso de la clase, frente a las solicitudes de participación que la maestra les demanda.

En el libro, la relación (1) es una relación algebraica que representa la suma de áreas resultantes de la partición del trapecio en un rectángulo (o cuadrado) y en dos triángulos reacomodados para formar un triángulo grande.

En cambio la relación (2) que la maestra reconoce como “la” fórmula para calcular el área del trapecio es una relación algebraica que procede de una partición del trapecio equivalente a la que propone el libro, pero diferente en cuanto al reacomodo de los dos triángulos que en lugar de formar un triángulo grande forman un rectángulo, a saber:



Para calcular el área del rectángulo grande desde el acercamiento que tiene en mente la maestra, una de las posibilidades es calcular el área de cada uno de los rectángulos M y Q. Considerando que la base del rectángulo M coincide con la base menor del trapecio y que las alturas de ambos coinciden, se tiene que la relación que permite calcular el área del rectángulo en términos de las magnitudes del trapecio es: b x h.

Para expresar la base del rectángulo Q en términos de los elementos del trapecio, es necesario considerar la diferencia de las bases y el resultado dividirlo entre dos, quedando que el área del rectángulo Q es: [(B-b)/2]xh. Obsérvese que esta relación es algebraicamente equivalente a la que se obtiene calculando el área del triángulo grande que propone el libro: (B-b)xh/2

Luego falta sumar las áreas de los rectángulos M y Q para obtener una relación para el cálculo del área del trapecio: bxh + [(B-b)/2]x h.

Ahora bien, esta expresión a la que se llega por un camino distinto desde la propuesta del libro (salvo la equivalencia algebraica señalada anteriormente) , pero a la que se podría llegar siguiendo el proyecto de la maestra solo se explicita parcialmente ya que en la clase aparece el trabajo de transformación del trapecio en un rectángulo e inmediatamente la fórmula convencional que la maestra justifica diciendo "*pongan atención, esta manera es la más fácil para calcular el área*" (al mismo tiempo que escribe en el pizarrón la fórmula: (B+b)xh/2.

Lo que sigue después es el cálculo del área de algunos de los trapecios dibujados en el pizarrón al inicio de la clase y a los que la maestra asigna las magnitudes necesarias para utilizar la fórmula.

Hacer que los niños transformen un trapecio en un rectángulo para luego no usar la transformación en relación a la fórmula convencional, pone de manifiesto los conflictos de la maestra cuando su conocimiento (la imagen del trapecio transformado en un rectángulo y la fórmula convencional) se tensa con sugerencias provenientes de otros (los autores del libro) que no son cabalmente comprendidas por ella.

La problemática se centra en que la relación presentada por el libro "a título de fórmula" no coincide con la que la maestra reconoce como "la" fórmula validada tradicionalmente en el trabajo escolar para el área del trapecio. Además, la maestra reconoce de alguna manera (quizás en algún curso de capacitación tuvo oportunidad de verlo), la posibilidad de obtener la fórmula convencional a partir de la transformación del trapecio en un rectángulo de área equivalente.

La dificultad de la maestra para llegar a la fórmula convencional a partir, tanto de la expresión algebraica que propone el libro, como de la expresión algebraica a la que ella llegaría (trabajando algebraicamente con la transformación del trapecio en un rectángulo) no es casual, puesto que para llegar a la expresión algebraica convencional a partir de las relaciones mencionadas, se requiere de un instrumental algebraico que no forma parte de los saberes de los maestros en general y en particular tampoco de la maestra Sandra.

Es necesario a partir de las relaciones encontradas, realizar las siguientes operaciones algebraicas:

bxh + (B - b)xh/2 = bxh + (B - b)/2 x h = (2b x h)/2 + (Bh - bh) /2 =
(2bh + Bh - bh) /2 = (bh + Bh) /2 = (b + B) x h /2 = (B + b) x h / 2

Desde la lógica de los autores del libro de texto de la reforma de los 70, bastaba con sustentar la fórmula convencional del área del trapecio en la relación algebraica a la que se llega desde la partición del trapecio en un rectángulo (o cuadrado) y la construcción de un triángulo grande, lo cual es matemáticamente correcto y era metodológicamente aceptable (en 1972).

Pero a la luz del conocimiento actual acerca de las concepciones matemáticas y metodológicas de los maestros[14]; de la práctica docente[15] y de las consideraciones teóricas que hacen a los proyectos de innovación educativa[16], la lógica de los protagonistas de la innovación educativa de la década de los 70, obviaba la ausencia de conocimiento algebraico de los maestros, que aún en caso de tenerlo, de todas formas quedaría vigente la imposibilidad de los niños de la escuela primaria, para acceder al razonamiento algebraico necesario para comprender la fórmula convencional a partir de la relación algebraica establecida en el libro.

Más aún, en el caso de que los autores no pretendieran el arribo a la fórmula convencional queda en el tintero, la no consideración del peso de los saberes escolares tradicionalmente validados por los maestros frente a una innovación educativa, que como en el caso de la maestra Sandra siguen siendo un obstáculo para la enseñanza y consecuentemente también se constituyen en obstáculos para el aprendizaje de los niños, no obstante que se trata de una innovación educativa con veinte años de vigencia.

B. El razonamiento aritmético de la maestra versus el razonamiento geométrico de los niños.

Una vez, establecida y ejercitada la fórmula convencional, la maestra orienta la clase tratando de seguir la propuesta del libro. Es decir, plantea el cálculo del área a través de la suma de la áreas parciales obtenidas por la partición del trapecio, de un rectángulo y dos triángulos obtenidos del corte del trapecio.

A continuación se presenta una parte del protocolo de la clase que da cuenta de cómo el afán de la maestra por facilitar las cosas “desde una perspectiva aritmética” promueve un diálogo entre ella y los niños que transita entre dos lógicas: la aritmética (de la maestra) y la geométrica (de los niños).

El trapecio está partido en un rectángulo y dos triángulos (que no están juntos).

M: ¿Qué voy a sumar? Las dos áreas ¿no?, de los triángulos, pero ¿qué voy a hacer primero? El área de este aquí (señala un triángulo) *y luego voy a hacer el área de éste* (señala el otro triángulo).
Ao: No, los dos juntos (el niño “ve” que se pude formar un triángulo grande con los dos triángulos del trapecio)
M: ¿Acá de este lado? (señala uno de los triángulos)
Ao: ¿Por qué?
M: Porque se tiene igual base y tiene igual altura, pues nada más haría de uno, y luego,...,¿qué haría?
Ao.: Sobre dos (completa la fórmula del área del triángulo ya que la maestra mencionó a la base y a la altura)
M: Si, esa es la fórmula sobre dos. Base por altura sobre dos. Pero, vuelvo a preguntar, si éste tiene de base 1.5 y tiene de altura 3 (señala un triángulo) *y este triángulo tiene de base 1 punto 5, y de altura 3* (señala el otro triángulo); *¿voy a hacer dos áreas diferentes?; no! ¿entonces qué haría?*
Ao: Formo un rectángulo con los dos (triángulos).
Ao2: Junto las dos (bases) (este niño también está “viendo” un triángulo grande al juntar los dos triángulos del trapecio)
M: Sí, pero no me entienden!
Ao3: ¿Junta las dos bases?

---

14 Fuenlabrada, I. y Weiss E. (coords.) (1997).; “Las Prácticas Escolares y Docentes en las Escuelas Multigrado de la Educación Primaria. Lineamientos para un nuevo modelo”. *Informe final de estudio elaborado por investigadores del DIE-Cinvestav-IPN a solicitud del Conafe y financiado por el Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento (BIRF).*
15 Rockwell, Elsie; Mercado, Ruth (1989) *La escuela lugar de trabajo*. México.
16 Fuenlabrada, I., E. Taboada (1997). "El material didáctico con desarrollo curricular: un recurso para la formación docente” en *Estudios en didáctica*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A. C. y Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V. México.

M: ¿Mande?
Ao4: ¿Junta las dos bases? ¿suma las dos bases?
M: Sumo las dos bases, pero no están juntas Elías, están separadas. Más o menos tienes la idea pero no es juntar las dos bases....Bueno, otra vez, si este triángulo tiene un metro 5 decímetros de base y tiene 3 metros de altura, voy a sacar el área de este triángulo; ¿cómo lo saco? ¿qué fórmula utilizo?
Aos: Base por altura sobre dos.
M: Sobre dos, ya saqué, ésta es mi fórmula para sacar el área. ¿si? (hipotéticamente) *ésta, ésta,* (señala un triángulo con insistencia) *mide un metro cinco decímetros y la altura mide tres, es igual que éste* (señala al otro triángulo). *¿También voy a hacer otra operación? ¿doble área?*
(los niños sugieren varios cálculos hasta que un alumno dice algo que le "gusta" a la maestra)
Ao2: Maestra ¿el resultado de uno se multiplica por dos?
M: ¿Por qué?
Ao2: Porque estamos usando dos medidas (la base del triángulo grande es la suma de las bases de los dos triángulos; como son iguales se multiplica por dos).
M: ¿Estamos utilizando dos qué? (piensa en dos triángulos)
Ao2: Bases (la base del triángulo grande es la suma de las bases de los triángulos chicos)
M: No, no, tienes la idea, pero piénsale. (responde al comentario de otro niño) *Tú vas bien Rubaldo. El resultado de éste* (señala un triángulo) *lo voy a multiplicar por dos, hasta ahí está bien, pero ¿por qué? Él ya lo sabe* (mira a Rubaldo) *, pero tú* (Ao2) *tienes la idea. A ver .Rubaldo ¿por qué?*
R: Porque están los dos triángulos separados, para juntarlos.
M: Porque vamos a sacar toda el área completita ¿no?, bueno lo que dice Rubaldo, saco el área de un triángulo, ¿sí? Pero si este triángulo está igual, no me vor a tardar en hacer dos áreas; si la medida de un triángulo es igual que el otro. Entonces dice Rubaldo saco el área de un triángulo y lo voy a multiplicar por dos para obtener el área de ese triángulo (señala a uno de ellos) *y el área de éste triángulo* (señala al otro triángulo) ¿sí? (sombrea los dos triángulos) ¿Cómo? (se pregunta así misma),..., de la siguiente manera ¿cuál es la fórmula del área para sacar el área del triángulo?

El razonamiento geométrico de los niños coincide en parte con el propuesto por el libro, al imaginarse un triángulo grande formado por los dos triángulos chicos, como esta transformación geométrica no satisface a la maestra, los niños proponen la transformación de los dos triángulos en un rectángulo (que la maestra había propiciado en otro momento de la clase) sin embargo, en el rectángulo no está claro como juega "el dos" que la maestra está enfatizando, por lo que no insisten en ello; en todo caso parece más adecuado (para los niños) pensar en duplicar la base, en sumarla, en juntarla lo que geométricamente se justifica en términos del triángulo grande. De hecho, Rubaldo está razonando geométricamente, porque lo que él iba a multiplicar por dos era la base de un triángulo (para juntarlos). La maestra reformula lo dicho por Rubaldo para asentar su procedimiento aritmético "económico", de calcular una vez el área y multiplicarla por dos ya que los triángulos son iguales.

Conclusión

Al margen del modelo que se elija de transformación del trapecio: a) en un rectángulo cuya base es la suma de las bases del trapecio y cuya altura es la mitad de la altura del trapecio; b) en un rectángulo cuya altura es igual a la del trapecio pero su base es la base menor más la mitad de la diferencia de la base mayor menos la base menor (trabajada en este artículo); c) en un paralelogramo cuya área es dos veces la del trapecio; o bien d) a través de la suma de áreas parciales como lo propone el Libro de Texto[17] se requiere en todos los casos de un importante conocimiento algebraico que los maestros, en general, no tienen y aún en caso de tenerlo, los niños no cuentan con herramientas conceptuales para comprenderlos.

[17] SEP (1972) *Matemáticas Quinto Grado*. Libro de Texto Gratuito. México.

Parece didácticamente recomendable que el tratamiento del trapecio en la escuela primaria, se limite al trabajo de la transformación geométrica y a la resolución de casos particulares sin llegar a establecer ningún tipo de relación algebraica. En cambio, el tratamiento didáctico de las relaciones para calcular el área del rectángulo, triángulo y el cuadrado, son accesibles para los niños, sin obviar algunas dificultades metodológicas, pero al menos en estos casos, como también en los del paralelogramo, el rombo y los polígonos regulares no se requiere de instrumental algebraico complejo.

La prácticas de enseñanza, como la reportada en este artículo, suponen que los alumnos son capaces de establecer el puente entre las acciones y las relaciones geométricas observadas y las expresiones algebraicas relacionadas con éstas. Es el alumno el que tiene la responsabilidad de traducir lo aprendido en preguntas sobre el espacio, para establecer las relaciones entre las soluciones prácticas y las soluciones geométricas, con la finalidad de reconocer en otros medios los mismos modelos geométricos. Algunos alumnos son capaces, por razones personales, de transformar ese saber en conocimientos adaptados; la mayoría busca entre las situaciones de presentación y la que tiene que resolver lo que le permita responder a las expectativas del maestro[18] (Berthelot, 1994).

[18] Berthelot, René; Salín Marie Hélène (1994) *L´enseignement de l´espace et de la géometie dans la scolarité obligatoire*. Tesis de Doctorado. Bordeux, Francia.

El Desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios

Dr. Crisólogo Dolores Flores
cdolores@guerrero.uagro.mx
Facultad de Matemáticas/UAG/CIMATE/CONACYT-25640
México

Medio Superior y Superior
Cálculo

Resumen

En este artículo se habla de un trabajo de investigación desarrollado en situación escolar con estudiantes principiantes universitarios. El trabajo tiene como objetivo desarrollar pensamiento y lenguaje variacional y se centra en el análisis de los resultados obtenidos en una experiencia pedagógica diseñada exprofeso. La experiencia consistió en el diseño de actividades, su *puesta en escena* en el salón de clases y la valoración de los resultados obtenidos. Las actividades fueron diseñadas para favorecer el desarrollo de habilidades para transitar del sistema de representación analítico al geométrico, del geométrico al analítico y del geométrico al geométrico: Las actividades se refieren al análisis del comportamiento variacional de funciones usando los significados variacionales que subyacen en las función derivada e integral y su concerniente relación de reversibilidad.

1. El problema y el objetivo de la investigación

Este trabajo forma parte del proyecto de Investigación: *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar*, auspiciado por el CONACYT. El **objetivo** principal de este proyecto consiste en investigar, en situación escolar, el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de la escuela media y superior a fin de favorecer su comprensión de los conceptos básicos de la matemática de la variables, ya que existen muchas evidencias de que en condiciones ordinarias **la escuela no ha propiciado este tipo de saberes.** Este es pues un **problema** serio en la enseñanza y aprendizaje de la matemática que afecta al Sistema Educativo Nacional. En particular, el **objetivo** de este trabajo consiste favorecer el desarrollo de la habilidad de análisis del comportamiento variacional de funciones primitivas y su derivada en el contexto geométrico y analítico, con estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas.

2. Elementos teóricos fundamentales

En este trabajo se adoptan posiciones teóricas relativas al desarrollo del pensamiento derivadas de la Teoría de la Actividad de Leontiev, Luria, Tallízina y otros. Una de las premisas pedagógicas establece que el pensamiento puede ser desarrollado por medio de la **actividad**, en nuestro caso interesa la actividad cognoscitiva, consistente en la actividad dirigida a la obtención de conocimientos y su aplicación creadora en la práctica social. La actividad cognoscitiva se manifiesta mediante las **habilidades**, hábitos y capacidades. Las habilidades se definen como la sistematización de acciones y como éstas son procesos subordinados a un objetivo o fin consciente no se automatizan (como en el caso de los hábitos). Por otro lado adoptamos la premisa teórica acerca de los **sistemas semióticos de representación** en el sentido de que no solamente son necesarios para fines de comunicación sino que son igualmente esenciales para la actividad cognoscitiva del pensamiento. En este contexto el aprendizaje puede ser caracterizado como la habilidad de moverse por distintos sistemas de representación semiótica, en particular en este trabajo se pretende desarrollar las habilidades siguientes: transitar del sistema de representación analítico al geométrico, del geométrico al analítico y del geométrico al geométrico.

3. Aspectos metodológicos

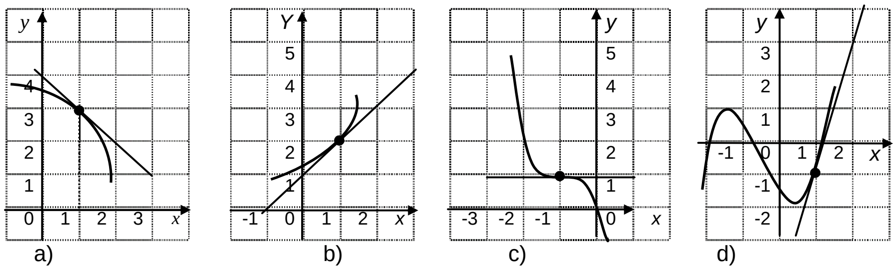
En términos globales este trabajo fue sujeto a tres momento metodológicos generales: el **diseño** y **validación** de situaciones variacionales (una especie de sistema de preguntas, ejercicios y problemas), la **ejecución** de las actividades diseñadas en la dinámica de las clases en el aula y la **valoración** de los resultados obtenidos en función del objetivo general planteado. Participaron 28 estudiantes del primer año de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Matemáticas de la UAG, durante tres semanas en el segundo semestre de 1999, con una frecuencia de seis sesiones semanales de una hora cada una. En cuanto al **diseño** de las situaciones variacionales se siguieron los siguientes criterios: que permitieran el análisis del comportamiento variacional de gráficas de funciones (analizar $f(x)$ y obtener $f'(x)$), que a partir de su comportamiento variacional expresado en términos analíticos, esbozaran las gráficas correspondientes (dada $f'(x)$ obtener $f(x)$), y que, dadas la gráfica de la función derivada pudieran esbozar la gráfica de la función primitiva o viceversa. En cuanto a la **ejecución,** las sesiones de clase se dividieron en cuatro fases: en la primera se trabajó con la relación entre las curvas y sus tangentes; en la segunda se trabajó con la relación variacional entre la derivada y su primitiva; en la tercera fase se trabajó con el comportamiento variacional de funciones a partir de su gráfica, y la cuarta fase se dedicó al análisis de las gráficas de funciones elementales a partir de sus expresiones analíticas. Los métodos de enseñanza frecuentemente utilizados fueron los de elaboración conjunta y de clases prácticas, se trataba de formar conjuntamente los conceptos y relaciones variacionales y, sobre todo, las clases se convirtieron en una especie de talleres en los que los estudiantes y el profesor se dedicaban a resolver y discutir las actividades planteadas. El **tipo de valoración** fue esencialmente cualitativo con validación interna aplicando cuestionarios *pre-post,* se realizó un diagnóstico y se aplicó una valoración final. Por razones de espacio a continuación sólo damos cuenta de esto último.

4. Valoración de resultados obtenidos en el cuestionario final

El cuestionario estuvo estructurado en tres partes. En la primera parte, se plantearon dos preguntas de opción múltiple (Actividad A y B) con ellas se pretende explorar la habilidad de transitar del sistema de representación gráfico al analítico. La segunda parte está constituida por las actividades: C, D, E, y F, con ellas se pretende explorar la habilidad de transitar del plano analítico al gráfico. La tercera parte está compuesta por la Actividades G, H e I, con ellas se explora la habilidad para movilizarse dentro del mismo plano de representación gráfico.

4.1. Del plano gráfico al analítico, análisis de las respuestas.

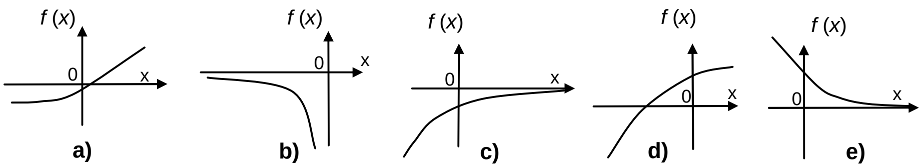
Actividad A. ¿A partir del análisis de las gráficas, en cuál de ellas se cumple que $f'(1) = -1$?



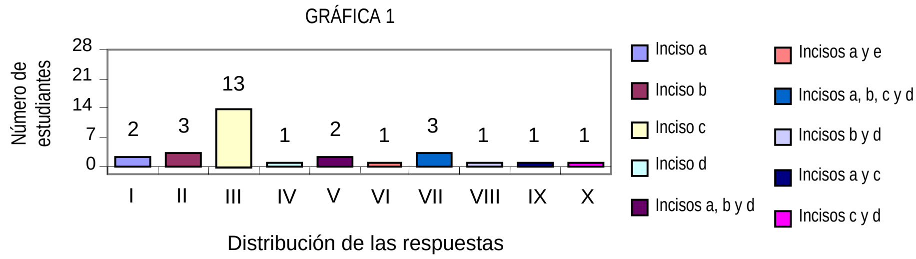
a) b) c) d)

Tres estudiantes señalaron el inciso **a**; uno el inciso **b**; 8 el inciso **c**; 14 se inclinó por el inciso **d** y 2 los incisos **c** y **d**. Sólo el tres estudiantes hicieron una elección satisfactoria, casi la mitad de los participantes cree que: $f(1) = f'(1)$ y cerca de la tercera parte parece confundir $f(-1)$ con $f'(1)$ pues contestan señalando el inciso **c**. Las respuestas pueden ser indicativas del escaso desarrollo de habilidad de manejar la relación entre las gráficas de funciones y las pendientes de sus tangentes, o para decirlo en términos analíticos entre $f(x_0)$ y $f'(x_0)$, la creencia indica que para muchos estudiantes: $f(x_0) = f'(x_0)$. No parecen distinguir entre la ubicación de la ordenada: $f(x_0)$ y el comportamiento variacional de la función en la vecindad de x_0. Estas confusiones y creencias se muestran muy arraigadas en la mente de los estudiantes, pues en la experiencia fueron capacitados para poder superarlas y a pesar de ello dan muestras de no haberlo logrado.

Actividad B. Analiza el comportamiento de las funciones a través de sus gráficas y subraya la gráfica donde se cumpla que: $f(x+ \text{h}) > f(x)$, con $h > 0$, y además: $f(x) < 0$, para toda x,



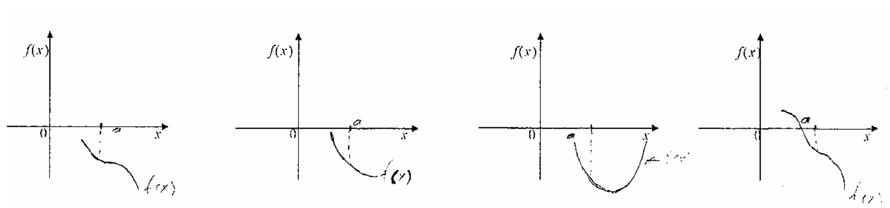
En la Gráfica 1, se muestra la distribución de las respuestas a la Actividad B.



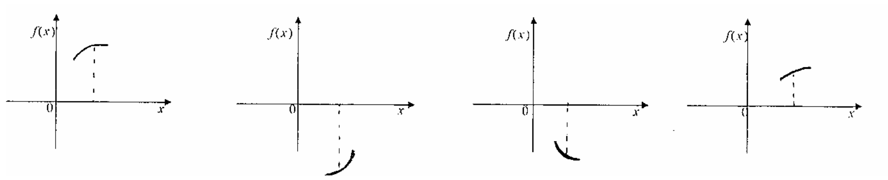
Las respuestas fueron variadas, más de la mitad de estudiantes muestran confusiones pues no dan muestras de poder coordinar simultáneamente las condiciones analíticas de crecimiento de una función [$f(x+ \text{h}) > f(x)$, para toda x] y de función negativa [$f(x) < 0$] y hacerlas corresponder la condición analítica establecida. Nótese que 9 estudiantes optan por el inciso **a** con alguna otra opción adicional, quizá hacen corresponder la condición de crecimiento dada analíticamente con el comportamiento de la gráfica, pero desatienden la condición de que la función es negativa. En total 13 estudiantes reconocen la gráfica que corresponde a las condiciones variacionales escritas en forma analítica.

4.2. Del plano analítico al gráfico, análisis de las producciones

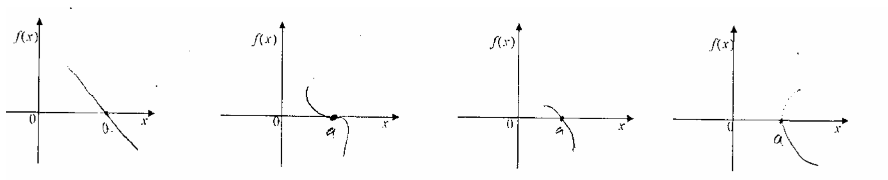
Actividad C. Dibuje la *porción* de la gráfica de $f(x)$ en una vecindad de a de manera que se cumpla que: $f(a) < 0$, $f'(a) < 0$, con a constante. Esta actividad difiere de las anteriores en que requiere esbozar la gráfica y no sólo seleccionar opciones. A continuación las producciones de 6 estudiantes:



Estas gráficas satisfacen las condiciones analíticas dadas. Otros 6 estudiantes presentaron lo siguiente:

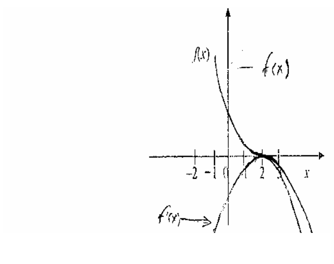


En estos casos solamente una de las gráficas presentadas satisface las condiciones, ya que decrece en una vecindad de *a* además es negativa esa zona. Tres estudiantes presentaron las siguientes gráficas:

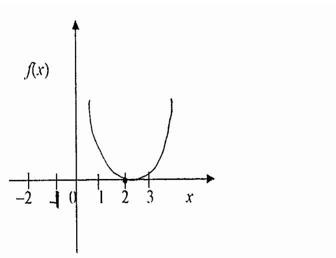


Estas gráficas parecen centrar la atención en el cambio de $f(x) > 0$ a $f(x) < 0$ (en los ceros de la función y en el cambio de signo), además en la mayoría de ellas se cumple que: $f'(x) < 0$. En estas producciones se nota escasa coordinación simultánea de las propiedades: $f'(x) > 0$, $f(x) < 0$, la primera es una propiedad de *comportamiento* y la segunda una propiedad de *ubicación*. La mayoría de los estudiantes presentaron gráficas confusas o bien no presentaron gráfica alguna.

Actividad D. $f(x)$ tiene un único punto estacionario en $x = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) < 0$ para $x > 2$; esboce la gráfica de f que satisfaga estas condiciones. Las gráficas presentadas aparecen a continuación



Gráfica presentada por 16 estudiantes

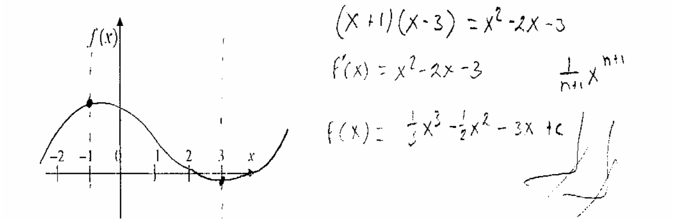


Gráfica presentada por 11 estudiantes

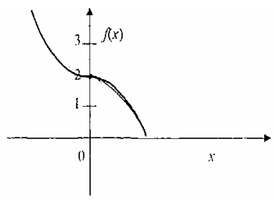
En las producciones de los 16 estudiantes hay muestras de un desarrollo aceptable de la habilidad de transitar del lenguaje analítico al gráfico, en ellas dibujaron una gráfica decreciente para $x < 2$, con punto de inflexión en $x = 2$ y nuevamente decreciente para $x > 2$; la gráfica de $f'(x)$ también fue esbozada como una parábola abierta hacia abajo. Las gráficas presentadas por los 11 estudiantes muestran inconsistencias: indican que para $x < 2$, $f'(x) < 0$; pero para $x > 2$, $f'(x) > 0$ que contraviene la condición inicial dada, aunque cumple la condición de que tiene punto estacionario en $x = 2$.

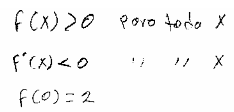
Actividad E. Auxíliese de una gráfica para construir una función polinómica que tenga puntos estacionarios en $x = -1$ y en $x = 3$

Ocho estudiantes construyeron la función realizando procedimientos parecidos a los que se muestran. Los estudiantes que construyeron la función consideraron a los puntos estacionarios en *x* como raíces reales de la función derivada. Realizaron operaciones correspondientes para encontrar una función cuadrática y después utilizaron integración para construir la función solicitada.



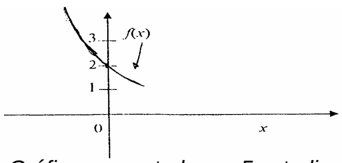
Actividad F. Esboce la gráfica de $f(x)$ que cumpla con todas las siguientes condiciones: $f(x) > 0$, para toda x; $f'(x) < 0$, para toda x, y $f(0) = 2$. Catorce estudiantes hicieron esbozos que satisfacen las condiciones requeridas, seis de ellos hicieron gráficas como la que sigue:



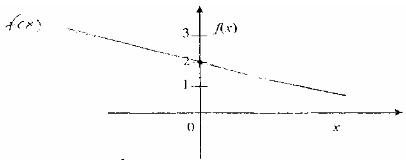


← Gráfica presentada por 14 estudiantes

En esta gráfica se nota que la condición: $f(0) = 2$, le fue adicionada la de: $f'(0) = 0$; pues dibujaron un punto de inflexión o quizá sugieren un punto estacionario en general. Los ocho estudiantes restantes presentaron gráficas como las siguientes.

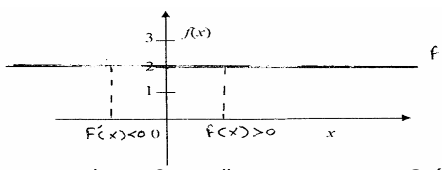


Gráfica presentada por 5 estudiantes

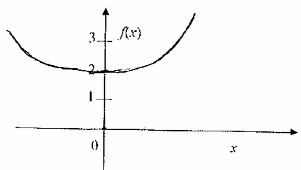


Gráfica presentada por 3 estudiantes

Los estudiantes que no lograron construir gráficas satisfactorias mostraron lo siguiente:



Gráfica presentada por 3 estudiantes

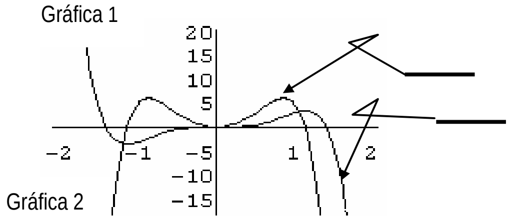


Gráfica presentada por 3 estudiantes

Ambos tipos de gráficas cumplen la condición: $f(0) = 2$, en la primera se muestran confusiones pues en las gráficas se expresa que "en $x < 0$, $f'(x) < 0$, o bien "en $x > 0$, $f'(x) > 0$. En la gráfica que se asemeja a una parábola sólo satisface las condiciones: $f(0) = 2$ y $f'(x) < 0$ para $x < 0$.

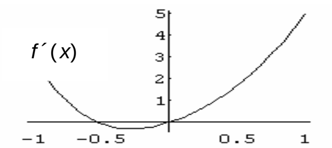
4.3. Del plano gráfico al gráfico, análisis de las producciones de los estudiantes

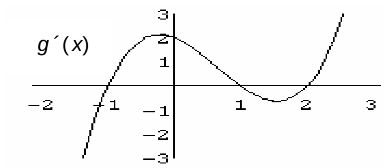
Actividad G. Escriba sobre la raya, cuál de las siguientes gráficas corresponde a $f(x)$, cuál a $f'(x)$.



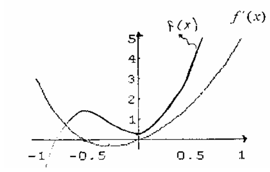
15 estudiantes señalaron que la Gráfica 1 corresponde a $f(x)$ y que la Gráfica 2 a $f'(x)$; por otra parte, los 13 estudiantes restantes señalaron que la Gráfica 1 corresponde a $f'(x)$ y la Gráfica 2 es la de $f(x)$.

Actividad H. Dadas las gráficas de $f'(x)$ y $g'(x)$, esboce las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

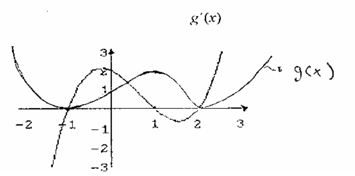




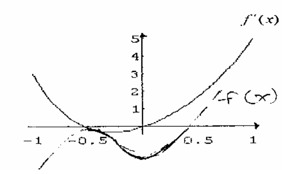
A continuación las gráficas hechas por 9 estudiantes para $f(x)$ y las gráficas de 10 estudiantes para $g(x)$.

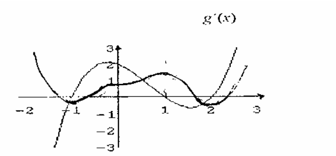


Gráfica de 9 estudiantes



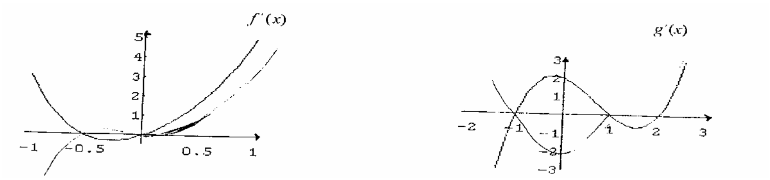
Gráfica de 10 estudiantes





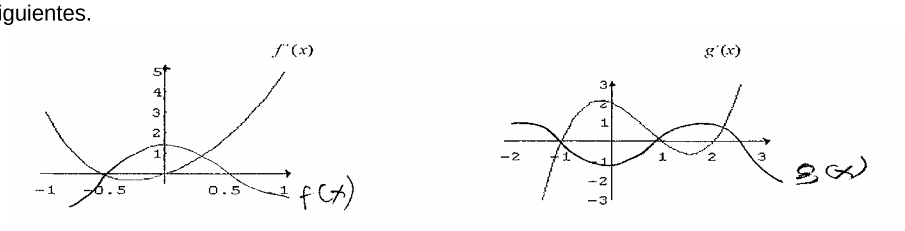
Gráficas de 2 estudiantes

Las gráficas anteriores muestran que por lo menos 12 estudiantes lograron esbozar gráficas aceptables de $f(x)$ a partir de las gráficas $f'(x)$, dibujaron *zonas estacionarias* para los ceros de $f(x)$, hicieron creciente la gráfica de $f(x)$ donde $f'(x)>0$ ó decreciente si $f'(x)<0$. Otros 4 estudiantes presentaron los siguientes dibujos, quizá pretendieron invertir el crecimiento de $f'(x)$ por el decrecimiento de $f(x)$, o decrecimiento de $f'(x)$ por el crecimiento de $f(x)$.



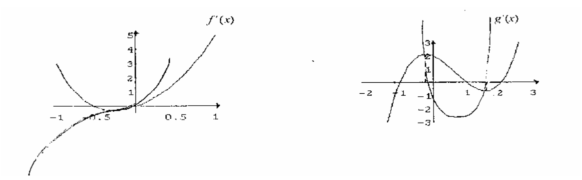
Gráficas de 4 estudiantes

En otros estudiantes es más clara la relación antes comentada, véanse las gráficas siguientes.



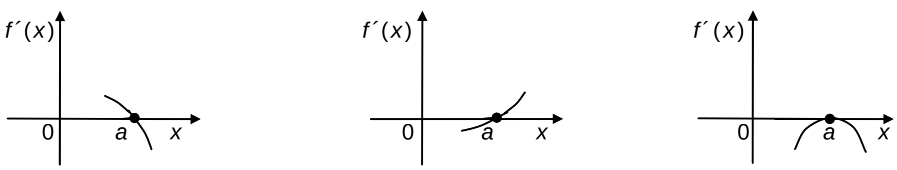
Gráfica presentada por cuatro estudiantes

A parecer comparan el comportamiento variacional de una con el comportamiento de la otra, aunque en realidad *f´*(*x*) reporta el comportamiento de *f*(*x*), y la gráfica de ésta indica su ubicación en el plano cartesiano. Otras gráficas presentadas por los estudiantes fueron las siguientes:

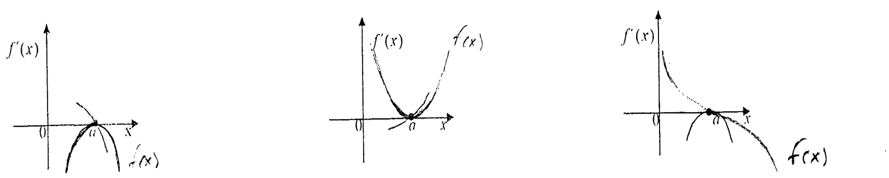


Según las producciones, más de la mitad de los estudiantes tienen dificultades para relacionar el comportamiento variacional de la función derivada y su primitiva del plano gráfico al gráfico.

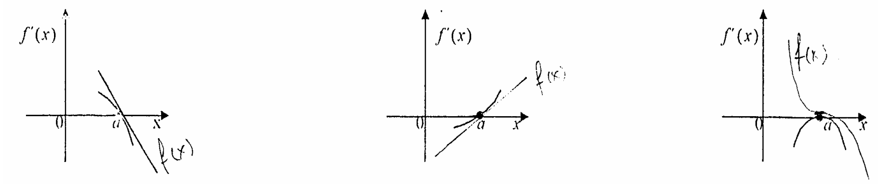
Actividad I. Para cada uno de los siguientes casos esboce la gráfica de *f* (*x*) cuya derivada en *a* se comporta de acuerdo a la correspondiente gráfica:



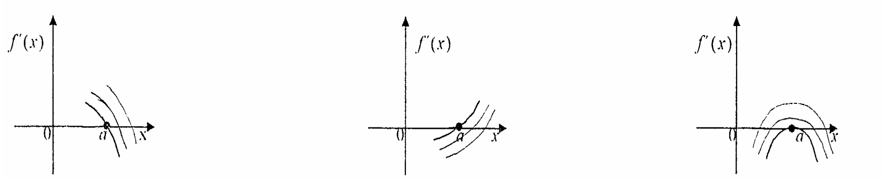
A continuación las producciones de los estudiantes:



Gráficas presentadas por 12 estudiantes



Gráficas presentadas por 5 estudiantes



Gráficas presentadas por 3 estudiantes

Las gráficas presentadas por los 12 estudiantes muestran un desarrollo aceptable de su habilidad de transferir la información gráfica dada de $f'(x)$ a $f(x)$ en ese mismo plano gráfico y en las zonas críticas la función primitiva. Otros estudiantes dibujan tangentes a las gráficas dadas y otros más sólo repiten los dibujos dados.

5. Conclusiones generales

- En cuanto a la habilidad de transferir información del sistema gráfico al analítico la mitad de los estudiantes participantes hicieron corresponder a $f(1)$ (dado gráficamente) con $f'(1)$ (dado analíticamente). Existe una confusión muy arraigada (es muy probable que en el 75% de los participantes) entre el comportamiento variacional de la función y la ubicación de la gráfica en el plano cartesiano, creen que: $f(x_0) = f'(x_0)$. Es posible que la simbología $f'(x_0)$ no les sugiera significados de comportamiento variacional en una *zona* en torno de x_0 en cambio se muestran proclives a darle un significado muy cercano al de *punto* del plano. En las gráficas dadas aparecían tangente en puntos determinados. ¿Será posible que las tangentes tampoco le sugieran significados variacionales? ¿Qué significados atribuirán si quitamos las gráficas de las tangentes y cambiamos la notación por esta: $\frac{dy}{dx}$, en $x = x_0$? En cuanto a la habilidad de transferencia de la información gráfica a la notación: $f(x+h)- f(x)>0$ y $f(x) <0$, prácticamente la mitad de los participantes mostraron un manejo aceptable, es posible que se deba a que estas propiedades fueron aplicadas a intervalos *grandes*, en cambio en la pregunta anterior se aplicó a una propiedad variacional *puntual*.

- En cuanto a la habilidad de transferir información variacional del plano analítico al gráfico se observaron varias cuestiones. Casi una quinta parte de los participantes presentaron esbozos de gráficas consistentes con las condiciones: $f(a) < 0$ y $f'(a) <0$, en otras producciones las relacionaron con los ceros de la función. Cuando las condiciones analíticas prácticamente *dibujan* a la función primitiva, dos tercios en el caso anterior y más de las tres cuartas partes de los participantes en la Actividad F, presentaron esbozos aceptables. Aunque es notoria la proclividad de dibujar el punto estacionario superpuesto al eje *x*, parecen sugerir que: $f'(x_0) = 0$ implica $f(x_0) = 0$. Al pedir la construcción de una función polinómica dados los puntos estacionarios (Actividad E) sólo un tercio de los participantes logran producciones aceptables, utilizan el teorema fundamental del álgebra para construir el polinomio, derivan, integran y presentan un esbozo (también aceptable) el cual se supone fue un auxiliar fundamental.

- En cuanto a la habilidad de transferir información del plano gráfico al mismo plano gráfico, más de la mitad de los participantes mostraron evidencias de poder elegir aceptablemente las gráficas de $f'(x)$ y $f(x)$ dadas ambas, pero cuando se trata de hacer esbozos de $f(x)$ dado el de $f'(x)$ (como en las actividades H e I) menos de la mitad logran hacerlos. Quienes no lo logran hacen esbozos que indican cierta simetría entre las gráficas de $f(x)$ y $f'(x)$.

- Por la forma en que están planteadas algunas preguntas no hay elementos suficientes para afirmar que los estudiantes pensaron unidireccionalmente, como se pretendía: del plano analítico al gráfico o del gráfico al analítico, sobre todo en las Actividades A y B. Es posible que se ponga en juego un proceso dialéctico de pensamiento: analizar la gráfica y corresponderla con su expresión analítica, y a la vez, leer e interpretar la expresión a analítica y hacerla corresponder con su gráfica.

- El principio de reversibilidad entre $f(x)$ y $f'(x)$ $[f(x) | f'(x)]$ en el cual media la derivación o la integración es una de las características esenciales del *Calculus*. Favorecer este proceso en el plano cognoscitivo puede ayudar a los estudiantes a comprender la relación variacional entre la función primitiva y su derivada ó entre ésta y su integral. En este trabajo se muestran algunos indicios.

Referencias bibliográficas

Dolores C. (1987). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar*. Proyecto de Investigación, aprobado y financiado por el CONACYT registro 25640-S.

Dolores C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, pp 257-272.

Cáceres T. (1997). Pensamiento y lenguaje variacional. Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN.

Colectivo de autores. (1984). *Pedagogía*. Editorial Pueblo y Educación, pp. 199-200.a

Brito H. (1988). Habilidades y hábitos: consideraciones psicológicas para su manejo pedagógico. *Varona,* No. 20, pp. 53-73

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.*. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 173-201.

El Efecto de la Calculadora Graficadora en la Construcción de Relaciones entre Variables Visuales y Algebraicas de Funciones Cuadráticas

Martha Leticia García R., maryletgarcia@hotmail.com
Ana Isabel Sacristán R., asacrist@mail.cinvestav.mx
Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México
México

Nivel superior
Gráfica y Funciones

En este reporte, discutimos algunos de los resultados obtenidos en una estudio cuyo propósito era investigar el uso de las tecnologías computacionales, y en particular de la calculadora graficadora, como facilitadoras para la construcción de relaciones entre diferentes registros de representación, en particular en el paso del registro gráfico al algebraico, para el caso de las funciones cuadráticas.

Autores como Duval (1999), enfatizan el papel de las representaciones semióticas (enunciados, gráficas, diagramas, dibujos, etc.) en la actividad cognitiva de construcción de los conceptos matemáticos. La importancia que Duval y otros autores (e.g. Dreyfus, 1995; Tall, 1996) otorgan a las representaciones semióticas, se basa en la postura de que dichas representaciones permiten el desarrollo de representaciones mentales (conjunto de imágenes y concepciones que el individuo tiene sobre un objeto, situación, etc.) por medio de la interiorización de las primeras.

Sin embargo, no parece suficiente presentar al estudiante con diferentes representaciones para la construcción adecuada de un concepto. La perspectiva constructivista enfatiza también la importancia de la construcción de relaciones entre formas de representación, algo que no es nada inmediato: Ha sido ampliamente observado que surgen dificultades en los estudiantes en las tareas de conversión entre representaciones. Duval (1993), menciona que como algunas de las causas de las dificultades que presentan los estudiantes en tareas de conversión entre representaciones, la falta de familiaridad con las reglas de correspondencia semiótica entre las representaciones gráficas y algebraicas; estas reglas de correspondencia se refieren a la identificación de las variables visuales asociadas con la gráfica, que corresponden a elementos que se encuentran presentes en la expresión algebraica. Así pues, toda modificación que se realice en la gráfica y que produce una alteración de la expresión algebraica asociada, es considerada por Duval, como una variable visual. Duval (ibid) asocia cada variable visual con una unidad significativa en la escritura algebraica para el caso de la recta.

En nuestra investigación, nos basamos en el trabajo de Duval, para establecer relaciones entre variables visuales presentes en la gráfica de una función cuadrática y las unidades significativas correspondientes de su expresión algebraica. Así pues, para la parábola expresada en su forma: y = ax2 +bx+c, establecimos los siguientes criterios:

- La concavidad de la parábola está asociada con el *signo* del coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ en la expresión $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$
- La apertura de la parábola se encuentra asociada con el *valor* del coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$.
- La posición del trazo respecto al origen se asocia con el valor que tiene el parámetro $\boldsymbol{c}$ en la expresión $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$: Si el valor de $\boldsymbol{c}$ es positivo, la parábola corta al eje *y* por encima del origen; si es negativo, la parábola corta al eje *y* por debajo del origen; y si es igual a cero, la parábola pasa por el origen.

En cuanto a las dificultades para pasar de un registro a otro en el caso de las funciones cuadráticas, éstas han sido documentadas en un estudio realizado por Zaslavsky (1997), en Israel. Dicho autor identifica algunos obstáculos conceptuales relacionados con el aprendizaje de las funciones cuadráticas en tareas de conversión entre representaciones gráficas y algebraicas. Los obstáculos identificados por Zaslavsky, y que utilizamos para el diseño y análisis de nuestra investigación, son los siguientes: (a) El relacionado con la interpretación de la información gráfica. (b)El que aparece al relacionar una función cuadrática y una expresión cuadrática. (c)El que surge de la analogía entre una función cuadrática y una función lineal. (d) El relacionado con los cambios en la forma algebraica de una función cuadrática cuyo parámetro es cero. Y (d) El que aparece del sobre-énfasis en sólo una coordenada de puntos especiales de la gráfica.

En nuestra investigación, estábamos interesadas en investigar la utilización de herramientas computacionales, en particular de la calculadora graficadora, para el manejo de las variables visuales y las unidades significativas de las funciones cuadráticas, mencionadas arriba. Entre nuestras consideraciones para la incorporación de esta tecnología estaba el hecho de que dicha tecnología permite un manejo simultáneo de diferentes representaciones, y da la posibilidad al alumno de explorar mediante modificaciones en alguna de ellas los cambios que se producen en las restantes; además, dicha tecnología permite trabajar con los objetos matemáticos en forma dinámica, a diferencia de la forma tradicional (con papel y lápiz) en la que la representación de los objetos permanece estática.

Metodología

Nuestra investigación se llevó a cabo con parte de un grupo de 37 alumnos de una escuela de nivel superior en la carrera de Ingeniería, en 4 etapas descritas abajo. Para la etapa principal, tomando en cuenta los obstáculos señalados por Zaslavsky (ver arriba) y los criterios que definimos de relación entre las variables visuales y las unidades algebraicas significativas (también arriba mencionados); y basándonos en consideraciones de tipo constructivista, diseñamos una secuencia de actividades de exploración de las funciones cuadráticas, utilizando la calculadora TI-92. Las otras etapas fueron utilizadas para evaluar los efectos de las actividades con la calculadora en la construcción de relaciones entre el registro gráfico y el algebraico. Se realizó inicialmente un cuestionario diagnóstico previo a la etapa de actividades con calculadoras graficadoras; la tercera etapa consistió en la aplicación de un cuestionario final, y la cuarta y última, fue una fase de entrevistas clínicas.

a) Cuestionario diagnóstico

Este cuestionario se aplicó a los 37 alumnos del grupo. El propósito de este cuestionario era detectar las dificultades que presentan los estudiantes en relación con los obstáculos descritos por Zaslavsky. El cuestionario consistía en 4 preguntas:

- La primera trataba de conocer qué puntos de la gráfica identificaban los estudiantes para relacionarlos con una expresión algebraica que debía ser propuesta por ellos. Al proponer esta pregunta se consideró que los estudiantes reconocerían la gráfica presentada como una parábola, y que partirían de la expresión $y = x^2$ que es conocida por ellos desde cursos anteriores.
- En la segunda pregunta, el objetivo era conocer si los estudiantes podían relacionar los valores de los parámetros a, b, y c, de las expresiones algebraicas proporcionadas (expresadas en la forma $y = ax^2+bx+c$), con una gráfica propuesta.
- En las tercera y cuarta preguntas, el interés era conocer si los alumnos identificaban, en la ecuación $y = ax^2+bx +c$, que el valor de c coincidiera con una de las coordenadas del vértice de la parábola, que el valor de b fuera cero, y si verificaban que el coeficiente de x^2 fuera uno. Se investigaba, también, qué elementos utilizaban los estudiantes para explicar y/o representar el "desplazamiento" de la gráfica hacia la izquierda o derecha del origen, si utilizaban las coordenadas de los puntos de intersección con el eje y, o las coordenadas de los vértices de las parábolas (los vértices de estas parábolas se localizaban en el eje x).

b) Actividades con la Calculadora

De los 37 alumnos que contestaron el cuestionario diagnóstico, 10 de ellos trabajaron las actividades con la calculadora. Nuestro interés, al diseñar las actividades con la calculadora, se centró en que las actividades ayudaran a los estudiantes a identificar las variables visuales presentes en la gráfica de una función cuadrática y relacionarlas con los parámetros a, b y c, de la expresión algebraica correspondiente.

En las actividades diseñadas, la pantalla de la calculadora fue dividida en dos partes; de esta forma, los estudiantes podían realizar un manejo simultáneo de los dos registros (el visual y el algebraico), para que las modificaciones efectuadas en uno de ellos pudieran observarse simultáneamente en el otro. Tenían además la posibilidad de hacer tabulaciones numéricas con la calculadora (en particular en la actividad 7).

Un par de actividades (1 y 3) tenían como objetivo familiarizar a los alumnos con la calculadora. Las demás actividades se centraban en exploraciones modificando los parámetros de la expresión algebraica. Por ejemplo, en la actividad 2 se propone experimentar modificando el parámetro ***a*** (con el propósito de relacionarlo con la concavidad) de las funciones $y_1=4x^2+2x+1$, $y_2=-4x^2+2x+1$, observar las gráficas respectivas, y experimentar con otras funciones. Las demás actividades se realizaron en forma similar, experimentando modificando los parámetros ***b*** y ***c.***

Además de observación directa, durante las actividades se recolectaron datos adicionales mediante pequeños cuestionarios incluidos al final de las hojas de trabajo de cada actividad.

c) Cuestionario final y entrevistas

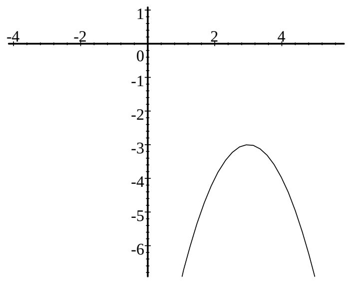
El cuestionario final se aplicó a los 10 estudiantes que trabajaron las actividades. Nueve de estos estudiantes fueron entrevistados unos pocos días después, para conocer con mayor detalle los cambios que se produjeron con el desarrollo de las actividades con la calculadora. El cuestionario final, al igual que el cuestionario inicial, estaba formado por 4 preguntas, del mismo estilo que las del primer cuestionario: En particular, la pregunta 2 era idéntica a la del cuestionario inicial, con el propósito de conocer si los estudiantes habían modificado la interpretación de las variables visuales presentes en la gráfica proporcionada.

Aquí centraremos la atención sobre los resultados que surgieron al comparar las respuestas a esta segunda pregunta, antes y después de las actividades con las calculadoras:

Pregunta No. 2

Cuál de las siguientes ecuaciones puede ser la ecuación de la parábola de la figura. Escribe tus respuestas en la tabla que sigue a la gráfica.

$Y = x^2-6x+c;\ c>0$
$Y = -ax^2+6x;\ a>0$
$Y = -x^2+ bx -12;\ b>0$
$Y = -ax^2 -10;\ a>0$



Ecuación de la parábola	*La gráfica sí corresponde a la ecuación*	*La gráfica no corresponde a la ecuación*	*¿Porqué?*
$Y=x^2-6x+c$			
$Y= -ax^2+6x$			
$Y= -x^2+bx-12$			
$Y= -ax^2-10$			

(Además de pedir a los alumnos que justificaran sus respuestas, también se llevó un registro de todas sus notas y operaciones efectuadas para responder la pregunta).

El objetivo de esta pregunta era conocer si los estudiantes podían relacionar los valores de los parámetros ***a***, ***b***, y ***c***, de las expresiones algebraicas proporcionadas (expresadas en la forma $y = ax^2+bx+c$), con la gráfica propuesta, utilizando los siguientes criterios de análisis:

a) Si reconocían, a partir del valor del parámetro ***a***, si la parábola se abría hacia arriba o hacia abajo.
b) Si identificaban el valor de ***c***, como determinante de las coordenadas del punto de intersección de la parábola con al eje ***y***.
c) Si interpretaban qué indicaba el valor de *c*, cuando $c = 0$.
d) Si transformaban algebraicamente las ecuaciones proporcionadas, para relacionarlas con las coordenadas del vértice de la parábola: por ejemplo, completando cuadrados o factorizando.

Se consideró que descartarían la primera ecuación debido a que el signo del coeficiente de x^2 era positivo; el interés, entonces, era analizar los argumentos que utilizaban los estudiantes para descartar las ecuaciones incorrectas.

Resultados derivados de las respuestas a la Pregunta 2

Las respuestas de los alumnos a esta pregunta se utilizaron para comparar (antes y después de las actividades con la calculadora) su interpretación de las variables visuales presentes en la gráfica, así como qué tipo de relación podían establecer con las unidades significativas (parámetros a, b y c) presentes en las expresiones algebraicas propuestas (de la forma $y= ax^2+bx+c$). Los resultados a esta pregunta se resumen en la tabla abajo:

Pregunta 2: Expresiones algebraicas de la forma $y= ax^2+bx+c$		
(Número total de estudiantes: 9)	Cuestionario Inicial: No. de alumnos que:	Cuestionario Final: No. de alumnos que:
Asocian el signo del parámetro ***a*** con la concavidad de la parábola	**3**	**7**
Identifican que la ordenada del punto de intersección de la parábola con el eje ***y*** corresponde al valor del parámetro ***c***.	**0**	**5**
Identifican que un valor del parámetro ***b*** distinto de cero, traslada horizontalmente a la parábola.	**2**	**6**
Identifican la expresión algebraica correcta para la gráfica propuesta.	**1**	**7**

Tabla comparativa de las respuestas a la pregunta 2.

Resultados de la Pregunta 2 durante el <u>Cuestionario Inicial</u>:

- Sólo 3 de los alumnos asocian el signo del parámetro ***a*** con la concavidad de la parábola: descartan la expresión $y = x^2-6x+c$; c>0, indicando que el coeficiente de x^2 es positivo.
- Ninguno de los 9 alumnos puede identificar que la ordenada del punto de intersección de la parábola con el eje ***y*** corresponde al valor del parámetro ***c***.
- Sólo 2 de ellos, señalan que un valor del parámetro ***b*** distinto de cero producirá un desplazamiento horizontal de la gráfica correspondiente.
- Sólo un alumno identificó correctamente la expresión algebraica que correspondía a la gráfica presentada.
- De las respuestas a esta pregunta, inferimos que la mayoría de los estudiantes no pudieron establecer una relación entre las variables visuales de la gráfica y los

parámetros de la expresión algebraica. Tuvimos afirmaciones como la siguiente: *"la gráfica no corresponde porque no me dan los puntos de referencia o de valores que yo le doy a la ecuación".*

- Aún el estudiante que identifica correctamente la expresión algebraica, no relaciona explícitamente las variables visuales con los valores de los parámetros ***a***, ***b*** y ***c***, ya que señala: **"***la ecuación es* $y = -x^2+bx-12$; $b>0$*, porque la ecuación va hacia abajo y se desplaza hacia la derecha 3 lugares. Al sustituir los valores en la ecuación salen los puntos de la gráfica***"** Este alumno realizó sustituciones de ***x*** por diferentes valores para identificar la expresión.
- 5 de los 9 estudiantes proponen que el valor para los parámetros ***a***, ***b*** y ***c*** es 1, y los sustituyen en las expresiones algebraicas para tratar de encontrar puntos y verificar si pertenecen a la gráfica.
- Un estudiante propone valores, al parecer arbitrarios, para ***x*** (por ejemplo x=-3) y los sustituye en las expresiones algebraicas para conocer los valores de ***y***, sin tomar en cuenta los valores de los parámetros. Otro estudiante identifica puntos de la gráfica y, por ensayo y error, trata de encontrar los valores que podrían tener los parámetros ***a***, ***b*** y ***c.***

Resultados de la Pregunta 2 durante el Cuestionario Final:

Las respuestas a la pregunta 2 durante el cuestionario final contrastan con las obtenidas inicialmente. La mayoría de los estudiantes muestran indicios de que haber logrado construir más relaciones entre las variables visuales de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica correspondiente:

- 7 de los 9 estudiantes asocian el signo del parámetro ***a***, con la concavidad de la parábola, y utilizan esta relación para descartar la expresión $y = x^2-6x+c$; $c>0$. Encontramos afirmaciones como: "*cuando es positiva* x^2*, es cóncava hacia arriba*"
- 5 estudiantes utilizan la ausencia del parámetro ***c***, para descartar que la expresión $y = -ax^2+6x$, $a>0$ corresponda a la gráfica; explican que el parámetro ***c*** indica dónde corta la parábola al eje ***y.***
- 6 estudiantes relacionan el valor del parámetro ***b*** con una traslación horizontal de la parábola; utilizan este hecho para descartar la expresión $y = -ax^2-0$; $a>0$, explicando que si el valor de ***b*** es cero, el vértice estaría sobre el eje ***y***.
- 7 estudiantes asocian la gráfica con la expresión algebraica correcta; utilizan argumentos como los siguientes: *"la primera ecuación no corresponde, porque de inicio en la ecuación, el valor que le corresponde a* **a** *es positivo, por lo tanto no puede ser cóncava hacia arriba*"; *"la tercera es la ecuación que corresponde a la gráfica porque: abre hacia abajo, existe* **b** *y sabemos que se puede desplazar a la derecha, y* **c** *nos indica que se va a mover con respecto al eje* **y***"; "la expresión* $y=-ax^2-10$; $a>0$ *no corresponde se desplaza verticalmente hacia abajo en el eje* **y***"*

El caso de Juan

Para ilustrar con mayor profundidad el cambio producido por las actividades en relación con esta pregunta 2, nos parece interesante dar algunos elementos del caso del estudiante Juan, porque muestra marcadas diferencias antes y después de las actividades con la calculadora.

En el examen inicial, Juan propone valores arbitrarios para los parámetros expresados de manera general (***a***, ***b*** o ***c***) y crea tablas de valores para cada función obtenida. En el caso de $y = -ax^2 -10$ $(a>0)$, propone ***a***=2, pero posteriormente descarta que ésta pueda ser la expresión correcta para la gráfica propuesta usando como argumento que a esta expresión "le faltan términos". Este error de interpretación es señalado por Zaslavsky (1997; ver arriba): dicho autor encontró que la ecuación de una función cuadrática en la cual uno de los parámetros es cero, puede parecer como que no es un elemento de la familia $y=ax^2+bx+c$. De sus respuestas al cuestionario inicial, no parece que Juan relacione ninguno de los parámetros algebraicos con las variables visuales.

Sin embargo, esto cambia a raíz de las experiencias con la calculadora. Observamos durante éstas, que Juan empezó a establecer relaciones entre el valor del parámetro ***c*** y el punto de intersección de la parábola (e.g. señala: **"***el valor de* **c** *es la coordenada que aparecía en* **y")**, así como la relación entre el valor del parámetro ***b*** y una traslación horizontal de la parábola.

En el cuestionario final identifica correctamente la expresión que corresponde a la gráfica y escribe:

"1.- Cuando es positiva x^2 ***es cóncava hacia arriba***
2.- Cuando le falta el parámetro *c* ***no se desplaza el vértice en el eje*** *y*
3.- Si le falta el parámetro *b* ***no se desplaza sobre el eje*** *x"*

Estas afirmaciones se confirmaron durante la entrevista final:

Investigador*: En la pregunta 2 están escritas cuatro expresiones que representan parábolas y una gráfica. Tu escribiste que la primera no representa esta gráfica ¿porqué?*
Juan*: Por lo mismo: por el signo; de que* $\mathbf{x^2}$ *abre hacia arriba, y* $\mathbf{-x^2}$ *abre hacia abajo.*
Investigador*: La segunda ¿por qué no representa la gráfica?*
Juan*: La segunda: porque... ah! porque sería* **c** *se mueve sobre el eje de las* **y**
Investigador*: La cuarta expresión ¿porqué no puede ser?*
Juan*: Por* **b**
Investigador*: ¿Qué representa* **b***?*
Juan*: Que se mueve en el eje de las* **x**
Investigador*: La tercera ecuación me dices que es la correcta, en esta ecuación ¿qué representa -12?*
Juan*: Pues, que se mueve sobre el eje de las* **y**; **x** *es negativa así que es hacia abajo.*
Investigador*: ¿Podrías identificar alguna relación entre este valor de -12 y la gráfica?*
Juan*: Tal vez. Es el punto donde corta la parábola a* **y.** [Juan extiende la gráfica para encontrar el punto de corte de la gráfica y el eje **y**.

Es así cómo Juan pudo establecer relaciones entre las variables visuales y los parámetros mediante las actividades con la calculadora.

Conclusiones

De los resultados arriba presentados, observamos que antes de realizar las actividades con la calculadora los estudiantes no establecían casi ninguna relación (con excepción en algunos alumnos del signo de ***a***) entre las variables visuales observadas en la gráfica y los parámetros correspondientes de la expresión algebraica.

Duval (1999, 1993) señala que una forma de mejorar el manejo de lo que él llama reglas de correspondencia entre las representaciones gráficas y algebraicas es variando los valores que pueden tomar las unidades significativas (en nuestro caso, los parámetros ***a, b*** y ***c*** de la expresión algebraica), y observar los cambios producidos en la representación gráfica. En nuestro estudio pudimos comprobar que la utilización de esta metodología dió los resultados predichos por Duval: Conjuntando los resultados arriba descritos con los resultados adicionales de esta misma investigación, observamos que las experiencias con la calculadora graficadora funcionan como facilitadoras de la formación de conexiones entre los elementos de diferentes registros representacionales. El manejo de las múltiples representaciones proporcionadas por la calculadora parece favorecer en los estudiantes la posibilidad de realizar interpretaciones globales de las gráficas: los alumnos logran identificar algunas de las variables visuales presentes, tales como la concavidad, la posición horizontal del vértice con respecto al eje ***y***, y la posición vertical del vértice de la parábola con respecto al eje ***x.*** La posibilidad de modificar los valores de los parámetros e interpretar visualmente las gráficas resultantes permite a su vez relacionar las variables visuales de la gráfica, con las variables algebraicas correspondientes.

Claro está que las construcción de dichas relaciones no es un proceso inmediato: al final del experimento todavía detectamos que casi la mitad de los sujetos, aunque reconocen una traslación vertical, utilizan incorrectamente la ordenada del vértice de la parábola como el punto de referencia para dicha traslación (en lugar del punto de intersección de la parábola con el eje ***y***). Sin embargo, de manera general, nuestros resultados indican que actividades de exploración con la calculadora pueden ayudar a mejorar la conexión entre las diferentes formas de representación, y minimizar las dificultades (como las mencionadas por Zaslavsky - una de las cuáles se ilustra en el caso de Juan) que se han observado en la interpretación de gráficas.

Referencias bibliográficas

Duval R. (1993), "Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* 5. IREM Strasbourg.

Duval R. (1999), "On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: from episodic to virtual culture". *Proceedings of the Twenty-First Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Volume I, p.3-26.

Dreyfus, T. (1995), "Imagery for diagrams", en Sutherland, R. & Mason, J (eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* NATO ASI Series, Series F. Vol.138, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Pp. 3-19.

Tall, D.O. (1996) "Function and Calculus". Cap. 8 en Bishop, A.J. et al (eds) *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers. Pp. 289-325.

Zaslavsky O. (1997), "Conceptual Obstacles in the Learning of the Quadratic Functions*". Focus on Learning Problems in Mathematics Winter Edition*, 1997, Volume 19 No. 1, p.20-44. Center for Teaching /Learning of Mathematics.

El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales

Rosa María Farfán, rfarfan@mail.cinvestav.mx
Asuman Oktaç
Andrés Rivera, anrivera@mail.cinvestav.mx
Cinvestav-IPN, México

Resumen

En el estudio se hará uso de Cabri-géometrè II, no como una herramienta para hacer matemáticas, sino como una ayuda pedagógica para trasmitir las nociones generales de transformación lineal a través de una intuición geométrica, creando un ambiente de aprendizaje adecuado con el software. El papel del software será proveer una base conceptual sobre la cual la representación transformaciones lineales puedan construirse por medio de arreglos numéricos.

Los alumnos, en algunos casos, están familiarizados al trabajar con procesos analíticos, de tipo algorítmico, pero no con los conceptos y estructuras matemáticas, ya que usualmente *desarrollan tareas en el marco de lo analítico y no en el conceptual.* Este es el llamado obstáculo del formalismo:

> *Los conocimientos de los estudiantes pueden ser muy limitados, para que lleguen a abstraer de los ejemplos que conocen, la estructura de espacio vectorial... Para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que 'un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos'.* (Dorier, J-L., et al., 1997a).

El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes cuando sólo operan con expresiones sin relacionarlas con algún significado.

Objetivo de estudio

Nuestro objetivo general radica en profundizarse en el conocimiento de la naturaleza de los modos de pensamiento, para el caso particular de las transformaciones lineales. Pretendemos identificar el tránsito entre ellos y establecer su funcionalidad.

Para lograrlo se llevarán a cabo las siguientes tareas, observar el desempeño de los estudiantes:
1) Ante secuencias didácticas preparadas para evitar el obstáculo del formalismo.
2) En los tres modos del pensamiento y su tránsito entre ellos.

Consideramos de gran importancia nuestra investigación, ya que una de las intenciones es contribuir en mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. Basándonos en los resultados obtenidos, podamos aportar ideas y alternativas de enseñanza que hagan surgir los conceptos abstractos del Álgebra Lineal a través de actividades que motiven a los estudiantes utilizando los adelantos tecnológicos. La otra intención importante es el hecho de que el software ayude al estudiante a construir y entender los objetos matemáticos, y de esta manera prevenir la construcción del obstáculo del formalismo.

ANTECEDENTES

El estatus epistemológico del álgebra lineal y el obstáculo del formalismo

Dentro de los orígenes esenciales del Álgebra Lineal, se encuentran: lo *geométrico*, *analítico* y *funcional* (Dorier, J-L., 1999). De hecho, el desarrollo del Álgebra Lineal se inicio por el pensamiento analítico sobre el geométrico (Sierpinska, 1996; Dorier, 1996). Es hasta después de la introducción de los métodos analíticos en la geometría, por Descartes en 1637 y Fermat en 1643, que con esta nueva organización, resulta el problema con un nuevo enfoque: "la linealidad". En 1679 Leibniz, inicia la llamada *Geometría de Situación*, que es un análisis geométrico intrínseco, ya que no estaba satisfecho con el álgebra, porque no proporcionaba los métodos más cortos ni las construcciones geométricas más elegantes. Con los trabajos de Cramer (1750), *Introduction à l'analyse des courbes algébriques,* y Euler (1750), *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes,* El estudio de sistemas de ecuaciones lineales desarrolla los primeros conceptos ligados a la linealidad: *rango y dualidad,* la unificación de las nociones de linealidad comunes a las ecuaciones y a sus soluciones. De hecho, en 1844 Grassmann publica la *Teoría lineal de extensión (Lineale Ausdehnungslehre).* Esta nueva teoría puede ser aplicada a la geometría, la mecánica y otros campos científicos independientes. (Dorier, J-L., et al, 1997b)

Dorier (1995) dice que los conceptos del álgebra lineal son difíciles de entender, porque son de naturaleza epistemológica sofisticada y abstracta, y que las teorías axiomáticas *de espacios* vectoriales o grupos, no son creadas como otros elementos matemáticos, para resolver nuevos problemas.

Él describe un enfoque para la enseñanza del álgebra lineal en los que él explícitamente enseña lo que llama "conceptos unificadores y generalizadores". Estos son conceptos construidos para unificar y generalizar diferentes métodos ya operativos en varios contextos. Para enseñar tales conceptos, por ejemplo la estructura de un espacio vectorial, propone usar una secuencia basada sobre un análisis epistemológico, en el que se crea un contexto artificial que motiva el desarrollo de los axiomas de espacio vectorial por los mismos estudiantes. Dice que hay argumentos que motivan la enseñanza del álgebra lineal en el meta-nivel, por ejemplo en una perspectiva interaccionista, dichos elementos pueden ser fácilmente el objeto de la comunicación entre los alumnos y las matemáticas, su interés "para lanzarse a la acción". Son justamente los conocimientos en matemáticas, los que se tratan para resolver un problema y tener éxito rápido, sin mucho gasto de energía cada vez, "las ayudas para la acción" son suficientemente generales para ser recicladas y autogenerar, a diferencia de las recetas. Los elementos de tipo "meta" pueden considerarse como una interface explícita entre los alumnos, y las matemáticas, como un todo de conocimientos a adquirir: los alumnos, que tienen representaciones, conocimientos y automatismos, necesitan integrar los nuevos conocimientos a los precedentes, los metaconocimientos pueden participar en esta integración, en ciertos momentos precisos de manera limitada y diferente, según los individuos y bajo ciertas condiciones.

Los alumnos, en algunos casos, están familiarizados al trabajar con procesos analíticos, de tipo algorítmico, pero no con los conceptos y estructuras matemáticas, ya que usualmente *desarrollan tareas en el marco de lo analítico y no en el conceptual.* Este es el llamado obstáculo del formalismo:

> *Los conocimientos de los estudiantes pueden ser muy limitados, para que lleguen a abstraer de los ejemplos que conocen, la estructura de espacio vectorial... Para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que 'un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos'.* (Dorier, J-L., et al., 1997a).

El obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes cuando sólo operan con expresiones sin relacionarlas con algún significado. Como menciona Dorier, J-L., et al., (1997a), un estudiante tiene que trabajar con ecuaciones, olvidando momentáneamente lo que representan, pero sabiéndolo y regresando a ese significado cuando sea necesario. O tiene que reemplazar las transformaciones lineales explícitas por matrices (lo que Dorier llama tablas de números). El estudiante se enfrenta con dicho obstáculo cuando ya no puede relacionar la expresión con su significado y el álgebra lineal llega a ser un manejo de símbolos.

Este obstáculo hace que el estudiante reproduzca el discurso del maestro o de algún libro de texto, por ejemplo, muchos estudiantes calculan el polinomio característico aun cuando solo tengan que verificar si un vector dado es o no un vector propio de una transformación lineal. En algunos casos los estudiantes al ver un sistema de ecuaciones lineales, aún sin saber que es lo que se les pide empiezan a resolverlo (Sierpinska, A. & Dreyfus T., 1999).

Según Sierpinska, el obstáculo del formalismo es de corte didáctico y debe de tratar de evitarse (Sierpinska, A. & Dreyfus T., 1999; Sierpinska, A. 1999). La tarea de diseñar situaciones con este fin no es fácil dada la complejidad de dicho obstáculo, pero algunas investigaciones dan resultados sobre lo que funciono para ellos y cuales aspectos podrían mejorarse.

Los modos de pensamiento y la importancia de la visualización y su relación con el modo sintético.

En la evolución de las matemáticas, se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, sin que la aparición de alguno de ellos eliminara a su antecesor. El álgebra lineal, siendo una rama de las matemáticas, no quedó exenta de tales modos de pensamiento, y hasta la fecha se sabe que éstos coexisten dentro de las mentes de las personas. Sin embargo, Sierpinska, A. (1996) con un ejemplo, nos muestra que no es conveniente considerar a los modos de pensamiento mencionados como:

> *... estados en la evolución del pensamiento algebraico, ... es preferible verlos como modos de pensamiento que son igualmente utilizados, cada uno dentro de su propio contexto y para propósitos específicos, y principalmente cuando ellos están en interacción.*
>
> *La evolución del álgebra lineal inició como un proceso de pensar analíticamente acerca del espacio geométrico. Tomando una perspectiva muy general, se podrían distinguir, en esta evolución, los grandes pasos referidos a dos procesos. Uno fue la* ***aritmetización del espacio****, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en* R^n*. El otro fue la desaritmetización del espacio o su* ***estructuralización****, con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas.*

Si queremos referirnos a los objetos matemáticos, entonces:

> *... la principal diferencia entre los modos de pensamiento “sintético” y “analítico” es que en el modo sintético, los objetos son, en cierto sentido, dados directamente a la mente, la cual entonces trata de describirlos, mientras que en el modo analítico ellos son dados indirectamente: de hecho, son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos..*

Ahora, la diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural, es que en el primero, un objeto está definido por una formula que permite calcularlo, y muchos razonamientos analíticos-aritméticos tienen una tendencia de mostrar que dos procesos conducen al mismo resultado; por otro lado, en el modo de pensamiento analítico-estructural, los objetos están mejor definidos por un conjunto de propiedades.

No debe creerse que el pensamiento sintético necesariamente tiene que ser geométrico, sino más bien es necesariamente intuitivo, aunque sí se relaciona con la geometría por ser esta de carácter intuitivo. Entonces existe una relación entre los modos sintético-geométrico, analítico-estructural y la visualización, aunque esta relación no es obvia porque uno de ellos no necesariamente implica al otro.

Considerando las dificultades experimentadas con estudiantes sobre ideas de Álgebra Lineal (Hillel, J. & Sierpinska, A., 1994), y la disponibilidad creciente de computadoras y calculadoras gráficas y capacidades de manipulación simbólica han generado interés por rediseñar la enseñanza del Álgebra Lineal (Hern, T. & Long, C., 1996). Algunas propuestas de Álgebra Lineal (Pitcher, N., 1991) intentan fomentar el pensamiento visual y el uso de la tecnología. Además, ha habido esfuerzos por usar la tecnología de diversas formas para enseñar conceptos de Álgebra Lineal, pero la mayoría de estos enfoques aprovechan parcialmente las capacidades gráficas del software, ya que son usados principalmente como una herramienta para hacer matemáticas y no como una ayuda pedagógica para los estudiantes.

La relación entre la visualización y el desempeño matemático.

La visualización llega a ser cada vez más importante en las matemáticas principalmente a causa del poder de la actual tecnología. La comunidad de Matemática Educativa también reconoce la importancia de los procesos visuales y del uso de representaciones visuales (Hitt, F., 1992, 1994, Cantoral, R. & Reséndiz, E., 1997, Farfán, R. & Albert, A., 1997, Cordero, F. & Solís, M., 1997). La visualización juega un papel importante en la comprensión matemática porque apoya a la intuición y al razonamiento matemático.

El reconocimiento del papel de la visualización a aumentado en las matemáticas. La condición actual de la visualización en las matemáticas es descrita por Steen (1990) como se indica a continuación:

> *Gracias a las gráficas por computadora, la mayoría de las búsquedas de patrones matemáticos son ahora orientadas por que uno puede ver realmente con el ojo, considerando el siglo XIX los gigantes matemáticos como Gauss y Poincaré tuvieron que depender sólo de ver con su mente lo que había dominado el ojo. ... Por siglos la mente ha dominado al ojo en la jerarquía de los matemáticos prácticos; hoy el balance esta siendo restaurado cada vez que la matemática encuentra nuevas maneras para ver con el ojo y con la mente.* (p. 2)

Para resumir, el uso de la visualización en la educación matemática es justificada por la importancia de aumentar la visualización en las matemáticas, y por los nuevos enfoques de la naturaleza de las matemáticas. Es necesario un estudio de los efectos de enseñar siguiendo enfoques que fomentan el pensamiento visual.

Duval, R. (1998) nos explica que:

> "*Toda representación se refiere a un objeto, al menos para el sujeto que la produce. Si el sujeto no dispone más que de una sola representación, el objeto que pretende identificar a través de ésta, no puede ser distinguido de esta representación; el objeto se confunde con la representación que se tiene y ahora se tienen tantos objetos como representaciones. El conocimiento científico comienza cuando el sujeto es capaz de disponer varias representaciones para un mismo objeto y transitar de una representación a otra según el tratamiento que se dé a dicho objeto*".

Los símbolos reales o las representaciones usadas para hacer matemáticas tienen dos funciones: para apoyar el procesamiento cognitivo interno y para permitir la comunicación entre personas (Kaput, 1987). El pensamiento de muchos matemáticos y estudiantes se mejora si ellos son capaces de tener mentalmente una representación particular, para algunos una visual, y se mejora aun más cuando ellos son capaces de usar varias representaciones en paralelo (Dreyfus, 1991b).

En esta estructura un concepto matemático se entiende “si su representación mental es parte de una red de representaciones. .. [y] el grado de comprensión es determinado por el número y la fortaleza de las conexiones” (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 67). Los procesos de aprendizaje consisten en las siguientes cuatro etapas: (a) usando sólo una representación; (b) usando más de una representación en paralelo; (c) nexos de elaboración entre representaciones paralelas, y (d) las representaciones integrantes y flexiblemente conectadas entre ellas (Dreyfus, 1991a).

De aquí en adelante, es importante estudiar qué sucede cuando los estudiantes se sumergen en una aplicación de imágenes visuales generadas por computadora o calculadora y que pueden ser utilizados para comprender el desarrollo de ideas del Álgebra Lineal. Es también importante investigar cómo se alcanza este enfoque en el salón de clases auxiliándose del desarrollo de la visualización.

Un estudio que nos interesa, relacionado directamente sobre transformaciones lineales.

En el estudio realizado por Sierpinska & Dreyfus (Sierpinska, A . & Dreyfus, T., 1999) fue hacer uso de Cabri-géometrè II, no como una herramienta para hacer matemáticas, sino como una ayuda pedagógica para trasmitir las nociones generales de espacio vectorial, transformación lineal y eigenvector a través de una intuición geométrica, creando un ambiente de aprendizaje adecuado con el software. El papel del software fue proveer una base conceptual sobre la cual la representación de vectores y transformaciones lineales pudieran construirse por medio de arreglos numéricos.

Elaboraron una versión ampliada del software con la intención de ayudar a los estudiantes a desarrollar ciertos conceptos básicos del Álgebra Lineal a fin de resolver en parte algunos problemas que el estudiante enfrenta al querer comprender un concepto y de esta manera prevenir la construcción del obstáculo del formalismo. El enfoque en el análisis no fue sobre los problemas matemáticos que el ambiente Cabri hizo posible o no resolvió, sino sobre las “interpretaciones de las representaciones” de los estudiantes.

Los resultados del artículo

La diferencia entre lo que tenían en mente los investigadores y lo que pasó realmente:

Orígenes independientes del diseño.

a) **Origen epistemológico.-** La proporcionalidad fue una idea poderosa en el entendimiento de relaciones entre magnitudes de variables las cuales algunas veces reciben el rango de una “metáfora” explicativa y llega a ser un obstáculo. (Sierpinska, A., 1992). La proporcionalidad ocupa un lugar importante en el currículo de la escuela secundaria y esto refuerza el obstáculo.

La definición de “transformación lineal” no pudo surgir espontáneamente en la resolución de un problema específico, pues es una definición axiomática. Existen dos clases de definiciones en matemáticas y los estudiantes parecieron estar enterados sólo una de ellas, a saber, la “definición descriptiva” la cual es también encontrada en dominios de otros temas matemáticos. Usando definiciones axiomáticas en la resolución de problemas, se requiere de un pensamiento analítico, con el cual los estudiantes pueden tener varias dificultades, aún en el nivel universitario.

b) **Origen didáctico.-** Al introducir las nociones a través de definiciones se pierde la motivación de los estudiantes. Ellos mismos reclaman que es bastante trabajo tener que verificar las propiedades de suma de vectores y multiplicación por un escalar para estar seguros de que una transformación es lineal. El hecho de explicar sus argumentos sólo con el criterio de proporcionalidad tiene mucho que ver con el modo en que se les enseña en la escuela transformaciones lineales. Así la necesidad de verificar ambas condiciones de linealidad puede sólo ser una parte del contrato didáctico entre maestro y estudiante y no una parte de la propia experiencia de los estudiantes.

Los defectos del diseño

La noción de base no fue explícitamente introducida y discutida en las sesiones. Sólo a través de la intuición, se esperaba que las nociones de estos conceptos aparecieran en el transcurso de las actividades que realizaran. Los estudiantes no desarrollaron completamente el entendimiento de que un par de vectores no colineales generan todos los vectores en el plano. Sin embargo este concepto es esencial para el entendimiento de que una transformación lineal está completamente determinada por sus valores sobre una base, una noción con la cual los estudiantes tienen dificultades.
Mencionan los autores:

> "*…también en nuestro diseño las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar están tratadas separadamente. La operación de combinación lineal no fue introducida en un modo explícito. Puede no ser obvio para los estudiantes que estas operaciones pueden ser combinadas. Esto puede contribuir a sus dificultades, al no poder observar que cualquier vector del plano puede obtenerse a partir de dos vectores no colineales; otra dificultad es procesar las dos condiciones de linealidad para obtener una única condición (preservar combinaciones lineales).*
> *Otro posible origen de las discrepancias entre las expectativas y la conducta de los estudiantes es que al mismo tiempo se presentó a los estudiantes cierto contenido matemático. Por ejemplo la presentación de los ejemplos no lineales pudo ser prematuro. La transformación semilineal, la cual satisface la propiedad de dilatación pero no la de suma de vectores claramente no fue programada para darse a los estudiantes. Esto hace predecir que repetidamente reclamen que una transformación fue lineal después que han verificado sólo la propiedad de dilatación.*"

Se cree que los problemas y las sugerencias para los estudiantes pueden elegirse y formularse; pero esto no es claro. A priori cierta corrección parece obvia. Por ejemplo en el problema de extender una transformación lineal de una base a una transformación lineal de todo el plano, después de que los estudiantes fracasaron para obtener la imagen de un vector arbitrario, una aparentemente ayuda más útil, puede ser preguntar a los estudiantes si ellos pueden ser capaces de construir las imágenes de varios vectores particulares.

Los resultados anteriores nos hacen reflexionar y nos motivan a diseñar nuevas secuencias didácticas que permitan mejorar la presentación del tema de transformaciones lineales mediante el ambiente de Cabri-géometrè II y lograr mejores resultados.

Sin embargo, surgen varias preguntas. ¿Qué se considera verificar una conjetura trabajando en ambientes computacionales? ¿Es suficiente justificar una conjetura basada en la apariencia de un diagrama generado por computadora? ¿Qué tipo de respuestas se considerarán apropiadas cuando los alumnos usan software dinámico? ¿Cómo evaluar si el estudiante esta asociando algún significado a validaciones en estos ambientes computacionales?

EL ESTUDIO EN PARTICULAR: JUSTIFICACIÓN Y FASES

Objetivo de estudio

Nuestro objetivo general radica en profundizarse en el conocimiento de la naturaleza de los modos de pensamiento, para el caso particular de las transformaciones lineales. Pretendemos identificar el tránsito entre ellos y establecer su funcionalidad.

Para lograrlo se llevarán a cabo las siguientes tareas, observar el desempeño de los estudiantes:

1. Ante secuencias didácticas preparadas para evitar el obstáculo del formalismo.
2. En los tres modos del pensamiento y su tránsito entre ellos.

Las etapas a seguir

Para poder lograr las tareas antes mencionadas se proponen las siguientes etapas

- Estudio del obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales. Este incluye sus manifestaciones, concepciones de los estudiantes, identificación del significado de trabajar este concepto en los diferentes modos.
- Diseño de una secuencia para introducir la transformación lineal usando el ambiente Cabri con el objetivo de prevenir la construcción del obstáculo del formalismo, teniendo como antecedentes los resultados de Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1999), tratando de evitar los diferentes significados que se dieron a las representaciones.
- Aplicación de la secuencia a los estudiantes de nuevo ingreso de las carreras de Lic. en Computación y de Ingeniería del Instituto de Ciencias Exactas de la Universidad autónoma del Estado de Hidalgo.
- Entrevistas con los estudiantes con el fin de observar la existencia del obstáculo del formalismo y ver cómo manejan el concepto de transformación lineal en los diferentes modos de pensamiento. En particular nos interesa ver el desempeño en el modo sintético-analítico, ya que este modo no recibe una atención adecuada.
- Análisis de resultados.

METODOLOGÍA

Se desarrollarán secuencias didácticas, mediante un acercamiento a la metodología de Ingeniería Didáctica (Artigue, M., 1995) en el sentido de que tanto las decisiones a priori como los análisis realizados, sigan un desarrollo del diseño sobre consideraciones: *epistemológica*, *cognitiva* y *didáctica*. Sin embargo este diseño no estará estructurado sobre las situaciones clásicas de acción, formulación y validación, ya que es muy difícil crear situaciones en las cuales el objetivo matemático de los conceptos pueda aparecer espontáneamente en los estudiantes como una solución óptima a problemas específicos. Esto se debe a la naturaleza de los conceptos básicos del Álgebra Lineal y su carácter generalizador y unificador (Dorier, J-L. 1995).

Además compartimos que no es posible hallar una solución evitando prejuicios entre representaciones (Duval, R., 1988, 1993), en la manera en que los estudiantes lo intenten, la noción de representación hace posible resolver la naturaleza de las posibles soluciones, las cuales excluyen la naturaleza del sistema de significados, teniendo que ser elegido por representaciones internas y externas, y su posible implicación sobre las concepciones de los estudiantes.

La aproximación de este estudio será con un enfoque didáctico al utilizar el software Cabri-géometrè II que brinde, mediante las secuencias didácticas, “ayudas pedagógicas” y no sólo sea empleado como una herramienta para resolver problemas. Además que pueda trasmitir las nociones generales de transformaciones lineales a través de una intuición geométrica, creando un ambiente de aprendizaje. El papel del software será el de proveer una base conceptual sobre representaciones de ideas que tiendan a la apropiación y entendimiento del tema.

Consideramos de gran importancia nuestra investigación, ya que una de las intenciones es contribuir en mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. Basándonos en los resultados obtenidos, podamos aportar ideas y alternativas de enseñanza que hagan surgir los conceptos abstractos del Álgebra Lineal a través de actividades que motiven a los estudiantes utilizando los adelantos tecnológicos. La otra intención importante es el hecho de que el software ayude al estudiante a construir y entender los objetos matemáticos, y de esta manera prevenir la construcción del obstáculo del formalismo.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., (1995). *Ingeniería didáctica*. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* "Una empresa docente" Grupo Editorial Iberoamérica. México. pp. 33-59.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (1997). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones*. Cuadernos Didácticos, Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición, Vol. 1

Cordero, F. & Solís, M. (1997). *Las Gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo*. Cuadernos Didácticos, Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición, Vol 2

Dorier, J. L. (1995): Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 29(2), 175-197.

Dorier, J. L. (1996): Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels. In J-L. Dorier (Ed.), tat de l'art de la Recherche Internationale sur l'Enseignement Universitaire en Algèbre Linéaire. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1997a): L'Algèbre Linéaire: L'Obstacle du Formalisme à Travers Diverses Recherches de 1987 à 1995, en J. L. Dorier (ed.), *L'Enseignement de L' l'Algèbre Linéaire en Question*, Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 105-147.

Dorier, J. L. (1997b): Une Lecture Épistémologique de la Genèse de la Théorie des Espaces Vectoriels, *L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question*, Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 27-60.

Dorier, J. L. (1999): Exemples d'interaction entre recherches en didactique et en histoire des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. http:\www.maths.univ-rennes.1.fr\didac\DORIER\semdor1.html

Dreyfus, T. (1991a). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991b). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. En F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the Fifteenth Intemational Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 33-48.

Duval, R. (1998): *Signe et Objet*, I, II Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 6, Strasbourg: IREM, 139-163, 165-196.

Farfán, R. & Albert, A. (1997). *Un Acercamiento Gráfico a la Resolución de Desigualdades*. Cuadernos Didácticos, Grupo Editorial Iberoamérica. Segunda Edición, Vol 3

Galton, F. (1883). *Inquiries into human faculty and its development*. London. England: Macmillan.

Hern, T. & Long, C. (1996). *Viewing Some Concepts and Applications in Linear Algebra.* Visualization in Mathematics, 173-190.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co.

Hillel, J. & Sierpinska, A. (1994): On One Persistent Mistake in Linear Algebra, en *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 1994, Lisbon, Portugal, VoL III*, 65-72.

Hitt, F. (1992). *En torno al uso de las nuevas tecnologías en el proceso educativo: las calculadoras y microcomputadoras en educación matemática*. Cuernavaca: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Hitt, F. (1994). *Educación Matemática y el uso de Nuevas Tecnologías*. Perspectivas en

Educación Matemática. Depto. de Matemática Educativa. p. 21-42

Kaput, J. J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Pitcher, N., (1991). *Visualization in linear algebra*. Journal Mathematics Education Sci. Technology, 22(3), 387-394.

Sierpinska, A. (1992): On Understanding the Notion of Function, in E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function*. Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, pp. 25-38.

Sierpinska, A., (1996). *Synthetic and Analytic modes of Thinking in Linear Algebra*. Para ser publicado en BACOMET 4, Editores Kilpatrick J. Hoyles C., Skovsmore O. Meaning and Communication.

Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T., Saldanha, L. (1997): A Propos de Trois Modes de Raisonnement en Algèbre Linéaire, en J. L. Dorier (de.), *L'Enseignement de L'Algèbre Linéaire en Question*, Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 249-268.

Sierpinska, A. & Dreyfus T., (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The case of Linear Transformations. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 19(1), 7-40.

Sierpinska, A. (1999). Notas de clase en "Teoría de situaciones". Concordia University. Montreal Canada.

Steen, L. A. (1990). Pattern. En L. A. Steen (Ed.). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. (pp. 1-10). Washington. DC: National Academy Press.

Estudio de Estrategias de Solución y una Propuesta para la Enseñanza de Razón y Proporción

Elena Fabiola Ruiz Ledesma
CINVESTAV-IPN
México

Resumen

Se reporta la investigación que está en proceso, a cual consiste en aplicar una propuesta de enseñanza de los tópicos de razón y proporción, después de hacer un breve recorrido por la cognición, en estudiantes de un grupo de sexto grado de educación primaria. Hasta ahora se han diseñado y ensayado todos los modelos de enseñanza que la integran y se han aplicado algunos de ellos al grupo de estudio definitivo.

I. Planteamiento y justificación del problema

El problema de investigación consiste en reconocer las estrategias empleadas por los alumnos que se encuentran culminando la educación primaria, al resolver problemas de **razón y proporción simple y directa, y con base en ello diseñar y aplicar una propuesta de enseñanza de los tópicos señalados.**

Son importantes las estrategias usadas por los sujetos porque permiten recuperar ciertos pasajes del pensamiento que desarrollan al enfrentar tareas de razón y proporción y, porque exhiben una gran diversidad de sus recursos, así como diferentes modos de representación, lo cual es fundamental para el diseño y aplicación de la propuesta de enseñanza que se está llevando cabo.

La investigación referida es de corte cualitativo ya que permite alcanzar profundidad en torno a las estrategias y sus raíces cognitivas (cadenas de pensamientos y representaciones asociadas) y porque facilita un seguimiento cuidadoso de los procesos de intercambio durante el desarrollo de la experiencia de enseñanza. Así mismo, el diseño comprometido en esta propuesta favorece una mayor y más adecuada profundización en torno a la actividad individual y grupal.

En cuanto a la justificación del problema, a continuación se muestra la importancia de trabajar razón y proporción como fundamentales en la enseñanza.

i. Hay temas que se introducen por vez primera desde la Educación Básica y el éxito obtenido en su aprendizaje permite al estudiante avanzar en la comprensión de conceptos con los que trabajará en los siguientes niveles educativos. Este es el caso de los tópicos de razón y proporción, cuya enseñanza y aprendizaje se inicia en la primaria y constituyen el cimiento para la adquisición de conceptos fundamentales.

ii. La no comprensión de los tópicos de razón y proporción contribuyen al mal empleo de conocimientos de la aritmética que se trabajan en la escuela primaria, además de que delimita y distorsiona conceptos que se abordan en la secundaria y vocacional, como la variación proporcional, funciones, derivadas, etc.

iii. La experiencia vivida por la autora de este proyecto, como docente y asesora en los niveles de primaria, secundaria y vocacional, le han permitido constatar que tanto profesores como estudiantes muestran dificultad al resolver situaciones en las que se involucran las nociones de razón y proporción. En parte, se manifiesta al no identificar varias representaciones que pueden usarse al resolver problemas de razón y proporción, como en el caso de no relacionar la representación tabular con la numérica; lo que se refleja en la forma en la que algunos profesores manejan el llenado de las tablas que aparecen en los libros de texto gratuitos de primaria (SEP, 1995), ya que no establecen las relaciones tanto internas como externas entre las cantidades, además de que estas relaciones no son vistas como razones. Otra dificultad detectada es con respecto a los métodos de solución que emplea el estudiante al resolver problemas de razón y proporción, como es el caso de evadir la manipulación de fracciones.

iv. Un estudio previo[1] de carácter exploratorio que muestran Ruiz et al. (1997a y 1997b) y Ruiz (1997), donde se trabajó con estudiantes de sexto grado y profesores de los niveles básico y medio, permitió comprobar la utilización de la regla de 3 simple como única herramienta en la resolución de problemas de razón y proporción. En el caso de los profesores, el uso de la regla de 3 fue exitoso, no sucediendo lo mismo con los estudiantes, añadiéndose a ello el que no hubo manifestación de entendimiento en su empleo.

II. Marco Teórico

En este espacio de hace referencia a los planteamientos teóricos hechos por investigadores de países diferentes, en distintas épocas, iniciando con la teoría de Piaget y culminando con las recientes tareas que Lesh ha diseñado para la enseñanza de razón y proporción. La selección efectuada responde a las afinidades teóricas con la presente investigación y a las necesidades de justificación del mismo.

Los autores que se manejan en el marco teórico son en su mayoría constructivistas y los restantes tienen coincidencias básicas con el constructivismo, ya que se ha procurado crear consistencia en la conjunción de lo didáctico con la reflexión matemática acerca de razón y proporción.

III. Objetivos generales de la investigación

i) Explorar las estrategias que usa el estudiante al resolver problemas de razón y proporción, para poder reconocer componentes cualitativos y cuantitativos del pensamiento ligado a estos tópicos y sus diversos modos de representación.

ii) Desarrollar una propuesta de enseñanza que permita recuperar y enriquecer las estrategias empleadas por el estudiante al enfrentar problemas de razón y proporción.

IV. Aspectos metodológicos

En esta parte se describen los instrumentos que ayudan a llevar a cabo la investigación y con ello, al alcance de los objetivos. Se muestra el diseño, la aplicación, así como las formas de validación tanto de la observación, como del cuestionario, y el programa de enseñanza, se hace referencia al lugar que ocupan las entrevistas, dentro de la investigación.

Selección de distintos instrumentos de investigación que permitan la realización de cada objetivo

Los instrumentos de investigación se presentan estableciendo la relación que guardan con los objetivos señalados.

En cuanto a la secuencia de la aplicación de los instrumentos de investigación, primeramente se han realizado observaciones directas en el aula, poniendo énfasis en la participación de los alumnos en el salón y en la forma en que el profesor aborda el proceso de enseñanza al trabajar con problemas de razón y proporción. Seguidas de éstas se encuentran las observaciones indirectas, a través de las actividades desarrolladas por los alumnos en sus cuadernos. Posterior a las observaciones se ha aplicado un cuestionario con la finalidad de tener un acercamiento con los alumnos, en cuanto a su forma de trabajar al enfrentarse a

[1]Este estudio previo constituyó exclusivamente una fuente de obtención de información. Los problemas que conformaron la actividad eran muy típicos y dieron lugar al uso de la regla de 3, por lo que fue necesario trabajarlos empleando una guía de preguntas (tomando como antecedente el tema de escala) y la estrategia heurística del *diagrama*.

problemas de razón y proporción. Se determinan categorías en cuanto a las estrategias que emplean en su resolución. Se continúa llevando a cabo una serie de sesiones en las que se aplican problemas de razón y proporción para que sean resueltos por los estudiantes, siendo la investigadora observada por personas involucradas en el campo de la matemática educativa, con el interés de confrontar las situaciones vividas por los estudiantes en dicho marco. Una vez concluidas las sesiones de trabajo se aplicará un segundo cuestionario, pretendiendo -en este caso- conocer avances que se hayan dado en los estudiantes, y para profundizar en la indagación acerca de los avances logrados y de las estrategias que se pudieran reconocer, a través del proceso de enseñanza que la investigadora puso en marcha, se realizarán entrevistas del tipo "semi-estructuradas"

Se realiza la validación de los instrumentos a través del piloteo de cuestionarios, de la triangulación de las distintas fuentes de observación y de los controles cruzados.

Las formas de registros son a través de video y/o audiograbaciones, asimismo se llevan registros "anecdóticos".

Grupo de alumnos de la investigación

El trabajo de campo, hasta ahora realizado, se ha desarrollado en un escenario natural, con un grupo de alumnos de sexto grado conformado por 30 estudiantes cuya edad de 11 años. La escuela a la que pertenece el grupo es una institución pública y está inserta en una comunidad que cuenta con la mayoría de los servicios de urbanización. En su mayor parte los alumnos de sexto grado tienen carencias económicas y muestran interés por terminar sus estudios de primaria.

La escuela donde se está llevando la investigación, es representativa de la población estudiantil, pues se pretende que los resultados obtenidos no se disparen de la realidad.

Diseño y aplicación del Cuestionario inicial

El diseño consistió en la elaboración de tareas sobre el reconocimiento de aspectos cualitativos y cuantitativos en torno a razón y proporción.

A continuación se muestran los propósitos generales del cuestionario, propósitos específicos de cada bloque, así como los propósitos de cada tarea.

	Cuestionario (Bloques I y II)	
Propósitos Generales	1. Determinar el estado en que se encuentra el sujeto en torno a la organización que tiene de los componentes cualitativos y procesos de cuantificación de las relaciones proporcionales. 2. Realizar una indagación profunda que permita mostrar tanto lo que el estudiante exhibe como lo que deja insinuado. 3. Recuperar la secuencia del pensamiento del estudiante. 4. Evidenciar la manera cómo el estudiante se acerca a la solución de los problemas planteados, tanto las estrategias que utiliza en la resolución como los modos de representación con los que trabaja.	
Propósito Específico de Cada bloque	Bloque I Indagar tanto los conocimientos como el saber matemático que tiene el estudiante sobre los componentes cualitativos y aspectos elementales de lo cuantitativo de las relaciones proporcionales.	Bloque II Indagar cómo el estudiante está procesando su pensamiento en torno a la cuantificación de las relaciones proporcionales.

Propósito de cada Tarea	1. Indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar si se conserva la forma original del dibujo, en base a discriminaciones visuales. 2. Indagar si el estudiante reconoce visualmente la razón en la que se encuentran los rectángulos y si puede dibujar los faltantes, apoyándose en el reconocimiento que hizo. 3. Indagar si el estudiante puede reproducir una figura a una escala dada (se solicitará que el dibujo que reproduzca sea el doble del original) 4. Indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad o que conserve la forma de la figura original, de qué estrategia se valió, y qué modo de representación usó al realizar la tarea. 5. Indagar si el estudiante puede completar la ampliación de una figura preservando la proporcionalidad y que explique por escrito cómo lo hizo.	1. Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica, conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estará inmersa en una relación de semejanza. 2. Determinar las cantidades que corresponden a los datos dados en tabla. Los datos son el resultado de una situación planteada. Revisar la estrategia que empleó en su llenado. 3. Dada una tarea ilustrada a través de dibujos (botes de pintura), completar los datos faltantes conocidos tres valores y revisar qué estrategia emplea. 4. Determinar el valor desconocido de un problema, apoyado en el modelo de la compra de objetos conocidos por el estudiante (bolsas de dulce), dados 3 datos. Revisar qué estrategia emplea. 5. Indagar si el estudiante puede inventar un problema relacionado con tres cantidades dadas en una tabla. Revisar si puede llenarla y resolver el problema que él haya planteado.

El piloteo del Cuestionario sirvió para varias metas de ajuste:

1) Asegurar la legibilidad de la comprensión de las tareas.
2) Para ver los grados de dificultad, ya que ninguno de los extremos es deseable (muy fácil o muy difícil).
3) Para tener el reconocimiento de aquellos aspectos que se pueden considerar como más universales.

Las tareas fueron resueltas en su totalidad por los estudiantes, se observó que no hubo niños que se perdieran totalmente o que no supieran qué hacer, por el contrario mostraron interés en su resolución.

El piloteo también permitió reconocer globalmente que toda la información dada con base en dibujos favoreció su comprensión en los estudiantes, por lo que se presume que hay ciertos antecedentes, en grados escolares previos, trabajados en esa dirección (a nivel del dibujo a escala).

Una forma de validar el cuestionario lo constituyó el piloteo en sí mismo, pero hubo otras formas que se utilizaron en la validación, ya que interesaba ver más sobre los resultados, por ello se recurrió a la triangulación de tareas con elementos comunes.

La triangulación de algunas tareas permitió detectar lo que en los sujetos se expresa sistemáticamente. A continuación se muestra un ejemplo.

Se contrastaron tres tareas (tarea 2, tarea 3 y tarea 5), cuya característica en común fue la cuantificación en vinculación con dibujos a escala. En la tarea número 2 se solicitaba a los estudiantes que completaran la reducción de un dibujo dado, sin modificar su forma. En la tarea número 3 se les demandaba completar la ampliación de un dibujo dado, conservando su forma y en la tarea número 5 se les pedía dibujar un nuevo chaleco ampliando dos veces cada uno de los lados del chaleco original. Se observó como un aspecto común en los niños las interpretaciones correctas de las labores que se les demandaban. Mostraron facilidad al trabajar con los operadores escalares de ½ y 2 en las tareas de reducción y ampliación, respectivamente; lo que confirma algo observado por muchos, que en términos generales hay una fuerte tendencia a tomar el doble o la mitad. Mostraron dificultad para trabajar el operador 3, que correspondía a ampliar tres veces el dibujo mostrado, pero no fue en todas las partes que integraban al dibujo, por lo que no se puede arriesgar ninguna hipótesis al respecto, lo que conduce a continuar trabajando sobre ello.

Dentro de las respuestas comunes que se encontraron en los estudiantes al resolver el cuestionario, se tienen las siguientes:

Cuando se solicita que hagan dibujos a escala (reducciones o ampliaciones de una figura respecto a las a las dadas) se observa que varios estudiantes se fijan sólo en una dimensión, ya sea largo o ancho, pero no en las dos, por lo que no concluyen correctamente la tarea.

- En general muestran más facilidad al duplicar las dimensiones que al triplicarlas.
- En los problemas de variación proporcional, llenas correctamente la tabla, pero no relacionan los datos que tienen con los que se les pide en la tarea a resolver.
- En problemas de valor perdido emplean las operaciones de multiplicación y división.
- En otros problemas para encontrar el valor perdido, recurren a obtener el valor unitario y con base en ese dato determinan el que se les solicita.
- Varios estudiantes recurren mucho a la suma, pero de manera correcta, algunos reconocen que pueden llegar a sumar o multiplicar llegando al mismo resultado.

Programa de enseñanza

Las tareas del cuestionario exploratorio están inmersas en situaciones que se apegan a la realidad del estudiante. En el diseño de las actividades de enseñanza se toma en cuenta la forma en que fueron construidas las tareas del cuestionario, así como las estrategias detectadas en los estudiantes. Con esto se comparte lo trabajado por Streefland (1990) en el diseño que hizo de un curso con actividades referidas a situaciones concretas de aplicación.

Con base en lo obtenido en el cuestionario se inició el diseño y la aplicación simultánea de las actividades de enseñanza.

Uno de los objetivos de la investigación doctoral está volcado hacia la parte de la enseñanza, la cual se aborda a través de un planteamiento introductorio de la enseñanza de razón y proporción que está en afinidad con el programa de estudios.

Generalidades del programa de enseñanza propuesto

El trabajo se vuelve más específico ya que a través de la progresión de enseñanza, se pretende atender todo lo que sea planteable y lograble con sujetos que están concluyendo la primaria.

En esta propuesta de enseñanza se hace un recorrido por la cognición, que es importante, pero básicamente está presente el aspecto didáctico.

Hay aspectos que no quedaron claros en el cuestionario, por lo que son abordados en la enseñanza, de manera que los estudiantes indagan, hacen sus construcciones y establecen sus propias convicciones.

El cuestionario exploró, hasta cierto punto lo que interesa en la investigación, y con la enseñanza se pretende realizar una indagación más profunda.

Las tareas que se proponen se tienen pensadas para trabajarse en un periodo de 10 sesiones, hasta ahora se llevan realizadas cuatro de ellas, una vez que fuero diseñadas y piloteadas. Se inicia con aspectos cualitativos a través de la comparación y se pretende llegar al reconocimiento de las razones como relaciones entre dos cantidades y lo referente a la equivalencia de razones como proporciones.

Progresión de las tareas de enseñanza

Se inicia tomando las ideas de “reducción” y “ampliación” apoyadas en modelos del tipo de la experiencia del dibujo a escala y de la fotocopiadora, donde se maneja la situación de semejanza. Con el cuestionario no se pudo determinar con certeza las interpretaciones que al respecto tiene el estudiante, para lo cual primeramente se emplean tareas que no requieran de la utilización de cantidades para su solución, tales como actividades de comparación que les permita a los alumnos reconocer relaciones de semejanza entre figuras en términos muy intuitivos.

Se continúa trabajando lo correspondiente a la medición de figuras para llegar a establecer relaciones con cantidades. Ahora las comparaciones son numéricas.

Se llega al reconocimiento de razones como la comparación por cociente de dos cantidades. Se trabaja la notación de la razón como una fracción a/b.

Se utiliza la tabla como un modo de representación para la determinación de razones internas y externas.

Se trabajan problemas de variación proporcional, en donde la obtención de cantidades no es sólo a través del uso del operador, sino estableciendo relaciones entre razones.

Se manejan planteamientos en donde no hay equivalencia entre las razones y otros en donde sí se muestra la equivalencia.

Finalmente se trabaja la relación de equivalencia como una relación de proporcionalidad.

Ejemplo de una actividad

A continuación se muestra un ejemplo de lo que se pretende registrar en una de las sesiones, en la que se trabaja el modelo titulado “El mundo de Blanca Nieves y los siete enanos”

Lo fundamental en esta sesión está centrado en los argumentos de carácter cualitativo que los estudiantes dan al seleccionar la cama reducida.

Cuando se trabaje por equipo, registrar:

1) Palabras o frases dichas por los estudiantes para construir categorías verbales que expresen cierta proporcionalidad cualitativa, (palabras como grande, chico; frases como más grande o más chico). Estas expresiones verbales deben estar asociadas a dos ideas básicas:
   a) Tamaño →
   b) forma →

   Partes constituyentes de la cama y que presentan la misma Configuración a los ojos de los niños.

2) Expresiones verbales que sean indicadores de condiciones neutras que no definan el problema, es decir, expresiones dadas por los sujetos respecto a cualquier otra característica, aunque no sea relevante a la variación proporcional, como color de la cama o posición.
   De lo anterior es importante registrar si los estudiantes reconocen que estas condiciones neutras son o no relevantes para consolidar un pensamiento cualitativo. O si muestran ausencia de este reconocimiento .
3) Registrar la situación y el momento al que queda ligada la expresión:
   a) Cómo se va dando la situación en la interacción con el equipo.
   b) Ubicar el momento en que dicen la frase o palabra, si es lo primero que dicen o si ya han reflexionado antes de decirlo, o si la frase corresponde a la respuesta de una pregunta formulada por la profesora/investigadora.

Cuando se trabaje de manera colectiva registrar:

1) Argumentos que dan los alumnos al defender su punto de vista, respecto a la cama que eligieron, básicamente en torno a las dos ideas básicas señaladas (forma y tamaño).
2) Revisar las regularidades o lo común que se da en los estudiantes, así como las discrepancias que se manejen.

Referencias bibliográficas

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa. Guía práctica.* Barcelona: Ediciones CECA. 87-89.

Brown, M., Hart, K. y Küchemann, D. (1984. *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Ratio and Proportion.* Windsor, G. B.: NFER-Nelson. 1-6

Cohen, L. y Manion, L. (1980). *Research Methods in Education.* London: Croom Helm. 80-90, 241-262.

Collet, J.P. (1986). *Historia de las matemáticas, I.* México: Siglo XXI Editores. 64-69; 196-198; 230-234.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel Dordrechet. 28-33, 178-209.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En: J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades, 2.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. Karpinski, L. C. (1965). *The history of Arithmetic.* Ann Arbor, Michigan: Rusell & Rusell Inc. 137-145.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and processes (45-90).* New York: Academic Press.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the Construction of Rational Number Ideas En: Zweng et. al. (Eds.), *ICME Proceedings of the Fourth International Congress on mathematical education, (506-508). Birkhauser Boston.*

Larson, S., Behr, M. y Harel, G. (1989). Proportional reasoningin young adolescents: An analysis of etrategier. *Proceedings ofthe 11th. Annuel Meeting og the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.181-186.*

Lesh, R., Post, T. y Behr., M. (1988). Proportional reasoning. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Concepts and operations in the Miffle Grades, 2.* Reston,Virginia: National Council of Teachers of Mathematics. 93-139

Lesh, R. and Doerr, H. (in press).Modeling and Local Conceptual Development. En: Kelly, A. and Lesh, R (Eds.), *Research design in mathemathics and science education. Hillsdale, NJ: Lawrence aerlbaum.*

Mellar, H. (1991). Modelling students´thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Tecchnology,* 22, 1. 111-119.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part. I E*ducational Studies in Mathematics, 11-2.* 217-253.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 11-3.* 331-363

Nunes, T. (1986). Rated addition: A correct additive solution for proportion problems. *Proceedings of the 10th. Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* 247-252.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Comp.), *Lecturas en Psicología del Niño, I (70-119).* Madrid: Alianza Editorial.

Piajet, J. (1978). *Psicología del Niño.* Madrid: Ediciones Morata. 131-150.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidós

Ruiz, E. F., Ruiz, E., Acosta, F. (1997 a). Resolución de problemas a nivel primaria haciendo uso de la calculadora Math Explorer. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.* 245

Ruiz, E. (1997). Uso de las calculadoras Math Explorer y TI-92 en la Resolución de Problemas: Una experiencia con profesores de los niveles básico y medio. *Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática.* 25-35.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some trought on the long term learning process. Part I. *Educational Studies in Mathematics, 15-3.* 327-348.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some trought on the long term learning process. Part II. *Educational Studies in Mathematics, 16-1.* 75-94.

Streefland, L. (1990). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics En: K. Gravemeijer, Van de Hunal y L. Streefland (Eds.), *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (33-52). Utrecht: Researchgroup for Mathematical Educational Computer Centre State University of Utrecht, The Netherlands.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. 46-134.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25.* 109-135.

Vergnud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics concepts and processes (127-174).* New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad.* México: Trillas. 197-223.

Woods, P. (1989). *La Escuela por Dentro.* Barcelona: Paidós. 49-76, 129-134.

Estudio Didáctico del Punto de Inflexión: Una Aproximación Sociepistemológica.

Ricardo Cantoral, rcantor@mail.cinvestav.mx
Cinvestav-IPN México
Apolo Castañeda
Cicata-IPN, México

Introducción

Una de las problemáticas centrales que asume la didáctica de las matemáticas es la de buscar explicaciones sistémicas a los fenómenos educativos que se hayan inmersos en la vida escolar, en ellos reconocemos a distintos actores por ejemplo a los profesores, a los estudiantes, al saber, los cuales han sido estudiados y analizados gestándose de esta forma modelos teóricos que explican sus manifestaciones y la dinámica de sus relaciones. Una ampliación de esta problemática, proviene de las perspectivas socioculturales del conocimiento (Cantoral, 1997), las cuales reconocen que el conocimiento es un producto social y por lo tanto su construcción se determina en ese ámbito. En conjunto esta metodología la cual se le ha llamado, en la escuela latinoamérica acercamiento socioepistemológico, intenta determinar la posición que tiene el sistema cultural respecto a las prácticas educativas, así como retribuir de una epistemología sensible a reconocer las prácticas humanas como gestoras de conocimiento a la investigación en matemática educativa.

En el marco de *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, cuerpo teórico en el que se inscribe este trabajo, el propósito de la investigación se centra en reconocer las etapas y momentos por los que transita un saber; en un contexto escolar, pero también en un escenario más amplio: el histórico-epistemológico. De tal forma que a través de caracterizar momentos y estudiar los escenarios en los que un saber se desarrolla, es posible dotar de enfoques alternativos a los conceptos que hoy se estudian en las instituciones de nivel superior y medio superior. Así que nos resulta de especial interés reconocer la naturaleza del conocimiento, sus saltos conceptuales y sus reformulaciones a la luz de reconocerlo en un escenario, es decir, con referencia a un contexto que ofrezca explicaciones de la naturaleza de los saltos, etc. En suma buscamos reconocer estados del conocimiento y caracterizarlos a partir de estudiar su estructura conceptual con relación a las prácticas humanas.

El estudio se incorpora a este marco, haciendo un análisis de las obras didácticas antiguas del cálculo basándose en dos referentes teóricos, la primera que aparece como dimensión dentro del ámbito de investigación en matemática educativa, nos referimos a la sociepistemología y la segunda la Transposición Didáctica, la cual desarrolla un modelo que explica el tránsito del saber sabio al escolar.

El papel de la Sociepistemología en la investigación

Desde una perspectiva sensible a reconocer que el conocimiento es una construcción social, los acercamientos socioculturales han enfocando sus esfuerzos en mostrar la naturaleza epistemológica del saber, analizando las circunstancias sociales y culturales que han permitido la construcción del conocimiento, reconociendo en este análisis situaciones y problemáticas asociadas que contribuyeron en el desarrollo conceptual de la ciencia. No se trata de una investigación histórica, que de hecho se sirve de ella, sino se pretende conocer y precisar el origen del conocimiento, en términos de reconocer las prácticas humanas que favorecieron el desarrollo de las nociones matemáticas o al menos se involucraron y caracterizarlas de modo que los conceptos matemáticos no se reduzcan a las definiciones o a los teoremas, sino se tenga un amplio espectro de caracterizaciones de los ámbitos humanos.

La investigación desde esta perspectiva incorpora a su metodología argumentos para el estudio de la construcción social del conocimiento, la epistemología, los planos cognitivo y lo didáctico, así como a la dimensión sociocultural. Este acercamiento en conjunto no se entiende como una compartamentalización, sino como una entidad metodológica que se articula a partir de argumentos de carácter sociocultural, así pues, el estudio epistemológico incorpora explicaciones sociales respecto a la construcción del conocimiento, el estudio cognitivo (Este no sólo reducido al estudio de la conducta en forma individual, si bien es cierto que algunas manifestaciones entre los individuos no son del todo sociales, la sociedad en su conjunto ejerce una notable influencia que en ocasiones no es percibida ni explícita) considera los procesos del pensamiento como base de las explicaciones de las funciones mentales, la didáctica en una estrecha relación con el escenario sociocultural y las prácticas humanas asociadas a la construcción del conocimiento y finalmente, la sociocultural, que eventualmente participa como integradora de las otras.

Por su propia naturaleza esta última dimensión es quizá una componente de transición que habrían desaparecer una vez que las anteriores reformulen sus propias preguntas atendiendo a variables de tipo sociocultural. El acercamiento *Socioepistemológic*o, como lo ha llamado Cantoral y Farfán, 1998, cobija a una epistemología que no se reduce a una eventual clasificación de *obstácul*os, sino se encamina por una parte, a proporcionar una base de significados a los conceptos matemáticos a través de analizar el origen social del conocimiento, en términos de determinar su naturaleza al seno de un sistema sociocultural, es decir, atender las preguntas fundamentales ya sea de carácter empírico (referentes físicos, experiencias cotidianas, conocimientos socialmente usados, conocimientos de prácticas específicas como artesanos o arquitectos) o racional (preguntas fundamentales, extensiones teóricas, razonamientos metafísicos, etc.) que permitieron, condujeron, facilitaron o antecederieron al surgimiento de un conocimiento y a su eventual desarrollo. Este acercamiento que rescata *una base de significados primarios* de los conceptos matemáticos desde el plano sociocultural se halla sustentado en estudios de tipo sociológico[2], intentado, a través de sus preguntas, conocer la dinámica de las relaciones sociales en torno a un conocimiento, para así tratar de esclarecer los mecanismos por los que se constituye un saber, por ejemplo; los criterios de validez o los paradigmas que controlaron las opiniones en cuanto a la consistencia lógica de dicho conocimiento.

El caso del punto de inflexión

El estudio de la noción de derivada abordada por González, (1998) abre una discusión basada en la reflexión epistemológica de Bos, (1974) relativa a las derivadas sucesivas, esta explica que la noción de derivada no se construye sino hasta que se ha construido la noción de derivada sucesiva. De ahí toma sentido hablar de cada derivada en forma autónoma, de sus propiedades y de sus características para que en conjunto se obtenga un amplio sistema de cararacterizaciones que expresen la noción de *derivada.*

Esta atención en forma local al estudio de la derivada se ha asumido como una problemática de investigación, fundamentada en la tesis que aporta Bos, pero también en las investigaciones empíricas (González, 1998), que muestran que una gran cantidad de estudiantes conciben a la derivada como un procesos algorítmico. Los libros han favorecido ésta práctica al enunciar *reglas para derivación* que someten al estudiante a una algebratización.

Una forma de ampliar el significado de los conceptos es buscar otros escenarios alternativos donde se exhiban características, propiedades, relaciones, de forma que un concepto tenga múltiples acercamientos y no se reduzca a las definiciones que se hayan en el discurso escolar. De esta forma el interés de la investigación se orientó en rescatar *una base de significados primarios* de los conceptos matemáticos, en particular, aquellos relacionados con la segunda derivada y específicamente los relativos al punto de inflexión.

[2] "Los tipos recurrentes observables en la interdependencia humana son asunto de las ciencias sociales del tipo a que pertenece la sociología... En la vida real se sucede una innumerable diversidad de cosas. Por debajo de esos sucesos se repiten ciertos elementos que son, una vez percibidos, les dan unidad y sentido. El historiador muestra lo variable; el sociológico señala lo constante y recurrente... la sociología descompone las diferentes combinaciones en sus relativamente pocos elementos básicos y formula leyes que las gobiernan." (Timasheff, 1991)

Nuestra reflexión parte de considerar las aportaciones de los trabajos clásicos de cálculo, pero también de aquellas otras obras que han intervenido en la constitución del cálculo. Para la historia de las matemáticas en general, algunos trabajos que no se consideran “obras eruditas” han pasado durante años olvidados juzgados por la comunidad como materiales de segunda importancia. Consideremos por principio que, en general, no ha existido una sensibilidad para aceptar que la obra matemática no es de unas cuantas personas sino del sistema cultural y que los conocimientos se difunden y se heredan, existen procesos de difusión del saber que si bien no son explícitos, por la característica social que tiene el saber, se pueden predecir.

Las obras didácticas de L'Hospital y Agnesi, poco conocidos (algunas veces brevemente referenciados en la historia de las matemáticas) están situados históricamente, en un momento muy importante. Poco después de haberse publicado los primeros trabajos de Leibniz en 1684 y 1686, y Newton en 1687 referentes al *nuevo cálcul*o, el ambiente erudito un tanto tenso, manifestaba preguntas referentes a la naturaleza de los fundamentos, sobre todo respecto a los infinitesimales, lo que hacía complicado hablar fluidamente del tema. L'Hospital, quien mantuvo relación y cercanía con J. Bernoulli, en una labor de difusión escribió en 1696 el *Analyse des infiniment petits,* un tratado de cálculo diferencial que representa el primer libro editado específicamente para fines de divulgación. María de Agnesi por su parte escribió en 1748 *Institutioni Analitiche,* un libro que incluía un tratado de cálculo diferencial.

El primer libro de texto de cálculo

Con una notable influencia de Leibniz, Jacob y Johann Bernoulli, el Marquez de L’Hospital es reconocido por escribir el primer libro de texto de calculo diferencial en el cual aparecen consideraciones teóricas reconocidas como ideas propias. Agnesi, además de concentrar su atención al estudio de libros religiosos se adentró en la revisión de libros matemáticos de su tiempo, escribiendo comentarios a un material del mismo l’Hospital titulado *Traite analytique des seccion conique*s. Estudió con ayuda de Ramiro Rampinelli, un monje profesor de Roma, la obra de Reyneau; *Analiza démontrée,* un texto de cálculo publicado en 1708 de donde aprendió cálculo y fue el mismo Rampinelli quien animó a Agnesi a que escribiera un libro de cálculo diferencial. El resultado fue un texto para la instrucción en cuya introducción señala explícitamente la intención de ser un libro con ideas claras y accesibles *... dotó de claridad apropiada y simplicidad... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz*

Los tratados de L’Hospital y Agnesi constituyen las primeras obras concebidas específicamente para la difusión del cálculo, por lo que el tratamiento hecho a los saberes, como hemos visto, trata de ser didáctico y claro incluyendo además ejemplos, problemas y amplias explicaciones, del tal forma que un lector no necesariamente experto en la materia podría acercarse sin problema a esos textos.

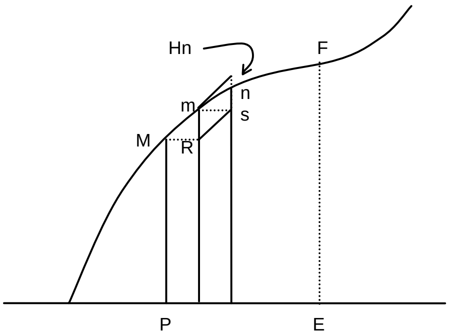
Una parte importante en las obras que hemos citado, es la referida a las caracterizaciones a los conceptos, la preocupación de Agnesi y L’Hospital por no restringir los conceptos a una definición formal, parte del intento por acercar las nociones a situaciones ya conocidas, tales como la representación de curvas geométrica, conocimientos previos, como las nociones procedentes del mundo sensible; por ejemplo los conceptos de concavidad y convexidad. Las dos obras, que distan entre sí por 52 años, tienen semejanza en el tratamiento del conocimiento, pero también demarcan interesantes cambios. Habría que considerar que L’Hospital vivió un periodo de conformación del cálculo aún más difícil, medio siglo después, con la propia obra de L’Hospital de por medio, el cálculo había tomado ya un papel en el escenario matemático, aún no muy claro, pero de interés para varios matemáticos.

Agnesi, tuvo la virtud de no sólo recoger el saber desarrollado por la escuela leibniziana, sino también la generada por Newton, lo cual se aprecia al concebir en su obra una *dinámica intrínseca* en la concepción de las curvas; cuando explica y argumenta siempre está pensando en el dibujo que hace un punto al moverse o en la fluxión de una ordenada para devenir en otra. Estas dos versiones exhiben la vida de un saber dispuesto para la difusión, muestran sus eventuales transformaciones y nuevas caracterizaciones, de hecho la atención a estas obras se debe a su aparición con mayor número de ejemplares en el escenario social y académico, recordemos que la obra de Agnesi fue reconocida por la *Académie des Sciences* como un trabajo de importancia y trascendencia, título que merece atención para cualquiera que desea incursionar al estudio del cálculo.

Caracterización al punto de inflexión

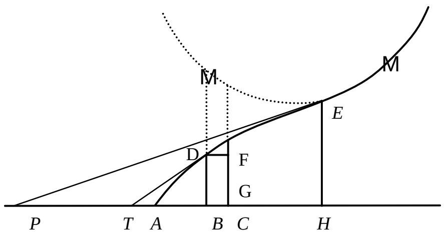
Las caracterizaciones que hacen Agnesi y L'Hospital son de dos tipos, las geométricas, que usan argumentos geométricos como magnitud, y las analíticas que atienden a las propiedades infinitesimales que exhiben. Agnesi realiza más caracterizaciones al punto de inflexión aunque algunas de las que incluye tienen mucha cercanía con las que mostró L'Hospital en su obra. (La presentación de las ideas de L'Hospital se hacen en el recuadro de la izquierda y las de Agnesi en el recuadro derecho).

Propiedad infinitesimal



Si los segmentos Rm y Sn fueran iguales, entonces su diferencia, Hn=d²y, sería nula. En la curva se observa que a medida que se obtienen segundas diferencias a ordenadas cada vez más cercanas al punto de inflexión, éstas van tendiendo a cero.

Propiedad infinitesimal
Caso A mínimas diferencias



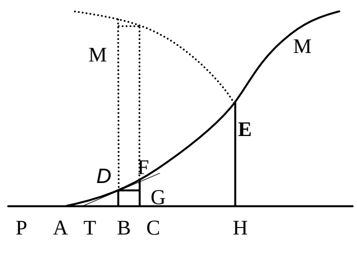
El punto de inflexión determina un punto en donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a creceren este punto la *dy* será un mínima, por lo que $ddy = 0$ o bien $ddy = \infty$.

Respecto a su forma

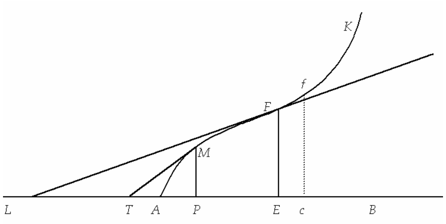
Definition II

Lors qu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B; le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par-conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'infléxion.
(Pág.59)

Caso B máximas diferencias



Las diferencias crecen hasta el punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto *dy* determina un máximo.



En su modelo explica, que cuando *AP* crezca continuamente, *AT* lo hará también, hasta que *P* llegue a caer en *E,* después del cual, *AT* irá disminuyendo. Esto supone que el punto *L* es un punto "extremo" o *máximo* de la subtangente en el momento en que *P* cae sobre *E.*

Signo de las segundas diferencias

Cuando la curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de flexión contrario, si por el contrario la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas asta antes del punto de inflexión.

Cambio de signo en la segunda diferencia

El punto de inflexión se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativo o de negativa a positiva

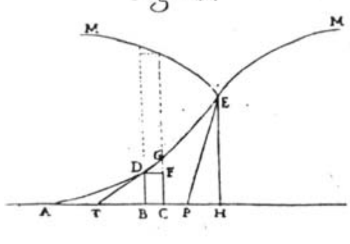
Respecto a su forma

Cuando una curva es primero convexa y después cóncava el punto que determina el cambio representa en punto de flexión contraria.

Referente a la subtangente

Dada una curva *AEM,* primero cóncava y después convexa, se determina en el punto *D* la recta *DT* y en el punto *E* la recta *EP*. Cuando la abscisa *AB* crezca continuamente y *B* caiga en *H*, entonces *AT* (la subtangente) habrá crecido e determina en el punto de inflexión a lo cual *AT* dejará de crecer y pasando el punto irá decreciendo, determinando así la relación $AP = \frac{ydx}{dy} - x$, al diferenciar y tomar dx constante tenemos $\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2}$, al igualarlo a cero o a infinito y dividiendo por $-ydx$ y multiplicando por $-dy^2$, obtendremos $ddy = 0$ o bien $dyy = \infty$.

Fig. 65.



(Agnesi, 1748, Figura de Tom. II, Lib. II, T XII)

A manera de conclusión

Un aspecto importante que define a los libros analizados es su carácter geométrico, puesto que prevalece en las presentaciones y en las argumentaciones, incluso en los títulos de los capítulos evocan el uso del cálculo como un instrumento para resolver ciertas problemáticas ya conocidas por la geometría, algunas de las caracterizaciones de los conceptos del cálculo tienen fundamento geométrico por lo que no se requiere disponer de mayores argumentos que algunas nociones de la geometría, de hecho, hemos de recordar que la propia Agnesi explicó que el uso de la geometría dentro de su obra proporcionaba sencillez al estudio de las nociones del cálculo.

La presentación de los contenidos no parece ser aleatoria, tanto Agnesi como L'Hospital se ocuparon por presentar los saberes matemáticos en una forma lógica, es decir, atendiendo a una evolución y de una manera gradual, primero por las caracterizaciones, la formulación de definiciones, la presentación de ejemplos y, en el caso del trabajo de Agnesi, la presentación de algunos problemas resueltos, de esta forma las obras tiene autonomía propia y no dependen de otros tratados o artículos.

La inclusión de ejemplos en cada capítulo intenta ilustrar al lector, no se trata sólo de ejercicios resueltos, en nuestra opinión tienen un fin más profundo; distinguir la naturaleza de la obra respecto de otros trabajos, por ejemplo los de carácter erudito. Sistemáticamente L'Hospital y Agnesi incluyeron ejemplos con intención de ampliar las explicaciones.

Respecto del papel que desempeñaron estas obras, hemos identificado, en principio, la importancia que tiene estos trabajos al abordar y aclarar ideas del oscuro cálculo, como (Bos, 1980) explica. L'Hospital vino a aclarar ideas y a organizarlas, y fue un medio importante para quien quisiera acercarse a las ideas del cálculo. Como dijimos, Agnesi apareció en la escena medio siglo después que L'Hospital, con un tratado que resultó ser de gran impacto, de notable profundidad y orden al grado que la Academia de Ciencias de París lo reconociera como la mejor obra de cuantas se habían escrito hasta ese entonces.

Por otra parte hemos de reconocer que estas obras sirvieron de difusión, la restringida edición de las obras eruditas reducía enormemente las posibilidades para que las personas del mundo no académico se acercaran a la producción de los intelectuales. Estas obras tuvieron el mérito de llegar a más, en término modernos lo llamaríamos hacer popular el saber, desprender de la elite erudita el conocimiento y hacerlo accesible a más personas en lugares lejanos y con intenciones diversas.

En otro sentido, la obra de L'Hospital y de Agnesi sirvieron de referencia inmediata para quienes quisieron acercarse al estudio del cálculo en un nivel inicial, Bos (1980) reconoce las propiedades didácticas de la obra de L'Hospital; explica que las notas de Leibniz eran oscuras y poco claras, pero este nuevo trabajo vino a dar luz a las nuevas ideas. Por su parte la obra de Agnesi, que no necesitó de mayores referencias que las que la Academia de Ciencias le otorgara, gozó de reconocimiento y de amplia aceptación, por lo que su lectura fue indispensable para quien se quisiera acercarse a *hacer teoría erudita.*

En nuestra búsqueda de una base de significaciones para los conceptos del cálculo, encontramos que algunos han desaparecido del escenario como la caracterización del punto de inflexión a través de la subtangente máxima, sin embargo otros continúan vivos en los libros de textos contemporáneos, citemos por ejemplo:

a) La caracterización del punto de inflexión a través de argumentos geométricos. L'Hospital y Agnesi llamaron al punto de inflexión como el lugar geométrico donde ocurre un cambio de concavidad.
b) La caracterización del punto de inflexión a partir de observar el signo de las segundas diferencias. Agnesi observó la propiedad que guardan las segundas diferencias en un intervalo que contiene al punto de inflexión; cuando las segundas diferencias cambian de signo, es porque la curva geométrica contiene un cambio, de

cóncava a convexa o viceversa, por lo que el lugar donde se tiene cero de la segunda diferencia es el punto inflexión en la curva.[3]

c) La caracterización del punto de inflexión analíticamente. En el punto de inflexión se cumple que la segunda diferencia es igual a cero.

Al considerar la estructura y la organización de las obras de L'Hospital y Agnesi, pensadas y escritas para ser claras, accesibles y considerando las caracterizaciones a los conceptos, de las cuales algunas de ellas viven aún en los actuales libros de texto, concluimos que, el desarrollo del cálculo no se desarrolló de forma lineal dentro de una elite erudita. Para constituir una base de significados del cálculo se requirió del cuidado en la organización, caracterización y argumentación desde distintos planos, incluyendo las nuevas argumentaciones que los propios autores de las obras de difusión aportaron, a los cuales se les debe un grado de originalidad.

Para términos teóricos de la investigación, reconocemos este fenómeno como una *Transposición Didáctica en forma invers*a; el saber que ha sido organizado y reformulado por un ambiente no erudito, sirvió de base para el desarrollo teórico de orden formal del cálculo, así hemos determinado un puente que parte de la *academia erudit*a, deviene en el saber dispuesto para la difusión y nuevamente ejerce algún tipo de influencia a la gente del ámbito erudito de años posteriores, preocupada por otorgar al cálculo un fundamento teórico.

Indudablemente que no negamos un tránsito directo de las obras clásicas a los trabajos eruditos de fundamentación. Este tránsito en sentido inverso de la Transposición Didáctica no responde a los mecanismo de control que ejerce la noosfera, se determina por otras variables totalmente independientes como los reclamos de la sociedad, la cual desarrolla a través de sus individuos un estatus y un determinado valor al conocimiento que fluye entre sus miembros por lo que así, el ámbito erudito reconoce, valida y crea la necesidad de dotar de fundamento a un saber ampliamente usado.

Referencias bibliográficas

Agnesi, (1748). *Institutioni Analiliche*.

Artigue, M. (1998). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2(3), 241-286.

Bos H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus*. Arch. His. Exact. Sci.* No. 14, 1-90.

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165-198.

Cantoral R. et al (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, Editorial Trillas, México.

Cantoral, R. (1998). La aproximación sociepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latioamericana de Matemática Educativa*, *Relme-12, Santafe de Bogotá, Colombia.* (volumen 12, tomo I, pp. 41-48). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral R. y Farfán R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* 42, 353-369

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3(3), 265 - 292, Thomson, México.

[3] En la actualidad se reconocer algunas excepciones como el caso de $y = x^4$.

Castaneda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. .* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique,* Grenoble, La Pensée Sauvage. Paris.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale.* Cliez Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, París.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

González, R. (1998). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes.* Primera reimpresión, 1988, ACL-éditions, Paris.

L'Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, Estudio Introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez, Colección Mathema, México.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Youschkevitech, (1976). The Concept of function up to the middle of the 19th century, *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85

Exploración de Problemas Asociados a la Regla del Producto en Probabilidad

Ernesto Sánchez Sánchez, esanchez@mail.cinvestav.mx
Román Hernández Martínez, rhernande@mail.cinvestav.mx
Depto. Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN
México

Educación Media-Superior

Resumen.

Con el objeto de guiar la confección de problemas y secuencias de enseñanza para la comprensión y aplicación de las reglas básicas en Probabilidad, en este trabajo se hace un análisis de datos de los resultados de la aplicación de un cuestionario con preguntas que se pueden resolver aplicando la regla del producto en probabilidad. Identificamos y definimos cuatro *variables de tarea* específicas a los problemas de nuestro tema, fundamentalmente en el contexto de urnas y con base en esas variables diseñamos un cuestionario. Una variable (*temporal*) se refiere a las situaciones que se pueden descomponer en dos *acciones* o *eventos*; otra señala si los objetos en cuestión son distinguibles o no; una tercera toma en cuenta la cantidad de los objetos que intervienen. Finalmente, una última variable caracteriza las opciones de respuesta. El análisis muestra que tales variables influyen en el comportamiento de resolución de los estudiantes.

1. Introducción

'La probabilidad es una materia difícil de enseñar y de aprender', es la opinión que, en consenso, tienen profesores e investigadores. Los primeros estudios relativos al tema tienen un acercamiento a una matemática asociada a fenómenos causales y deterministas. La introducción de la probabilidad en el nivel básico intenta desarrollar una clase de pensamiento distinto, más amplio que el lógico y causal, pero las exigencias para desarrollar un pensamiento estocástico no son nada estimulantes. Por un lado, las paradojas en probabilidad surgen desde los primeros pasos que se llevan a cabo para modelar situaciones de azar. Por otro, los estudios psicológicos y educativos realizados en las últimas cinco décadas, exponen las grandes dificultades para comprender los conceptos más elementales de la materia (Kapadia y Borovcnik, 1991, p. 2).

La introducción de temas de probabilidad en el curriculum de matemáticas es muy reciente si se compara con el tiempo en que han estado vigentes las líneas clásicas, a saber, aritmética, álgebra, geometría y cálculo. Esta situación y los diferentes puntos de vista sobre la naturaleza de la probabilidad misma son, posiblemente, las causas principales de la gran diversidad entre los programas de probabilidad de diferentes países. Así, en probabilidad se ha considerado más apremiante que en otras materias responder a la pregunta: ¿Cuál es el contenido principal que deben aprender los estudiantes y cómo y cuándo debe ser enseñado? (Hawkins y Kapadia, 1984; Ahlgren y Garfield, 1991, p. 107).

La tendencia actual que considera la solución de problemas como el eje de la enseñanza de las matemáticas, ha transladado el problema de producir una definición más clara de los contenidos curriculares por el de "centrarse en el desarrollo del *poder matemático*, es decir, el desarrollo de aptitudes para..." comprender métodos y conceptos, establecer relaciones, razonar lógicamente y aplicar todo ello en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1989, p. 146).

La enseñanza de la probabilidad en el nivel medio superior de nuestro país debe conjugar dos problemáticas relacionadas con las observaciones anteriores. Una de ellas consiste en la necesidad de definir contenidos más acordes con el desarrollo del sujeto y con los planteamientos didácticos actuales, enfocados a transformar los programas tradicionales, que sólo reproducen en forma esquemática y superficial los cursos de probabilidad y estadística del nivel superior. La otra consiste en la necesidad de lograr que el profesor tenga más autonomía en el manejo del contenido y un conocimiento didáctico específico de la materia, de manera que pueda generar y plantear secuencias adecuadas de problemas para desarrollar el poder matemático en probabilidad.

En el proyecto de investigación que estamos desarrollando nos planteamos el problema general de crear instrumentos para generar, y validar en lo posible, tareas didácticas para el aprendizaje de contenidos importantes de la probabilidad. Para este fin y sólo como punto de partida, es decir, para establecer ciertas condiciones iniciales, seguimos la metodología sugerida por los trabajos recopilados en Goldin y McClintock, 1984. Partimos de un núcleo de contenido y consideramos un conjunto de problemas representativos asociados a tal contenido. Identificamos *variables de tarea* que, además de permitir una o varias maneras de organizar ese conjunto de problemas, influyan en la conducta matemática del estudiante de manera explícita y contrastada empíricamente. En el presente artículo analizamos los datos obtenidos mediante un cuestionario diseñado para explorar las variables de tarea en problemas asociados con la regla del producto en probabilidad. La muestra examinada la componen alumnos de bachillerato y primer año de licenciatura.

2. La regla del producto en probabilidad

Hay dos formas de construir *la regla del* producto en probabilidad. La construcción formal, que coincide con la que a menudo se encuentra en los textos, se deriva directamente de la definición de probabilidad condicional. A partir de la fórmula de este concepto, es decir, de la siguiente expresión:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

al operar sobre ella obtenemos la siguiente Regla del Producto (más general que la de eventos independientes): $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$. Después se define la independencia de dos eventos:

$$\text{A y B son independientes si } P(B \mid A) = P(B), \quad \text{siempre que } P(A) \neq 0$$

de donde se deriva la regla del producto restringida a los eventos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Siguiendo este esquema, y agregando las interpretaciones pertinentes, se introduce la regla del producto. Sin embargo, en otras investigaciones se han documentado importantes dificultades en la comprensión de dicho concepto, algunas de ellas derivadas de la manera formal en que se introduce (Sánchez, 1996, 1998, 2000).

El otro acercamiento también se encuentra en algunos textos pero sin referencia directa a la regla del producto, ni con el propósito de desarrollar el tema. Se puede representar por una clase de problemas en los que se pide calcular cierta probabilidad, cuya solución implica la construcción de un espacio muestra con elementos que deben ser contados mediante un esquema combinatorio –el más elemental de éstos es el esquema de *selección* de dos objetos, cada uno tomado de un conjunto determinado de ellos–. Veamos la idea principal, que se formula de la siguiente manera:

Si la probabilidad de sacar un objeto que pertenezca a un conjunto A de C_1 es p_A, y la probabilidad de sacar un objeto que pertenezca a un conjunto B de C_2 es p_B, y además, la extracción de un elemento de C_1 no influye en la extracción de un elemento de C_2, e inversamente, entonces la probabilidad de sacar una pareja de objetos de manera que uno sea del conjunto A y otro del conjunto B es exactamente el producto $p_A\, p_B$.

La prueba se basa en la consideración de que hay $\#(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$ parejas con un elemento de A y uno de B de entre un total de $\#(C_1\times C_2)$. Así, la probabilidad de obtener una pareja en $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ es el cociente:

$$\frac{\#(\mathrm{A}\times\mathrm{B})}{\#(C_1\times C_2)}$$

donde $\#(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$ es la cardinalidad del producto cartesiano de A y B, etc.

De esta manera, el teorema se sigue de las igualdades combinatorias:

$\#(\mathrm{A}\times\mathrm{B})=(\#\mathrm{A})(\#\mathrm{B});\ \#(C_1\times C_2)=(\#C_1)(\#C_2)$ y del hecho de que $p_A=\dfrac{\#A}{\#C_1}$ y $p_B=\dfrac{\#B}{\#C_2}$

Laplace señaló tanto la importancia de esta regla como su dificultad:

> Uno de los aspectos más importantes de la Teoría de las Probabilidades, y el que a más ilusiones se presta, es la forma en que las probabilidades aumentan o disminuyen merced a sus combinaciones mutuas. Si los eventos son independientes unos de otros, la probabilidad de la existencia de su conjunto es el producto de sus probabilidades particulares (Laplace, 1988, p. 32).

Es muy probable que para la comprensión de la regla del producto en un sentido general, como lo exige el primer acercamiento antes expuesto, sea necesario comprender el concepto en el sentido más concreto del segundo acercamiento, y establecer las conexiones entre ellos. En la exposición de Laplace encontramos una proximidad al segundo acercamiento que hemos señalado.

Conviene puntualizar que no presuponemos que las conexiones entre ambos acercamientos sean reconocidas con facilidad por los sujetos cuando después de haber trabajado con el segundo se encuentren con el acercamiento formal. Más bien, suponemos que una aproximación a la regla del producto en su forma combinatoria es necesaria para comprender la regla del producto en su forma general, asociada al concepto de probabilidad condicional.

3. Variables de Tarea

Por *variable de tarea* se entiende cualquier característica de un conjunto de problemas que asume, para subconjuntos de problemas, 'valores' particulares de una serie de valores posibles. Dado que los problemas son el instrumento de medida que se usa en los estudios de resolución de problemas, es un requerimiento básico para estos estudios una comprensión de cómo las variables que describen una o varias tareas interactúan con la situación total. La habilidad para clasificar y definir variables de tarea permite al investigador y al profesor un control sistemático para determinar sus efectos en la conducta de resolución (Kulm, 1984, p.1).

Como resultado de la síntesis de varios estudios sobre el tema, destacan cuatro categorías principales de variables de tarea, a saber: a) *De Sintaxis*, son las variables que se presentan en la descripción del problema; b) *De Contexto,* son las variables que caracterizan las relaciones entre el contenido matemático y el no–matemático; c) *De Estructura,* son las que describen la estructura del problema; d) *De Comportamiento heurístico*, que caracterizan los procesos heurísticos evocados por el problema. (Kulm, p. 15).

Las variables de tarea destacadas por Kulm, además de revelar características fundamentales de cualquier problema, también constituyen un marco que facilita la exploración y ubicación de otras variables más específicas. En el presente trabajo hemos utilizado dicho marco con tal fin; así, definimos variables que nos permiten explorar un conjunto de problemas específicos asociados a la regla del producto en probabilidad.

4. Variables de tarea en probabilidad y diseño del cuestionario

A continuación proponemos unas variables de tarea específicas de un conjunto restringido, pero representativo, de problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. Dichas variables, a su vez, nos han permitido diseñar un cuestionario para explorar ciertos comportamientos de los estudiantes. Así, pues, el propósito del cuestionario es detectar cómo influyen en los índices de respuestas de los estudiantes algunas variables de tarea.

El cuestionario consta de seis preguntas de opción múltiple (anexo al final). Todas las preguntas son tales que para resolverlas se puede utilizar la regla del producto en probabilidad. También se puede alcanzar la solución de cada una de ellas si a) se cuentan los casos posibles de cada experiencia, b) se cuentan los casos favorables al evento en cuestión y c) se aplica la fórmula clásica de probabilidad.

Los contextos de las preguntas son como sigue: cuatro en contexto de urnas, otra se refiere a la formación de placas y la última se plantea en términos de porcentajes de muestreo en una población de manzanas. Excepto porque en el último problema el contexto sugiere que el muestreo es sin reemplazo (aunque para resolverlo se debe considerar como si fuera con reemplazo), todas las preguntas tienen la misma estructura (aplicación de la regla del producto).

Las preguntas en el contexto de urnas tienen algunas variantes. En las preguntas 1 y 2, las dos extracciones se realizan simultáneamente pero en urnas separadas, mientras que en las preguntas 3 y 5 las extracciones se realizan en una sucesión temporal en *una* urna. Consideramos, entonces, la variable de tarea *temporal* para los problemas de regla del producto en contexto de urnas, esta variable puede tomar uno de dos valores. Llamaremos situaciones *sincrónicas* a las constituidas por dos o más acciones que se realizan simultáneamente; y *diacrónicas* las que se forman por una o más acciones en sucesión. ¿Influye esta variable en la respuesta que elige el estudiante?

Otra variante entre las preguntas se refiere a la posibilidad de distinguir los objetos entre sí. En las preguntas 1 y 4 intervienen objetos totalmente distinguibles, mientras que en las restantes se presentan subconjuntos de objetos indistinguibles. Se ha indicado que esta pequeña diferencia propicia confusiones en tareas combinatorias (Batanero, 1994); es muy probable, entonces, que también influya en los resultados de las preguntas de probabilidad asociadas con la regla del producto.

Otra variable considerada en los estudios combinatorios es la cantidad de objetos que intervienen en un problema. Cuando son pocos los objetos, la solución es más accesible ya que es posible confeccionar un listado de los casos posibles; mientras que cuanto más grande es el número de objetos, tal recurso paulatinamente pierde efectividad hasta volverse prácticamente imposible, por lo que surge la necesidad de poseer esquemas apropiados para contar o, en su defecto, utilizar la regla del producto probabilista. En las situaciones de las preguntas 1, 2 y 3 hay pocos objetos, no así en 4, 5 y 6, por lo que en éstas, aunque no es imposible, es poco práctico hacer un listado.

Comportamiento heurístico, estas variables tienen el propósito de centrar la atención en la idea de que hay procedimientos generales (heurísticas) convenientes para resolver ciertos problemas. En nuestro estudio se consideró que el nivel de comprensión estudiantil permitía omitir la inclusión de este tipo de variables. Sin embargo, se pueden proponer ciertas variables en las opciones de respuesta que reflejen dificultades o sesgos de la manera estudiantil de pensar el problema.

Para construir las opciones del cuestionario, se consideraron dos estrategias erróneas, detectadas en entrevistas informales con estudiantes de bachillerato (Buendía, 1994). Una de ellas la llamamos estrategia aditiva porque consiste en sumar las probabilidades de dos eventos que se calculan de manera independiente una de la otra. Por ejemplo, consideremos la primera pregunta del cuestionario:

Se tienen dos urnas: la urna A tiene dos bolas, una marcada con la letra ***a*** y otra con la letra ***b***. La urna B tiene tres bolas, una marcada con el número **1**, otra con el número **2** y otra con el número **3**.

> Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B.
> ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola con la letra **a** y la bola con el número **3**?, es decir, ¿cuál es la probabilidad de sacar el par (**a, 3**)?

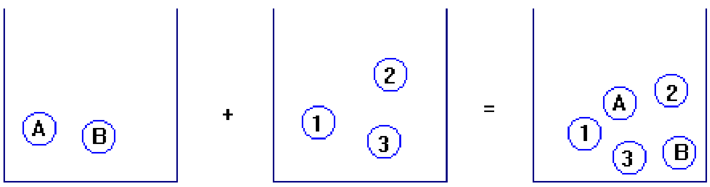
Se espera que la mayoría de los estudiantes perciban que el evento en cuestión se puede descomponer en dos eventos más simples, a saber, por un lado, que "salga ***a*** de la urna A" y, por otro, "que salga **3** de la urna B". La probabilidad de que ocurra el primer evento es $\frac{1}{2}$, y la probabilidad de que ocurra el segundo evento es $\frac{1}{3}$. Un estudiante sigue la estrategia aditiva si cree que debe sumar ambas probabilidades para obtener el resultado.

La otra estrategia errónea la hemos llamado *pseudoaditiva*, y se manifiesta si el estudiante calcula las probabilidades de los eventos simples, igual que en el caso anterior, pero luego, en apariencia, suma inapropiadamente las fracciones resultantes al aplicar una regla como la siguiente:

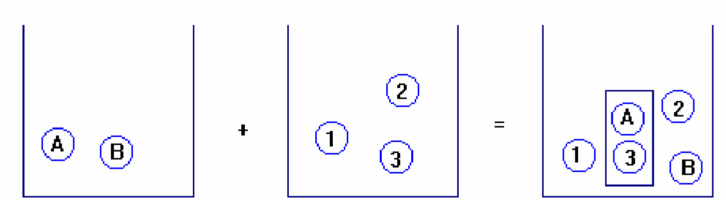
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Si un estudiante sigue la estrategia pseudoaditiva en el ejemplo arriba expuesto obtendría la fracción $\frac{2}{5}$, probablemente resultado de pensar en la siguiente expresión como válida $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\right)$.

No obstante, es imposible afirmar que todos los que dan una respuesta acorde con lo anterior no saben sumar fracciones; hay otra manera de enfrentar la situación que puede dar el mismo resultado. Consiste en el eslabonamiento de una transformación inválida de la situación con una manera inadecuada de entender la fórmula clásica de probabilidad. La transformación consiste en pensar que una situación de extracción de dos objetos, primero uno de una urna y luego otro de otra, equivale a una extracción doble de una urna cuyo contenido sea el contenido de las dos iniciales:



Entonces se considera el contenido de la última urna como la descripción del espacio conjunto. Luego, se identifica la pareja (a, 3) como el evento en cuestión y se aplica la fórmula clásica de probabilidad:



que en este caso resultaría la probabilidad $\frac{2}{5}$, que coincide con la *pseudosuma* de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Finalmente, una tercera opción es la respuesta correcta, la que se origina de multiplicar las probabilidades de los eventos componentes o al enumerar o contar el espacio conjunto en forma adecuada. Así, aunque no en el mismo orden, cada pregunta tiene las opciones:

a) pseudoaditiva: $\frac{2}{5}$ b) aditiva: $\frac{5}{6}$ c) multiplicativa (correcta): $\frac{1}{6}$ c) otra

5. La población examinada

El cuestionario se aplicó a 196 alumnos de distintos niveles y de dos instituciones. Los grupos A y E son estudiantes de UPIICSA (Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del IPN). El grupo A cursaba probabilidad cuando se les aplicó el cuestionario. El grupo E era de tercer semestre y ya había cursado probabilidad en el semestre anterior.

En el examen aplicado al grupo E se pidió a los alumnos que encontraran las respuestas por sí mismos, pues se suprimieron las opciones. Esta modalidad intentaba verificar si las opciones incorrectas sugeridas en las otras aplicaciones podían surgir en forma espontánea, de manera que se pudiera observar hasta qué grado la presencia de posibles respuestas induce la decisión del alumno.

El grupo B proviene del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM y, al momento de la aplicación, le faltaban unas tres semanas para terminar el curso de probabilidad. En este grupo el profesor organizó su enseñanza con especial atención en la adquisición de habilidades por parte de los estudiantes en el uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol para auxiliarse en la solución de problemas del tema de Probabilidad Condicional e Independencia. Este tema incluye la aplicación de la regla del producto para eventos dependientes e independientes, el cálculo de la probabilidad total e, incluso, la solución de problemas relacionados con la regla de Bayes.

El grupo C lo forman estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades que no han cursado probabilidad. Se espera que ellos elijan la opción más intuitiva, es decir, la que se puede presentar al pensamiento de manera natural.

El grupo D lo constituyen alumnos del mismo Colegio que adeudan la asignatura, ya sea por haber reprobado el curso o por no haber asistido a él y se encuentran, al momento de la aplicación, en proceso de acreditación. Se esperaría que este grupo tuviera el mayor número de confusiones respecto a los conceptos útiles para determinar las respuestas correctas a las preguntas planteadas.

En la siguiente tabla se resumen algunas de las características de los cinco grupos:

		Nº ALUMS	EDAD PROM
Grupo A	1er año licenciatura: Administración Industrial	39	20 años
Grupo B	Fin Bachillerato. Énfasis en tablas y árboles	62	17 años
Grupo C	Bachillerato. Sin curso de probabilidad	25	16 años
Grupo D	Bachillerato. Bajo rendimiento (repetidores)	21	23 años
Grupo E	1er año licenciatura. Cuestionario abierto	49	21 años
Total		196	19 años

6. Resultados *y observaciones*

Los resultados que presentaremos a continuación responden las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál fue el desempeño de cada grupo?

b) ¿Cuál es el orden de dificultad de las preguntas?

c) ¿Cuántos estudiantes optaron por respuestas incorrectas?

El desempeño de cada grupo. En la siguiente tabla presentamos los índices de respuestas correctas para cada grupo examinado; se obtuvieron considerando el porcentaje global de respuestas correctas:

Grupo	Resps. Correctas
Grupo A	52 %
Grupo B	50 %
Grupo C	22 %
Grupo D	30 %
Grupo E	22 %

Los grupos A y B tienen un desempeño semejante a pesar de que los estudiantes del primero son más maduros. Pareciera que las dificultades en tareas como las examinadas se mantienen en el intervalo que abarca del fin del bachillerato al primer año de profesional. Sin embargo, hay que considerar que el grupo B ha sido objeto de una enseñanza especial, con énfasis en la adquisición de destrezas para utilizar diagramas de árbol y tablas. Esta circunstancia podría ser la causa por la que su índice de respuestas se asemeja al del grupo A. Por otro lado, los grupos A y E, son semejantes en cuanto a formación y edad, pero su desempeño varía considerablemente, hay una diferencia de 30% en sus índices de respuesta. Esto nos indica que la presencia de las opciones influye en buen grado en la elección de la respuesta correcta, ya sea porque los alumnos tengan algún criterio para estimar por dónde anda una respuesta plausible y entonces elegir la más próxima, o simplemente porque les reduce considerablemente el universo de elecciones posibles.

El grupo E tiene un índice próximo al del grupo C, cuyos alumnos son más jóvenes y sin instrucción en probabilidad. Lo cual indica el hecho obvio de que las preguntas sin opciones son más difíciles de responder. El grupo D, de bajo desempeño, apenas se separa del que no ha llevado probabilidad.

Orden de dificultad de las preguntas. Ahora observemos los porcentajes de respuesta correcta que tuvo cada pregunta en particular. Las hemos ordenado de mayor a menor índice de respuesta correcta.

Grupo A

Pregunta	N^o de alumnos	%
4	31	79%
1	25	64%
2	21	54%
6	17	44%
3	15	38%
5	13	33%

Grupo B

Pregunta	N^o de alumnos	%
4	42	68
5	36	58
3	34	55
6	29	47
1	26	42
2	18	29

Grupo C

Pregunta	N^o de alumnos	%
4	9	36%
1	7	28%
2	6	24%
6	7	28%
3	2	8%
5	2	8%

Grupo D

Pregunta	N^o de alumnos	%
4	12	57%
1	9	43%
2	7	33%
3	4	19%
5	4	19%
6	2	10%

Grupo E

Pregunta	N^o de alumnos	%
1	15	31%
3	15	31%
4	12	24%
6	9	18%
3	9	18%
5	6	12%

La pregunta número 4 muestra el índice más alto de respuestas correctas, excepto para el grupo E. Es probable que el contexto “de placas” favorezca la visualización de los resultados en mayor grado que el contexto de urnas, pero quizá también influye la *distinguibilidad* completa de los objetos en juego. Es de observar que, en general, parece que no afectó de manera negativa el hecho de que el número de objetos que intervienen sea relativamente grande. Sin embargo, es posible que el grupo D haya tenido más dificultades con esta pregunta que con la 1 y la 2 debido al número de objetos, sobre todo porque tenía que encontrar dicho número.

La siguiente pregunta con alto índice de respuestas correctas es la 1. Ésta tiene características semejantes a la pregunta 6 en cuanto a la *simultaneidad* de la experiencia y a la *distinguibilidad* de los objetos que intervienen. Difieren en el contexto: mientras que la pregunta 4 se plantea en un contexto de formación de placas, tal vez más familiar al estudiante, el contexto de urnas de la pregunta 1 pareciera ser un poco más abstracto.

El grupo B se sale de la norma establecida por los otros con relación a la pregunta 1. En este caso la colocan en el quinto lugar, con un índice de respuesta correcta por debajo de otras cuatro preguntas. Es posible que este desajuste se explique por la familiaridad que este grupo tiene con los diagramas de árbol, asociados quizá en mayor grado a experiencias de extracciones sucesivas en el tiempo, es decir diacrónicas. Como las preguntas 1 y 2 no se ven como extracciones sucesivas posiblemente no utilizaron diagramas de árbol.

La pregunta 2 tuvo el tercer lugar en facilidad para los grupos A, C y D; no así para el resto. De hecho, fue sorprendente que para el grupo B fuera la más difícil. El pequeño grado de dificultad que presenta esta pregunta frente a la 4 podría atribuirse, quizá, al hecho de que en ésta (pregunta 2) hay objetos indistinguibles.

La pregunta 6 se encuentra en el cuarto lugar en los grupos A, B, y C, mientras que en D y E tuvo el menor índice de respuestas correctas. Una dificultad en esta pregunta puede ser la presentación de la información en porcentajes. Ya se ha mencionado que si imaginamos la situación, lo más natural es pensar que el muestreo es sin reemplazo; sin embargo, la información sería insuficiente para calcular la probabilidad si se toma en cuenta ese detalle. Suponiendo que el número de manzanas es ‘grande’, entonces es válido tratarlo como si el muestreo fuera sin reemplazo.

Las preguntas 3 y 5 son más irregulares en cuanto a su posición en las tablas de porcentajes. En los grupos A y C se encuentran en la parte inferior de la tabla, en el grupo B en tercero y segundo lugares respectivamente. Esto último puede obedecer a la misma razón, ya expresada, de la enseñanza con énfasis en el uso diagramas y tablas que este grupo recibió. En el grupo D el índice de respuestas correctas a estas preguntas ocupa el cuarto y quinto lugares.

Elecciones de respuestas incorrectas. Consideramos el conjunto de todas las respuestas, sin especificar a qué pregunta corresponden, y contamos el número de respuestas que corresponden a cada estrategia; el resultado lo observamos en el siguiente cuadro:

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
M	47%	45%	17%	28%	24%
A	21%	20%	16%	22%	26%
Ps	12%	20%	51%	29%	3%
Otra	17%	13%	16%	19%	46%

Donde M = estrategia multiplicativa; A = estrategia aditiva;

Ps = estrategia pseudoaditiva; O = Otra

La tabla anterior indica que la opción aditiva es considerada respuesta viable, sin importar el grupo. El hecho de que, incluso el grupo E, al que se aplicó un cuestionario abierto, haya dado la respuesta aditiva en un porcentaje tan alto, confirma que tal respuesta la auspicia algún modelo explicativo. La opción pseudoaditiva también es elegida por estudiantes de cualquier grupo; pero en este caso es una opción más atractiva para los grupos C y D; pareciera que con la instrucción se supera con facilidad el razonamiento que lleva a este tipo de respuesta. El bajo rendimiento del grupo E sugiere que el razonamiento erróneo empleado difícilmente surge en forma espontánea, al menos en estudiantes que han cursado probabilidad.

7. Conclusión

Al tratar los temas introductorios de probabilidad en los cursos de Estadística, frecuentemente el estudiante se pregunta: ¿Cómo puedo saber en qué problemas aplico la regla de la suma y en cuáles la regla del producto? La pregunta refleja la concepción de la matemática que la reduce a un conjunto de reglas que deben aprenderse. Los estudiantes formados en esa concepción piden criterios inequívocos para aplicar las reglas. Sin embargo, el anterior análisis de datos muestra que pequeñas variaciones en los problemas inducen a variaciones importantes en la conducta de resolución. La respuesta a esa pregunta, y a muchas otras, se deduce de las observaciones de Schoenfeld sobre la *potencia matemática*, es decir, aprender a razonar lógicamente y desarrollar aptitudes y estrategias más generales de resolución de los problemas. El diseño de una enseñanza con este objetivo debe ser capaz de elegir conjuntos de problemas en los que se tenga control de algunas variables que ayuden a conducir el proceso de aprendizaje. Las variables de tarea identificadas en este estudio pueden guiar la confección de problemas y secuencias de enseñanza para la comprensión y aplicación flexible de las reglas básicas de probabilidad.

Referencias bibliográficas

Batanero, M. C.; Godino, J. D.; Navarro-Pelayo, V., 1994, *Razonamiento Combinatorio,* Editorial Síntesis, España.

Borovcnik, M.; Bentz, H. J.; Kapadia R., 1991, A Probabilistic Perspective, en Kapadia, R.; Borovcnik, M., (Editores), *Chance Encounters: Probability in Education,*Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 27-72.

Borovcnik, M.; Bentz, H. J., 1991, Empirical Research in Understanding Probability, en Kapadia, R.; Borovcnik, M., (Editores), *Chance Encounters: Probability in Education,* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Buendía, G., 1994, *Observaciones acerca de las respuestas frente a tareas que involucran la regla del producto probabilístico*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México, D. F.

Goldin, G. A.; McClintock, C. E., 1984, *Task Variables in Mathematical Problem Solving,* The Franklin Institute Press, Pennsylvania, USA.

Kulm, G., 1984, The Classification of Problem-solving Research Variables, en Goldin, McClintok, 1984, pp. 1-21.

Laplace, P. S., 1988, *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades,* Alianza Editorial, México. [Traducción del francés al castellano de Pilar Castillo].

Schoenfeld, A.; 1989, La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas, en Resnick, L; Klopfer, L. *Currículum y Cognición*, Aique, Argentina.

Cuestionario

1. Se tienen dos urnas: la urna A tiene dos bolas, una marcada con la letra a y otra con la letra b. La urna B tiene tres bolas, una marcada con el número 1, otra con el número 2 y otra con el número 3. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B.
   ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola con la letra a y la bola con el número 3?, es decir, ¿cuál es la probabilidad de sacar el par (a,3)?

   a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) Otra

2. Se tienen dos urnas: la urna A contiene dos bolas negras y una blanca. La urna B contiene una bola negra y cuatro blancas. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B.
   ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras?

   a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{13}{15}$ c) $\frac{3}{8}$ d) Otra

3. Se tiene una urna con tres bolas: una negra y dos blancas. Se extrae una bola al azar, se ve su color y se devuelve a la urna. Se mezclan las bolas y se vuelve a extraer una bola al azar y se ve su color.
   ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola negra las dos veces?

   a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) Otra

4. Las placas de las bicicletas se forman con un dígito del uno al nueve y una letra del abecedario (26 letras). Si se solicita una placa, ¿cuál es la probabilidad de obtener la placa 7F?

   a) $\frac{35}{234}$ b) $\frac{1}{234}$ c) $\frac{2}{35}$ d) Otra

5. Se tiene una urna con ocho bolas: cinco blancas y tres negras. se extrae una bola al azar y se ve su color. Se devuelve a la urna. Se mezclan y se extrae una bola al azar una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de haber extraído bola negra las dos veces?

   a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{6}{16}$ c) $\frac{9}{64}$ d) Otra

6. En un almacén el 90% de las manzanas son rojas y el 10% son verdes. Si se toman al azar dos manzanas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas manzanas sean rojas?

   a) $\frac{81}{100}$ b) $\frac{18}{10}$ c) $\frac{18}{20}$ d) Otra

Exploración sobre la relación entre variables categóricas y visuales en conversiones que involucran gráficas

Dra. Claudia M. Acuña S.
cacuna@mail.cinvestav.mx
Cincestav-IPN
México

Nivel medio Superior, Graficación

Resumen

En el siguiente trabajo proponemos un esquema de la relación entre representaciones gráficas y algebraicas para llevar a cabo una conversión entre registros semióticos distintos, en particular, cuando se trabajan con semiplanos horizontales y verticales en el plano cartesiano. Este esquema es usado como referencia para analizar las respuestas de tres muestras de estudiantes de bachillerato a quienes se les propuso tareas donde debían: a) localizar puntos sobre semiplanos, b) sombrear semiplanos horizontales o verticales y c) describirlos en lenguaje natural y/o expresión algebraica. Los resultados del cuestionario nos permitieron identificar aspectos irrelevantes reiterados así como diversos patrones de respuestas de nuestros estudiantes.

Introducción

Los objetos de la matemática no son directamente accesibles para su estudio, a diferencia de otras ramas del conocimiento humano, esto quiere decir, por ejemplo que un número no es el signo que se imprime sobre el papel, ni una recta es un hilo tenso. De hecho en matemáticas nos debemos conformar con manejar representantes de los referidos objetos. Es a través de esas representaciones como llegamos a conocerlos.

En la matemática no hay objetos con una única representación debemos, por tanto, partir del hecho de que siempre habrá más de una representación para cada uno.

En cada representación, se manifiesta una forma de mirar ese mismo objeto desde distintas ópticas, en cada caso se atiende una perspectiva distinta que puede iluminar diferentes facetas del mismo.

Qué de común y qué de distinto hay en las representaciones de un mismo objeto, así como el indagar mediante qué procedimientos podemos llegar de una a otra, no es un trabajo ocioso, ya que construir puentes significativos entre las diferentes representaciones enriquece la construcción conceptual del objeto.

El hecho de que las representaciones se manifiesten a través de signos, hace que la semiótica juegue un importante papel, de hecho, tomar el punto de vista del análisis semiótico nos permite observar y explicar algunos aspectos de la construcción del conocimiento.

Una función cognitiva que se apoya en los signos y en sus relaciones para construir puentes significativos entre las representaciones es la de la conversión[4]

En este trabajo estamos interesados en el proceso de conversión entre distintas representaciones del mismo objeto matemático, las cuales pertenecen a registros semióticos[5] diferentes.

---

[4] *La conversión de una representación es la transformación de esta en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial*. R Duval (1999), Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, *Investigación en Matemática Educativa II*, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, Ed. Hitt F. p. 173-201.

Para que la conversión entre representantes cumpla su papel en la conceptualización de los objetos matemáticos, se requiere de hacer explícito las variables de los registros en cuestión.

En el caso que nos ocupa, las variables pertenecen a los registros semióticos gráfico y algebraico, apoyados por la lengua natural, ésta última juega un papel de soporte y hace explícita las relaciones entre las representaciones.

Una conversión entre registros semióticos en el sentido de Raymond Duval6, no se reduce a una decodificación o a una interpretación, debido a que existen relaciones significativas entre los conjuntos de signos bien formados que escapan a una traducción literal como sería el caso del traslado de significados.

La conversión entre representaciones incluye la relación de todos los signos significativos participantes incluyendo el de la relación gestalt que se manifiesta en la construcción de una gráfica sobre el plano, es decir, incorpora las restricciones impuestas a la forma (gráfica) por parte del fondo (ejes coordenados).

En el presente trabajo relacionamos las variables de los registros gráfico y algebraico a través de un esquema para las tareas de identificación y descripción de puntos sobre semiplanos.

El esquema nos permite contrastar a las variables visuales y categóricas que se necesitan en una conversión con los usos e interpretaciones que de ellas hacen los estudiantes Nos proporciona, además, un marco de referencia para el análisis de los resultados obtenidos. Con base en él hemos elaborado un cuadro que nos permite contrastar los aspectos relevantes con los irrelevantes entre nuestros estudiantes, así como conjeturar sus orígenes.

Marco Teórico

Las representaciones que pertenecen a diferentes registros semióticos se relacionan significativamente a través de la conversión, nos comenta R. Duval (1999a) que *las representaciones semióticas son representaciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de representación que tienen sus propios condicionamientos de significancia y funcionamiento* (p. 175).

Para que el manejo de las representaciones de un objeto matemático se transforme en un elemento constructivo en la producción del conocimiento matemático, se requiere de un proceso en que el que la *semiosis*[7] de las representaciones promueva el desarrollo de la *noesis* de las mismas.

De la misma manera como una traducción literal omite significados relacionados con el uso, la decodificación, la translación o la interpretación son procesos que también establecen relaciones significativas entre representaciones, pero son insuficientes para establecer todas las claves que nos permitirán relacionar los significados entre representaciones de registros distintos.

[5] Los registros semióticos son sistemas de signos, y para *que un sistema semiótico sea un registro de representaciones, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiósis.*

1. *La formación de una representación identificable*
2. *El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo en donde ha sido formada.*
3. *La conversión de una representación es la transformación de esta en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial*. (R. Duval 1999a, p.175)

[6] R. Duval (1999a), Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento, *Investigación en Matemática Educativa II*, p. 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, Ed. Hitt F.

[7] *Semiosis : aprehensión o reproducción de una representación, Noesis: aprehensión conceptual de un objeto*. R. Duval (1993) Semiosis y noesis, Investigación en Educación Matemática, la escuela francesa

Cuando las representaciones con las que trabajamos incluyen gráficas, es necesario no sólo establecer las relaciones que los signos algebraicos requieren, sino se deben incorporar además las relaciones de los elementos visuales. Estos elementos son necesarios para desarrollar la visualización: *que a diferencia de la visión, la cual se basa en el acceso directo al objeto, la visualización se basa en la reproducción de una representación semiótica* (Duval 1999b, p. 13).

Las relaciones de los elementos visuales, en el caso de la graficación, se refieren a las establecidas por la relación gestalt del plano, es través de esta relación se establecen reglas generales de procedimiento en el plano, reglas que generalmente quedan ocultas por el tratamiento gráfico.

La relación entre la figura-fondo (los ejes) y la figura-forma (la gráfica) nos permite considerar a todos los elementos visuales que tienen un papel significativo en la representación gráfica.

En lo que respecta a las variables visuales y categóricas, R. Duval (1999a) considera que: (la) *conversión exige que se discriminen bien las unidades significantes propias de cada registro. En otros términos es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan una significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados* (p.181).

La relación entre las variables visuales y las categóricas de las tareas de identificación y descripción de semiplanos propuestas en este trabajo, así como los valores que pueden tomar, se presentan mediante el siguiente cuadro:

Variables visuales	Valores	Variables categóricas (Unidades simbólicas correspondientes)
Posición del trazo respecto a los ejes	Trazo paralelo al eje horizontal	*Y* en la inecuación
	Trazo paralelo al eje vertical	*X* en la inecuación
Posición del trazo respecto al origen en el eje respectivo	El trazo corta al eje vertical a la derecha del origen	Coeficiente mayor que cero
	El trazo corta al eje vertical en el origen	Coeficiente cero
	El trazo corta al eje vertical a la izquierda del origen	Coeficiente menor a cero
	El trazo corta al eje horizontal arriba del origen	Coeficiente mayor a cero
	El trazo corta al eje horizontal en el origen	Coeficiente cero
	El trazo corta al eje horizontal abajo del origen	Coeficiente menor a cero
Despliegue de la zona	Hacia arriba	Signo de la desigualdad mayor que
	Hacia abajo	Signo de la desigualdad menor que

Metodología

Hemos propuesto un cuestionario a tres muestras distintas de estudiantes de bachillerato, la muestra A que consta de 31 estudiantes (17 años) de un bachillerato ubicado en la periferia de la ciudad de México, la muestra B de 25 estudiantes (17 años) corresponde a un bachillerato de la ciudad de Guadalajara y la muestra C corresponde a 81 (16 años) de ellos de la misma escuela pero que cursan un grado inferior.

Observamos tres muestras distintas, en ubicación y edad, de estudiantes de bachillerato para contrastar afinidades y discrepancias en las soluciones con base en el esquema que relaciona a las variables visuales y categóricas.

Las preguntas propuestas eluden el tratamiento de la relación entre ecuaciones y gráficas. En todos los casos, menos en P9, proporcionamos un plano cartesiano con cuatro marcas por eje. Están planteadas en el registro de la lengua natural, de esta manera se hacen explícitas sencillas expresiones algebraicas, las tareas se refieren a: a) localizar puntos sobre semiplanos, b) sombrear semiplanos horizontales o verticales y c) describirlos en lenguaje natural y/o expresión algebraica.

Los semiplanos horizontales y verticales con los que trabajamos en este cuestionario son considerados en los enunciados como conjuntos de puntos sobre el plano de manera que cumplen con las condiciones establecidas por una desigualdad.

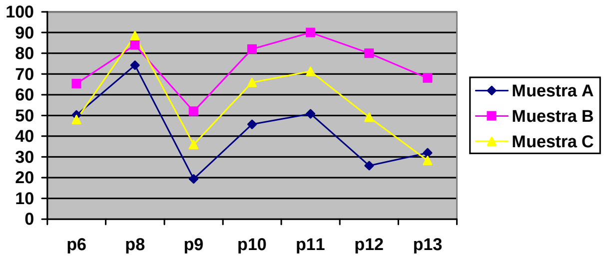
El Cuestionario y los Resultados

A continuación presentamos una descripción de las preguntas del cuestionario así como los resultados obtenidos en las muestras A, B y C:

No de pregunta	Pregunta	Resultados en las muestras A, B y C
P6	Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona	A 50.2%, B 57.5%, c 48%
P8	Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?	A 71% B 84%, C88.5%
P9	¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? ____ analiza la pregunta **y si crees que no son iguales**, da un ejemplo de algún punto que esté en uno de estas zonas pero que no esté en la otra	A3. 2 %, B 32%, C 16.4%
P10	En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.	A 51.5%, B 82%, C 65.9%
P11	En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona	A 50.8%, B 90%, C 71.3%

P12	Todos los puntos con ordenada mayor a -2 a) ¿están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada *y = -2?*__________ b) sombréala	A 25.8%, B 80%, C 49.1%
P13	Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$	A 32%, B 68%, C 28.3%

La gráfica que presentamos a continuación muestra un resumen de las frecuencias de las respuestas correctas:



En el siguiente análisis de las respuestas hacemos especial énfasis entre los aspectos relevantes para el manejo de las variables visuales y los aspectos irrelevantes incluidos por nuestros estudiantes.

Item	Aspectos relevantes	Aspectos no relevantes y consideraciones incorrectas	Tipo de error
P6. Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona	Ordenada positiva en los puntos elegidos	Indicaciones generales la solución reinterpretando la notación algebraica como: - 1 y, - 2 y, - 3 y; -1, -2 , -3	Puntos con ordenada negativa o cero
P8. Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?	Intersección de semiplanos, plano horizontal desplegado hacia arriba intersección con el plano vertical desplegado a la izquierda	Intersección de semiplanos confundiendo positivo por negativo y al revés	Elección de cuadrante incorrecto
P9¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? ____	Despliegue de cada zona, posición de la ordenada	Dos signos en una desigualdad sugieren un cambio por otro signo de sentido contrario.	Los semiplanos $y > -1$ y el $y < 1$ son considerados iguales.

analiza la pregunta **y si crees que no son iguales**, da un ejemplo de algún punto que esté en uno de estas zonas pero que no esté en la otra			
P10 En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$, Di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.	Punteo en los casos accesibles sobre la hoja de papel. Orientación general de la positividad en los casos de puntos inaccesibles	Defectos en la localización de ordenada y abscisa en los puntos sobre la hoja de papel. Orientación equivocada en los puntos inaccesibles (17,-6) y (-47,0).	a)Localización defectuosa de puntos b)Localización defectuosa de zonas en donde estarían los puntos inaccesibles
P11. En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona	Punteo en los casos accesibles sobre la hoja de papel. Orientación general de la positividad en los casos de puntos inaccesibles	Defectos en la localización de ordenada y abscisa en los puntos sobre la hoja de papel. Orientación equivocada en los puntos inaccesibles (15,0) y (4,-30).	a)Localización defectuosa de puntos b)Localización defectuosa de zonas en donde estarían los puntos inaccesibles
P12 Todos los puntos con ordenada mayor a -2 a) ¿están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada $y = -2$?_________ b) sombréala	Despliegue del semiplano horizontal hacia arriba	Recta del eje horizontal como cota para el semiplano	Despliegan la zona por debajo de la recta. Sombrean el semiplano hacia arriba hasta la recta del eje horizontal formando una franja. (A 16.1%, C 11.5%)
P13 Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$	a) Posición del trazo respecto a los ejes (vertical) b) Despliegue del plano (a la derecha) c) Posición del plano respecto al origen (dos unidades negativas)	Confusión entre ordenada y abscisa y/o el signo de la desigualdad y/o signo del numeral	Despliegue del semiplano vertical a la izquierda. Despliegue del semiplano en x = n, con n distinto de –2 Semiplano horizontal.

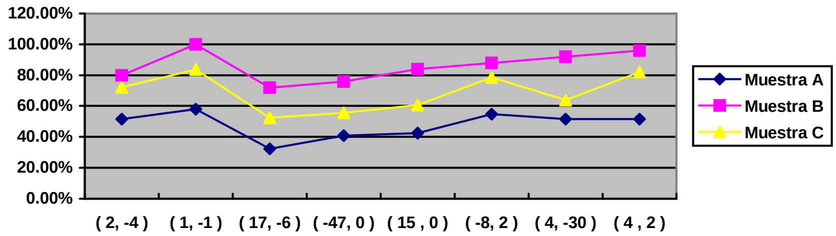
Discusión y Conclusiones

Hemos relacionado a las preguntas P6, P10 y P11 en tanto que en todas ellas se pide la localización de puntos sobre zonas diversas.

El punteo o localización de puntos con base en los valores establecidos por la ordenada y la abscisa es una estrategia que se basa en:

a) La lectura de la pareja ordenada, la primera entrada corresponde a la abscisa, la segunda a la ordenada.
b) Positividad o elección de la dirección que se debe de tomar respecto a los ejes si la coordenada en cuestión es positiva o negativa.
c) La numerabilidad, o elección de la posición del numeral de la ordenada o de la abscisa correspondiente.

En el caso de las preguntas P10 y P11 tenemos los resultados en la siguiente gráfica:



La primera mitad de la gráfica da cuenta de los ejercicios de P10 y la segunda mitad de P11

La gráfica anterior nos sugiere que la localización de puntos sobre el plano no es homogénea. Si la razón la apoyamos en la positividad tenemos, por ejemplo, los tres primeros puntos de la gráfica (2,-4), (1,-1) y (17,-6) que en todos los casos se refieren a casos de puntos *abscisa positiva y ordenada negativa* y los resultados son muy distintos como podemos ver en la gráfica anterior, por lo que se descarta la opción.

Podríamos pensar entonces, que el problema de la no-homogeneidad radica en la numerabilidad, en particular en los puntos considerados inaccesibles como (17,-6) y (-47,0) en el semiplano horizontal (p10) y el punto (4,-30) en el plano vertical (p11), pero nuestra gráfica nos dice que pese a no ser accesibles, los puntos no son tratados de igual manera así tenemos que fue más difícil decidir si el punto (17,-6) estaba sobre la zona correspondiente que el punto (-47,0) o (4,-30).

Es en este punto donde consideramos que la relación gestalt muestra su presencia en la tarea, en el caso de las dos últimas parejas no podemos contabilizar los valores de las coordenadas porque quedan fuera de la hoja de papel, pero contienen numerales que orientan sobre la posición de los puntos como es el cero en un caso y el cuatro en el otro. Este método de orientar la posición de los puntos en base al valor de las coordenadas podría ser útil en todos los casos, pero lo usan sólo cuando se se encuentran cerca de los ejes o del origen.

En el caso de la pregunta 6 (p6) el inciso a) no es parte de la tarea debido a que los puntos son elegidos por el estudiante. En esta tarea es necesario saber de antemano donde está la zona que ocupa el semiplano en cuestión por lo que ha de hacerse uso de los incisos b) y c).

Si comparamos los resultados generales de P6 con P10 y P11 tenemos que son más bajos en las muestras B y C mientras que en A se mantiene cercanos, de manera que la tarea de elegir arbitrariamente tres puntos sobre una zona determinada resultó ser más difícil que constatar si ciertos puntos esta o no sobre un cierto semiplano.

Por otro lado, frecuencia de P8, (ordenada positiva, abscisa negativa) tiene una gran diferencia con la de P12, aunque en ambas se pide el valor (derecha-izquierda, arriba-abajo) de la variable visual despliegue del semiplano, es decir en ambas preguntas hay que localizar una zona en un caso una intersección de semiplanos y en la otra un semiplano horizontal, la diferencia es notable y apunta nuevamente sobre la diferencia de orientarse con los ejes o con rectas localizadas con dificultad.

Pero, también la presencia del eje horizontal impone consideraciones irrelevantes, en las muestras A y la C de la pregunta 12, los estudiantes construyeron una franja visual con el eje horizontal (16.1% y 11.5% respectivamente) quedando atrapados por un lado con la atracción del eje y por otro lado no cuentan con suficiente soltura en la interpretación de las restricciones algebraicas en el plano.

En P9 no presentamos un plano en donde los estudiantes pudiesen hacer sus bocetos o dar la solución, esto parece haber orillado, entre otras cosas, a responder la pregunta en términos supuestamente algebraicos y desarrollar la falacia de dos aparentes cambios de signo en una y otra desigualdad que da como resultado la frecuencia más baja de todas las tareas, no detectamos ningún intento de graficación en esta pregunta.

Por último, en lo que respecta a la pregunta 13 en cuya gráfica no proporciona la recta que acota al semiplano en cuestión tenemos que los errores cometidos se concentran en equivocar el despliegue del plano (a la izquierda en lugar de la derecha), a la numerabilidad y la confusión entre ordenada y abscisa traducido en la elección del plano horizontal en lugar de vertical.

En general podemos apuntar que nuestros estudiantes consideran la figura fondo (los ejes) de manera global es decir, les permite orientar la posición de los puntos pero sólo cuando se trata de casos cercanos a los ejes o al origen, pero tienen dificultades para desarrollar una orientación exacta que considere la positividad (para la localización de los puntos y para el despliegue de las zonas) y la numerabilidad (para la localización de puntos y el corte de los trazos), la relación gestalt es interpretada parcialmente.

Los estudiantes no usan el punteo para indagar o corroborar las condiciones generales de los puntos en determinadas zonas, difícilmente los ven como elementos asociados por indicaciones generales, por lo que los semiplanos no pueden ser vistos como lugares geométricos.

Los estudiantes no cuentan con códigos visuales que les permitan interpretar los elementos gráficos considerando la relación gestalt de la gráfica y por tanto estarían en condiciones de trabajo muy difíciles para desarrollar una conversión. Por todo lo anterior apuntamos en la importancia de conocer la relación semiótica la gráfica.

Referencias bibliográficas

Raymond Duval, (1988), *Gráficas y Ecuaciones, la Articulación de dos Registros*, Antología de Educación Matemática, Cinvestav-IPN, p.125-139

Raymond Duval, (1993), *Semiosis y noesis*, Lecturas en Didáctica de las Matemáticas, Escuela Francesa, Cinvestav-IPN, p. 118-144

Raymond Duval (1999a) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica, p. 173-201.

Raymond Duval (1999b), Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning, proceedings of PME-NA*, p. 3-26.

Identificación de Obstáculos en la Construcción de Gráficas de Funciones[8]

Amelia Villalobos Martínez[9]
avillalo@mail.cinvestav.mx
Rosa María Farfán Márquez.
CINVESTAV-IPN
México

Resumen

El concepto de función reviste gran importancia es nuestra disciplina, muestra de ello es la gran cantidad de bibliografía al respecto. Empero consideramos importante hacer una sistematización del cúmulo de resultados obtenidos hasta el momento con la intención de que los investigadores interesados en el tema cuenten con un punto de partida en sus diversos proyectos.

Esta revisión del estado del arte del concepto de función, se centrará en la identificación de obstáculos epistemológicos, noción que refiere Bachelard, del concepto de función y la construcción de la noción misma de los trabajos subsecuentes. La noción de obstáculo epistemológico aparece como fundamental, debido a que estos surgen en el proceso de aprendizaje y mas propiamente por la confrontación que de conocimientos efectúa el sujeto, en el que habrá de enfrentarlos y superarlos, para lograr un conocimiento científico, que es uno de los objetivos que persigue la Matemática Educativa.

En la presentación haremos una sistematización de los principales obstáculos epistemológicos ya detectados en diveras investigaciones y el cómo intervienen enla construcción del concepto de función.

Introducción

Tradicionalmente, el concepto de función es estudiado con mayor o menor énfasis, sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki; esto es “como la relación entre pares de dos conjuntos X y Y, tal que cada elemento x del primer conjunto X se le asigna un elemento y, y solamente uno del conjunto Y, según una regla definida”. Esta definición que podemos llamar, general del concepto de función es la consecuencia de una larga construcción histórica y, en ese sentido, ella representa una de las últimas formulaciones del concepto.

Sin embargo, la construcción social del concepto de función, a lo largo del devenir histórico, es de naturaleza compleja en extremo, su desarrollo casi se ha hecho a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. empero el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores en la actualidad y además se le puede percibir en las diferentes etapas que en su evolución ha tomado:

A. Asociación con reresentación tabular.
B. Variación con representación gráfica.
C. Algebrización con representación algebraica.
D. Analitización con representación analítica (serie infinita de potencias de la variable).
E. Simbolización y definición general.

[8] Esta ponencia forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.
[9] Becaria del Conacyt.

El concepto de función en las investigaciones

En las diferentes investigaciones realizadas en torno al concepto de función tenemos a Carlson (1998), quien investiga el desarrollo que tienen los estudiantes con respecto al concepto de función, así como sus progresos a través de los diferentes grados de estudio. Parte desde álgebra dela Universidad, investiga con estudiantes que tuvieron honores en el segundo semestre de cálculo y con estudiantes de primer año de cursos universitarios. De los cuales escogió 5 estudiantes de cada grupo y elige los que obtuvieron calificaciones altas. El instrumento que utilizó para realizar su investigación fue el examen escrito y la entrevista.

El análisis del resultado del examen y las transcripciones de las entrevistas revelaron que hasta los mejores estudiantes no comprenden o no pudieron comprender completamente los conceptos enseñados en un curso y cuando se enfrentaron a problemas con los que no estaban familiarizados tuvieron dificultad para accesar a la información recientemente enseñada a ellos.

Los estudiantes de álgebra en la universidad, tuvieron un escaso panorama de las funciones y creyeron que toda función está definidad por una simple fórmula, otros no entendieron el lenguaje de función y fueron incapaces de interpretar la información dinámica a través de las gráficas y/o no supieron cómo usar la notación de función para representar relaciones con el “mundo real”.

su falta de habilidad para hablar y pensar acerca de las funciones como procesos en los que se acepta aportaciones y produce rendimiento, sugiere que conceptualizaron las funciones como acciones. Los estudiantes de segundo semestre de cálculo tuvieron un punto de vista mucho más general sobre las funciones y mucha mas habilidad para hablar y usar el lenguaje de las funciones. Aunque fueron capaces de interpretar información gráfica dinámica, fueron incapaces de utilizar la información enseñada recientemente en cálculo y tuvieron dificultad para interpretar y representar aspectos covariantes de una situación sobre función y tuvieron una mejor tendencia para acceder a los aspectos covariantes de una situación de función.

En el estudio que realiza Carlson, se investigan las habilidades que tienen los estudiantes para:

- Caracterizar las relaciones funcionales del “mundo real” usando la notación de función;
- Operar con un tipo particular de representación de función, tales como una fórmula, una tabla o una gráfica;
- Moverse entre diferentes representaciones de la misma función;
- Representar e interpretar aspectos covariantes de la situación de función (i.e. reconocer y caracterizar cómo el cambio en una variable afecta en otra);
- Interpretar información funcional estática y dinámica (i.e. interpretar gráficas representando posición y velocidad de cambio);
- Interpretar y describir propiedades locales y global de la función: pendiente, continuidad y diferenciabilidad; construir funciones, no-funciones y funciones tipo;
- conceptualizar una función como un proceso y como un objeto;
- Interpretar y entender el lenguaje de las funciones; y
- Caracterizar las relaciones entre una función y una ecuación.

Carlson muestra que la adquisición de aspectos esenciales del concepto de función es extremadamente compleja. Los estudiantes tienen dificultades para transitar entre diferentes representaciones y aplicar conceptos básicos en diferentes niveles de abstracción.

En el primer punto que Carlson caracteriza, encontramos que también en Sierpinska (1992) se encuentra que como una filosofía de las matemáticas, éstas, no están relacionadas con problemas prácticos. Así es como en el campo menospreciado de cálculos prácticos, que la noción de función comienza a existir, o comienza su vida.

Los estudiantes tienen la dificultad en vincular entre las diferentes representaciones de función, tales como fórmulas, gráficas, diagramas, descripción oral de las relaciones, en interpretación de gráficas, en la manipulación de símbolos relacionados a las funciones tales como *F(x), x y,* Sen*(x+t)*, etc. El lenguaje usado en connection con funciones no es útil, tampoco f(x) en situations espontáneas, los estudiantes usan diferentes simbolismos y diferente lenguaje. Por ejemplo, para decir que el valor de una función evaluada en 2 es 3, ellos escribirían: "X(2)=3". esto podría ser leído: "pon 2 en lugar de x en la fórmula de función y te da 3".

Sierpinska, en su estudio encontró varios obstáculos epistemológicos que enfrentan los estudiantes cuando encaran con el concepto de función.
De los cuales mostraremos dos:

Obstáculo epistemológico del concepto de función (OE(f))

- OE(f)-1: (Una filosofía de las matemáticas) Las matemáticas no están relacionadas con problemas pácticos. Así es en el caso menospreciado de cálculos prácticos, que la noción de función comienza a existir.
- OE(f)-2: (Una filosofía de las matemáticas) Las técnicas computacionales usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son meritorias de ser un objeto de estudio en matemáticas."(Sierpinska, 1992)

La identificación de los dos primeros actos de comprensión y obstáculos epistemológicos son algunas importantes aplicaciones para la pedagogía de funciones.

Ahora bien, para Vinner (1992), el concepto de función es una cosa y la imagen conceptual que tienen los estudiantes es otra y que al ser distintos, para ellos ya no es función, a pesar de que la definición esté bien para ellos, o sea que se la saben de memoria. Y para estos estudiantes, la definición no se usa para la vida real, es decir que es sólo una expresión analítica de algún problema matemático. Por ejemplo, si al sujeto se le presenta una gráfica, para éste sólo es una función si dicha gráfica es continua. Esto es porque su atención está centrada en esa imagen conceptual, está asociada a que la función tiene una expresión analítica y en este caso de las gráficas, es función si es continua.

Si la gráfica presenta una discontinuidad, un salto, resulta que para estos estudiantes, no es la representación de una función, dado que no se traza continuamente.

Por otro lado, Sierpinska considera que el conocimiento se da en forma espiral y que noes cierto que el conocimiento sea lineal y acumulativo. Para que exista conocimiento o para que se de el conocimiento, debe existir o presentarse una ruptura en la linealidad de este conocimiento, es decir, que primero recibimos la información inicial de lo que en este caso es función, posteriormente confrontamos esa definición con otro tipo de representaciones, de tal manera que necesariamente tenemos que romper con el primer acercamiento.

Para los estudiantes de Sierpinska, la función nada tiene que ver con la vida real, apropiarse del concepto de función significa entre otras cosas mirar el caracter funcional de la función, esto es, funcional en el sentido o en términos de adaptabilidad, o sea, ¡que tan funcional resulta algo? o ¡que tan útil es?

Una función resulta útil en términos de que nos da posibilidades de predicción, también como modelo matemático, nos da la posibilidad de una predicción, pero también de descripción del fenómeno.

Cuando los estudiantes expresan que la matemática nada tiene que ver con la vida real, esto lo hacen porque sólo ven a las funciones como entes matemáticos, cosas que no son palpables a simple vista, no lo alcanzan a distinguir, dado que la función tiene varias representaciones diferentes:

- Como tabla
- Como gráfica y como expresión analítica.

Por otro lado, Sierpinska dice que si el sujeto tiene la construcción de función asociada a una tabla, entonces ese sujeto no puede pasar a la construcción de función como una gráfica y como una expresión analítica, simplemente no la reconoce como función, es de esta manera que resulta un obstáculo para que el sujeto pueda hacer predicciones, ya que sólo está localizando puntos en el plano con los datos que tiene en su tabla.

Revisando la tesis de maestría de Trujillo, quien hace un trabajo didáctico sobre la función logaritmo y la función exponencial, las cuales han sido trabajadas siempre como una transformación, pues resulta mas fácil hablar de suma que de producto, es decir que se trabaja como la función inversa, una de la otra en término didáctico, esta función es una transformación pero en el origen había una relación entre la serie aritmética y la serie geométrica. Aquí, Trujillo se hace la siguiente pregunta ¿será posible hacer una construcción que recupere la relación entre ellas?, la cual lo llevó a realizar una situación didáctica que aplicó a profesores del nivle medio superior.

Por otro lado, el trabajo que Dubinsky reporta en la serie de antologías no.3, utiliza la función para ejemplificar su teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y como resultado observa que el concepto de función, que casi todo los estudiantes se encuentran en la etapa de Proceso, es decir que estos estudiantes sólo realizan algoritmia sin razonar, para apropiarse del concepto y utilizarlo como una herramienta o como objeto matemático y pasar a la siguiente etapa.

Dubinsky considera que para que los estudiantes se apropien del concepto, necesariamente deben pasar estas tres etapas, de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, ya que con eso se garantiza que el estudiante ha interiorizado o ha hecho suyo el concepto y que por lo tanto ha aprendido.

Referencias bibliográficas

Albert, A. "Introducción a la Epistemología" Serie; Antologías. No. 2, Área de Educación Superior DME. Págs. 1-28

Sierpinska, A. (1992) *"On understanding the notion of function"*. The concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA. Notes Volume 25.

Brousseau, G. (1987), "Los obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas"

Farfán, R. "El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX" *Serie: Antologías No 1*. Págs. 99-145

Farfán, R. "*Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*". Editorial Iberoamérica. México 1997.

Farfán, R. "*La Investigación en Matemática Educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior*". Relime No. 0. Pág. 6-19. 1997.

Youskevitech, A. P. *"The concept of function up the middle of the 19^{ht}* century" 1976.

Incorporación de las Situaciones Didácticas en la Formación Docente

Luz María Minguer Allec, luzma16@hotmail.com
Instituto Tecnológico de Oaxaca
México.

Nivel superior
Formación docente
Cálculo

Las instituciones de educación media superior y superior conscientes de la existencia de una problemática relacionada con el enseñar y aprender matemáticas, realizan diversas actividades académicas, que van desde organizar cursos de nivelación a los estudiantes de nuevo ingreso, pasando por los cursos de formación docente y de actualización profesional a los catedráticos, hasta hacer revisiones y modificaciones de los contenidos de los planes y programas de estudio.

El Instituto Tecnológico de Oaxaca no se ha quedado al margen en este esfuerzo, de tal forma que a la fecha se han diseñado y ofrecido diversos cursos propedéuticos dirigidos a los estudiantes de nuevo ingreso con el objeto de uniformizar su nivel académico; así mismo, de manera continua, se trabajan propuestas para optimizar los contenidos de los programas de matemáticas en la academia de ciencias básicas; en el contexto de la formación docente, múltiples y variados han sido los cursos que se han ofrecido a los profesores de todas las especialidades, así como grande ha sido el esfuerzo desarrollado por los mismos por mejorar su desempeño.

Sin embargo, cabe mencionar un hecho trascendente, todos estos esfuerzos hasta ahora realizados, se encuentran enmarcados en la propuesta de la didáctica tradicional (enfoque clásico de la didáctica), misma que se ha revelado insuficiente para hacer frente a una multitud de fenómenos inexplicados y de problemas matemáticos no resueltos y que debido a la presión de estos cuestionamientos ha tenido que evolucionar hasta encontrarse en este momento, incluyendo en su problemática, objetos que habían sido considerados como herramientas que sólo aparecían en el discurso científico normal, como útiles para describir otros objetos de investigación, a esta nueva propuesta se le conoce como la Didáctica Fundamental, y en ella está enmarcada la Matemática Educativa.

En octubre de 1996, el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV[1], ofreció a los catedráticos de nuestra institución un diplomado denominado "Introducción a la matemática educativa" al cual asistieron numerosos catedráticos de diferentes instituciones del nivel de educación medio superior y superior, a partir de ese momento se conoció la propuesta de la matemática Educativa, definida como: La disciplina que estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral R. 1995). Así mismo**, *La Teoría de las Situaciones Didácticas*** forma parte de la matemática educativa y surge de la necesidad de disponer de un modelo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas en el que se encuentren debidamente representadas todas las relaciones y las operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina; a su vez, dichas propuestas, se encuentra enmarcada en la Didáctica Fundamental y abordan esta problemática de una manera global, en ella quedan comprendidos los contenidos matemáticos, las problemáticas del profesor y del alumno, así como todo tema relacionado con el Estudio de las Matemáticas.

De tal forma, que a partir de entonces, surge la inquietud por hacer extensiva esta nueva propuesta a todos los profesores, y de que experimenten la vivencia de la puesta en escena de situaciones didácticas en un ambiente propicio de trabajo. Pensamos que para el caso de nuestros catedráticos, esta actividad constituye un recurso muy rico para ser utilizado primeramente en la formación docente y más adelante con nuestros alumnos.

[1] Centro de Investigación avanzada. Instituto Politécnico Nacional.

Por otro lado, identificamos: la existencia de una formación docente y profesional dirigida a los profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior, que no es eficaz y contundente en la solución de la problemática de la enseñanza de las matemáticas. Por lo que es necesario que los docentes lleguen en un primer tiempo, a conocer y más tarde a utilizar situaciones didácticas como un recurso para que el alumno construya su propio conocimiento.

Nos proponemos que el maestro experimente la vivencia de la puesta en escena de situaciones didácticas para que así reconozca su importancia como instrumentos valiosos para la enseñanza de las matemáticas y para su propia formación, ya que por un lado podrá utilizarlas como herramienta en la enseñanza y por otro, le permitirá la adquisición de conocimientos matemáticos, más adelante podría incursionar en el diseño de situaciones de aprendizaje.

Por tal razón nos planteamos la observación, en la puesta en escena de situaciones didácticas con los profesores, del cumplimiento de las etapas que las conforman, como son: acciones, formulaciones, validaciones y procesos de institucionalización, ya que estas etapas definen el proceso de construcción del conocimiento.

Para ello, proponemos la realización de un Curso Taller en el que la puesta en escena de situaciones didácticas y de lecturas introductorias a la matemática educativa, constituyen recursos valiosos para la formación docente, ya que se contribuye a la conformación de una cultura matemática en los profesores. Es importante señalar que la puesta en escena de situaciones didácticas en un taller vivencial, es más provechosa, porque en este ambiente de trabajo van a conocer lo que es el trabajo en equipo y la discusión grupal (modalidades de trabajo en el aula). Van también a identificar en el diseño de las situaciones didácticas, un trabajo de estructuración de saberes que está fundamentado en la Teoría de las Situaciones Didácticas, en donde, a través de la creación de un modelo general del conocimiento matemático se pretende que, saber matemáticas, no significa saber definiciones y teoremas para su aplicación en la resolución de problemas, sino que significa "que el alumno sea capaz de intervenir en la actividad matemática, es decir que, formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros." (Chevallard,1997, pág. 78)

La incorporación de las Situaciones Didácticas en la formación de profesores es importante ya que, con esto, se está trabajando en la creación de una cultura científica que ellos mismos transmitirán a sus alumnos, de tal forma que se vaya logrando la sensibilización al cambio.

La metodología empleada consistió en:

- El diseño del curso-taller denominado, “Introducción a la matemática educativa”, cuya duración fue de 30 horas en el aula, distribuidas a lo largo de una semana, y cuyo contenido fue, como punto central la puesta en escena de tres situaciones didácticas (previamente validadas a través de la aplicación por otros investigadores, a alumnos y a profesores), así como la realización de lecturas relacionadas con la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas; utilizando como modalidades de trabajo: el trabajo en equipo y la discusión grupal, y realizando audio grabaciones del trabajo en equipo durante la resolución de las secuencias y vídeo grabaciones de las discusiones grupales y de los comentarios de las lecturas realizadas.
- En el diseño de las guías de observación para el trabajo en equipo y para el trabajo grupal, se consideraron los siguientes aspectos:
    - El interés de los miembros del equipo a lo largo de la puesta en escena de las situaciones didácticas.
    - La integración de los miembros del equipo.
    - La creación de un clima de confianza en el equipo.
    - La construcción del conocimiento entre los miembros del equipo.

- El interés de los miembros del equipo a lo largo de la discusión grupal.
- El papel de la discusión grupal en el intercambio de ideas.
- En que grado la discusión grupal contribuyó a la construcción del conocimiento entre los participantes.

- En la selección de la población; Se invitó a través de las academias de cada institución a profesores del nivel medio superior y superior de educación.
- La puesta en escena: Se llevó a cabo a través de la realización del curso - taller "Introducción a la matemática educativa".
- El análisis de los resultados se llevó a cabo, identificando en los diálogos grabados durante la puesta en escena de las situaciones didácticas, las etapas de acción, formulación y validación; así como haciendo el análisis de las guías de observación del trabajo en equipo y de las discusiones grupales.

UNA VISIÓN GLOBAL DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS.

> *En el marco conceptual realizo un planteamiento de los aspectos teóricos que fundamentan este trabajo. Conocer acerca de la Teoría de las situaciones didácticas, de su evolución y de las circunstancias que acompañaron su desarrollo, nos proporciona elementos para enriquecer nuestra visión como profesores de matemáticas ya que esta evolución lleva consigo el surgimiento de nociones y conceptos relacionados con nuestra práctica docente, así como la comprensión del proceso de conformación de una nueva ciencia, como lo es la Didáctica Fundamental.*

El desarrollo de la teoría de las situaciones didácticas inicia su gestación a principios de los años 60, formula sus primeros conceptos a principios de la década de los 70 y continúa su desarrollo hasta nuestros días.

Se trata de un proceso de gestación y de conformación de la teoría de las situaciones didácticas a lo largo de casi cuatro décadas, con el surgimiento de ideas que contribuyeron al avance, permitiendo el desarrollo de nuevos conceptos; al cual fue necesario acompañar de otro proceso de adaptación y consolidación de un marco teórico referencial (origen y desarrollo de la Didáctica Fundamental), así como de la infraestructura científica para poder apoyarse en su desarrollo (centros de investigación, metodologías, investigaciones, centros de formación de maestros e investigadores, etc).

¿CÓMO SE DEFINE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA?

El punto central del presente trabajo de investigación se relaciona con la estructura de las situaciones didácticas, por lo que presentamos a continuación los componentes, las etapas, las circunstancias, las nociones y los conceptos que las constituyen. Una situación didáctica esta compuesta de una situación adidáctica (la cual a su vez, quedará definida por la selección atinada de un obstáculo epistemológico), de la definición de un ***medio***, y de los procesos de devolución y de institucionalización que implican la actividad del maestro, todo esto enmarcado en un contrato didáctico, necesario para realizar algunas partes, e innecesario (rupturas) para realizar el resto de las actividades de la situación.

Brousseau dice que el significado de una noción no puede ser dado al alumno, él debe construirlo al interior de un conjunto de problemas en donde dicha noción funcione de una manera más o menos local. Entre mas éxito se tenga en la resolución de los problemas, más sentido tendrá la noción para el alumno. De tal suerte que esta noción se convierte a la vez, en un punto de apoyo y en un obstáculo para la adquisición de conocimientos posteriores.

Por lo tanto para que exista el aprendizaje el profesor no debe revelar al alumno, lo que él planea que el alumno adquiera como conocimiento, sino, proponerle una ***situación*** que le permita la ***devolución*** del problema, en donde este conocimiento sea necesario para la obtención de una solución óptima. El alumno aprende adaptándose a un ***medio*** que es factor de dificultades y desequilibrios, si él se adapta a la ***situación*** y encuentra la solución demuestra la apropiación del conocimiento buscado.

Este dispositivo llamado ***situación adidáctica,*** es una situación específica de un conocimiento, en donde desaparece la intención de enseñar. El conocimiento buscado está completamente justificado por la lógica interna de la situación y puede ser construido sin la intervención del profesor, por el alumno, quien será capaz de ponerlo en práctica él mismo en situaciones que encontrará en la vida cotidiana o en un contexto ajeno al escolar, sin requerir de indicaciones para su aplicación o utilización. Esta situación adidáctica comprende las relaciones establecidas entre los alumnos, un medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor.

Esta situación adidáctica tiene que ser **seleccionada** a la medida del grado de conocimientos previos que los alumnos poseen, buscando apoyo en los obstáculos epistemológicos identificados para la noción que se desea que el alumno aprenda. Para la construcción de una situación adidáctica, los obstáculos epistemológicos son los más interesantes, ya que la superación de tales obstáculos por el alumno, exige un trabajo de elaboración de conocimientos que implica la construcción de su sentido o significado.

Brousseau establece que la noción de ***medio*** es esencial para la teoría de las situaciones didácticas y lo concibe como todos aquellos objetos que el alumno es capaz de manipular de manera ágil y segura sin cuestionar su naturaleza, así como todos las actividades de ayuda al estudio como son: los cursos de matemáticas, los libros de texto, etc.

Las devoluciones e institucionalizaciones son las intervenciones del maestro sobre el par ***alumno-medio,*** éstas son parte importante de las situaciones didácticas, ellas tienen el objetivo de hacer funcionar las situaciones adidácticas y los aprendizajes que éstas generan.

Decimos entonces que la situación didáctica es mucho más completa y compleja, porque requiere de la intervención constante y vigilante del profesor, en tanto que la situación adidáctica, por definición no requiere de la intervención del profesor.

> *G.Brousseau hace notar la existencia de un conjunto de paradojas en el contrato didáctico. Él dice que el contrato didáctico pone al maestro ante un ordenamiento deliberado de paradojas ya que cuanto él realiza para que el alumno produzca, tiende a privar al alumno de las condiciones necesarias a la comprensión y el aprendizaje de la noción buscada. Si el maestro expresa aquello que él desea que sus alumnos adquieran como conocimiento, él no lo podrá obtener. Así mismo él comenta que el alumno, a su turno, se encontrará ante esa misma situación, ya que si él acepta que el maestro es el que debe enseñar los resultados del problema, entonces él solo no llegará a establecerlos, por lo tanto no aprenderá matemáticas.*

Pero si por lo contrario, él se niega a recibir cualquier información del maestro entonces la relación didáctica, estará ***rota***. Por lo tanto, el alumno adquiere el significado de las nociones fuera del marco del contrato didáctico y en el curso de las rupturas provisorias y de su funcionamiento al interior de las situaciones didácticas.

Por su parte, la ***devolución de las situaciones adidácticas***, proceso muy difícil y delicado se lleva a cabo a través de la negociación continua (entre maestro y alumno) de un nuevo contrato didáctico, dicha negociación permanece generalmente implícita, y en ella, el maestro persigue que el alumno se apropie o haga suya una situación adidáctica. Todo lo que el maestro y el alumno hacen implícita o explícitamente para lograr que el alumno se apropie del conocimiento (por ejemplo: intervenir o no intervenir durante los bloqueos, cuando el alumno pregunta, sugerir otra pregunta cuya respuesta de la pauta o permita encontrar la respuesta buscada)

De manera contraria a la devolución, la institucionalización otorga un estatuto cultural a las producciones de los alumnos (actividades, lenguajes y conocimientos expresados verbalmente), al finalizar la situación didáctica. Esta institucionalización, se realiza seleccionando algunas preguntas relacionadas con el conocimiento aprendido(de las que se tiene la seguridad de que el alumno sabrá responder), mismas que serán relacionadas con otras cuestiones y saberes, contextual izando de esta forma el conocimiento matemático y confiriéndole un estatuto cultural.

Existen tres tipos de situaciones adidácticas:

a) Situación adidáctica de acción; es una situación constituida por un problema tal que, su solución optima es el conocimiento que se desea enseñar. De tal suerte que dicha situación permitirá al alumno probar diferentes soluciones, hasta llegar a la solución indicada, en cada uno de sus intentos la situación le muestra las consecuencias de su elección, a través de sanciones o de refuerzos de su acción. Se refiere a aquellos momentos en los que el alumno vive una etapa inicial de contacto con el problema matemático, cuando empieza a entenderlo, cuando intenta realizar los primeros esbozos de solución; cuando identifica y/o ejecuta a través de acciones verbales o escritas, actividades matemáticas que implican operaciones básicas que el alumno conoce y llega a realizar de manera mecánica.

b) Situación adidáctica de formulación: Para que el alumno pueda explicitar su conocimiento matemático, y para que este conocimiento adquiera un sentido para él, es necesario formularlo. Una situación adidáctica de formulación propicia para el alumno el intercambio y comunicación de información con una o varias personas que le devuelven la información, los dos interlocutores intercambian información verbal o escrita en lenguaje matemático. En esta etapa, el alumno empieza a expresar sus propias ideas; a utilizar lo que “sabe”; a reconocer la teoría; a reconocer los límites de lo que sabe; a hacer uso de su experiencia matemática; a identificar en una expresión matemática, un teorema, una definición; a reconstruir a partir de un teorema, a darle significado a lo que le dicen las nociones matemáticas, entonces el alumno está viviendo una etapa de formulación. El tipo de nociones que se utilizan en esta relación son *paramatemáticas,* lo que quiere decir que los alumnos las reconocen y utilizan como instrumentos para resolver cuestiones matemáticas, pero no como objetos de estudio en ellos mismos

c) Situación adidáctica de validación: En una situación adidáctica de validación el alumno somete el mensaje matemático como una aseveración (debe probar la exactitud y la pertinencia y proporcionar una validación verbal y una validación escrita) a un interlocutor, quien puede pedir explicaciones o rechazar las propuestas (justificando su desacuerdo), en esta etapa el alumno empieza a justificar lo que hizo y se hace preguntas acerca de si lo que realizó está bien hecho, su objetivo es que las operaciones realizadas, los procedimientos propuestos, los resultados obtenidos estén bien y sean coherentes, del mismo modo que identifica sus errores y los corrige, es el propio alumno el que valida sus conocimientos. El estatuto que tienen en clase las nociones que intervienen en una situación adidáctica de validación, sobre todo después de la institucionalización por parte del maestro, es la de nociones matemáticas (objetos de estudio en sí mismas, así como instrumentos para estudiar otros objetos).

Dos cosas son importantes de señalar: Primero que en una situación adidáctica de validación pueden encontrarse incluidas, las dialécticas de la acción y/o de la formulación; está claro también que en una dialéctica de validación está implícita una dialéctica de la formulación y en consecuencia una dialéctica de la acción. Y segundo, que a lo largo de una situación adidáctica, el orden en el que se encuentran las diferentes dialécticas de la acción, de la formulación y de la validación, es indiferente.

Es precisamente este amplio panorama teórico-metodológico, que constituye nuestro marco referencial, el que me permitió dar un significado más profundo a todos los eventos, actuaciones, actitudes y comentarios que surgieron en la puesta en escena de las situaciones didácticas seleccionadas.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Dos cosas son importantes de señalar: Primero que en una etapa de validación pueden encontrarse incluidas, las de acción y/o de formulación; está claro también que en una etapa de validación está implícita una de formulación y en consecuencia una etapa de la acción. Y segundo, que a lo largo de una situación adidáctica, el orden en el que se encuentran las diferentes etapas de acción, de formulación y validación, es indiferente. A continuación, muestro una parte del análisis de la primera puesta en escena de la situación didáctica:

INTERRELACIÓN DE LOS ASPECTOS ALGEBRAICO, NUMÉRICO Y GRÁFICO EN EL ANÁLISIS DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA (EQUIPO ITO)

Ejemplo de la identificación de las etapas de acción, formulación y validación.

DIÁLOGOS	TIPOS DE DIALÉCTICAS	JUSTIFICACIÓN
A "Bueno, entonces ¿qué valores damos?"	Acción	El alumno actúa a través de acciones verbales
B "Sólo pide cinco pares de coordenadas"	Acción	El alumno actúa a través de acciones verbales
C"Pueden ser: x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6"	Acción	El alumno actúa a través de acciones verbales
A "Bueno adelante, sustitúyele y calcula"	Acción	El alumno ejecuta a través de acciones escritas
B "Ahora, hay que proponer cinco pares de coordenadas que no pertenezcan a E"	Acción	El alumno actúa a través de acciones verbales
A "Debe tener esta tendencia, así más o menos...un poquito más arriba" (en este momento, propone la gráfica correspondiente a una relación)	Formulación	Hace explícito el reconocimiento de un concepto (que cree conocer), en este caso la gráfica de una expresión analítica que cree que es una relación
A " Nada más se le da x = -3 y esto es igual a cero"	Acción	El alumno actúa a través de acciones verbales
A "Pero es que no está hablando de puntos, aquí tienes una coordenada" (aquí corrige el texto del ejercicio, hay confusión entre punto y coordenada)	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático.
B " Pero E es el conjunto"		
A "Es el conjunto de puntos (0,1), (0,2), (0,3) etc,"		
A "Ya. (continúan con el siguiente punto del ejercicio)"		
A "¿Puntos que tengan la misma abscisa"		
A "Es reflexiva la ecuación ¿sí?"	formulación	Hace explícito un conocimiento matemático
A"Adelante"		

B “¿Otros que tengan la misma ordenada?”		
C “No, porque son positiva y negativa.” (siguen haciendo referencia a la gráfica de una relación)	Formulación	Da significado a una noción matemática
A“¿Porqué? Porque ES UNA RELACIÓN Y NO UNA FUNCIÓN, simplemente por eso.” (aquí analiza la gráfica de la relación)	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático
A “no puede tratarse de una función porque una función no puede tener dos imágenes”	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático
B“Pero la expresión $y = (x+3)\ (8 - x/2)$, eso ¿a qué es igual? (aquí se comienza a discutir con respecto a la expresión analítica)”	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático(expresión analítica correspondiente a una función)
A“¿ Cómo?, ¿ A que es igual?”		
B “Resolviendo, para mí que es una función.”	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático
A “No, NO PUEDE SER UNA FUNCIÓN, es una relación.”	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático que cree conocer.
B “¿Y si resolvemos el producto?”		
A “También, sí.”		
A “Es que UNA RELACIÓN PUEDE TENER DOS IMÁGENES, pero una función, no.”	Formulación	Hace explícito un conocimiento matemático
A “Aquí está, tienes y y tienes dos valores de x, ...ah, no, SÍ SÍ ES UNA FUNCIÓN.” (Se está refiriendo a la expresión: $y = -x^2/2 + 13x / 2 +24$)	Validación	Prueba la exactitud de su aseveración e identifica su error.
A “Aquí está,. . . . . .ES UNA RELACIÓN.” (ahora se refiere a la gráfica)	Validación	Prueba la exactitud de su aseveración, y proporciona una validación verbal
C “¿Así quedaría, resolviendo este producto?”	Acción	ejecuta operaciones aritméticas

CONCLUSIONES

A lo largo de la puesta en escena de las situaciones didácticas abordadas, los profesores vivieron las etapas de acción, formulación, y validación, en el contexto de lo que significa una situación didáctica, misma que comprende: una situación adidáctica, al alumno, al maestro, un medio determinado por los conocimientos matemáticos del alumno así como las herramientas de las cuales dispone, y un contrato didáctico entre los alumnos y el profesor. Todos estos elementos mencionados, junto con las modalidades de trabajo en equipo y la discusión grupal contribuyeron a que los profesores (alumnos), lograran:

- Llegar a establecer estrategias básicas para abordar un problema, lo cual significó la negociación entre los miembros del equipo para llegar a establecer un consenso sobre todos los aspectos abordados, practicando un estilo de trabajo que no se realiza en el aula, también practicaron el dar significado a las preguntas del problema, así como a darle significado a las nociones matemáticas, al realizar estas actividades hubo lugar para la reflexión y el análisis.

- Al seno del equipo de trabajo y en la discusión grupal, se llegaron a formular ideas en las que se hizo explícito el reconocimiento de un concepto, de un conocimiento matemático, de ideas propias fundamentadas en sus propios conocimientos, y se llegó a reconstruir una noción a partir del análisis de un teorema o una definición, así como a reconocer los límites de sus conocimientos.
- Llegaron también a probar la exactitud de sus propuestas, proporcionando una validación verbal y en algunos casos escrita, justificando lo propuesto, y al mismo tiempo haciéndose preguntas sobre sus propias afirmaciones y reconociendo sus errores, para enseguida corregirlos.
- El trabajo en equipo y la discusión grupal representaron una modalidad rica en contribuciones para la construcción de conocimientos por los profesores (alumnos).
- Del mismo modo considero que las vivencias de este curso taller, permitieron a los profesores experimentar de manera personal, los recursos de las situaciones didácticas, identificándolas, tanto como herramientas para su propia formación, como elementos didácticos para ser utilizados con sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Albert, A. 1996. ***La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico .*** Tesis doctoral. Departamento de matemática educativa. CINVESTAV-IPN. Méx. (capítulo 1,2,3)

Bousseau,G.1986*.* ***Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.*** Recherches en didactique des mathématiques, vol 7 nº 2, 33-115

Bousseau,G.1990*.* ***Le contrat didactique: le milieu.*** Recherches en didactique des mathématiques, vol 9 nº 3, 309-336.

Cantoral, R. 1990. ***Matemática educativa. Programa editorial. Serie: Antologías. No.1.*** Area de educación superior del DME-CINVESTAV-IPN. Méx.

Chevallard, I. 1997*.* ***Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.*** Edit. ICE- Horsori. Universidad de Barcelona**.**

Duady, R. 1986. *Jeux des cadres et dialéctique outil-objet*. Recherches en didactique des mathématiques, vol 7 nº 2, 5-31

Douady, R. ***Ingeniería Didáctica en educación matemática. La ingenierìa didàctica y la evolución de su relación con el conocimiento*****.** Ed. Ibero América. México DF.

Farfán, R. 1995. ***Ingeniería didáctica..*** Programa editorial. Serie: Antologías. Número 1. Área de educación superior del DME – CINVESTAV – IPN. Méx.

González, R.1999. ***La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en escena funcional de una ingeniería didáctica de resignificación***. Tesis de maestría. DME CINVESTAV-IPN

Lezama, J. 1998. ***Estudio didáctico de la función*** 2^x***.*** Tesis de maestría. DME. CINVESTAV-IPN. Méx.

Perrin-Glorian, M.1994. ***Vingt ans de didactique des mathèmatiques en France.Hommage a Guy Brousseau et G. Vergnaud. La penseè sauvage, Grenoble éditions.***

Ingeniería didáctica. Un ejemplo construido para la función 2^x

Rosa María Farfán Márquez
Marcela Ferrari , mferrari@mail.cinvestav.mx
Área de Educación Superior. D.M.E. Cinvestav-IPN
México

Nivel Superior
Cálculo

Introducción

Nuestro grupo de investigación retoma, con una visión crítica y un espíritu de confrontación, las teorías de Situaciones Didácticas y de Transposición Didáctica desarrolladas por Brousseau y Chevallard, respectivamente, las cuales dan sustento y enmarcan a la Ingeniería Didáctica. Su interés principal se enfoca al estudio y diseño de Ingenierías Didácticas para matemática de nivel superior, en busca de favorecer el desarrollo de habilidades y la adquisición de saberes por parte de los alumnos, en el ambiente áulico de nuestros días. Se considera que, para ello, es indispensable realizar estudios sistémicos del hecho educativo, es decir, observar a todos y cada uno de los actores del sistema didáctico, inmerso en una sociedad, y las relaciones que entre ellos se entablan.

Como ya mencionáramos, utilizamos Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, la cual se caracteriza fundamentalmente por que sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de situaciones didácticas; cuya validación es interna, es decir, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue, 1995). Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en su elaboración, a saber: análisis preliminar; diseño de la situación didáctica y su análisis a priori; experimentación; análisis a posteriori y validación.

Nuestras investigaciones han centrado su atención principalmente en el concepto de función y en la construcción de significados, esto mediante diseños que devuelvan al alumno el control del objeto matemático cuya apropiación se desea lograr.

En este trabajo, presentamos los resultados de varios años de investigación, alrededor de las funciones logaritmo y exponencial, centrando nuestro informe del diseño de la ingeniería didáctica para la función 2^x en su análisis preliminar, y en los estudios y exploraciones derivadas de la misma.

Análisis preliminar

Componente didáctica:

La importancia que se le ha conferido a la noción de función en la matemática actual, se ve reflejada en su presencia dentro de la currícula, tanto de nivel medio superior como superior. Para Farfán (1992), entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar en la escuela, se encuentran las diversas concepciones y las múltiples representaciones de ésta, potenciadas por el hecho que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático. Considera además, que en el discurso matemático escolar aquellos elementos que permitieron la génesis de los conocimientos, aquellos que consolidaron su construcción y transmisión, tales como la

Esta ponencia forma parte de investigaciones enmarcadas en el proyecto, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.
U.N.S.L, Argentina

visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, la analogía, la inducción entre otros, están ausentes en la didáctica actual. Nuestro interés, por tanto, es estudiar en particular, las funciones exponencial y logarítmica con intención de caracterizar la manera en que viven al seno de la escuela, las dificultades que se perciben en su apropiación y su devenir en objeto de saber enseñable. Para ello, se requiere indagar sobre su inclusión en la currícula y en los libros de texto.

La enseñanza de los logaritmos se enfoca principalmente hacia la resolución de problemas aritméticos que involucran multiplicación, división, potenciación y radicación. Así mismo, se deja de lado su estudio como función, al igual que el de la exponencial, observándose que no se aborda, en la escuela, la esencia de estas nociones. Además, su tratamiento como función aparece en el cuarto semestre, dentro del tema derivadas de funciones trascendentales, sin dar cuenta del significado de estas funciones ni de su construcción. Efectivamente, en una primera instancia los logaritmos aparecen en la currícula del bachillerato, en México, enfocados a problemas aritméticos sin dar cuenta de los elementos que permiten la construcción de la función logaritmo. Por otro lado, en cuarto semestre, se le necesita como una función de la cual sólo se conoce su gráfica y no se repara en su construcción, por tanto, los alumnos logran derivar sin conocer dicha función y aunque deriven muchas veces y varias funciones logarítmicas, el concepto de esta función no se construye.

A su vez, el tratamiento de las funciones logarítmica y exponencial en los libros de texto, no soluciona esta problemática, es decir, no zanja la brecha entre el aspecto aritmético con que se la presenta, desde el inicio de su enseñanza, y su uso como función. Trujillo, analiza varios libros de texto que son utilizados en el nivel medio superior. Entre ellos, "Álgebra elemental" de Baldor; "Álgebra (intermedia)" de Lovaglia; "Álgebra y trigonometría" de Barnett, "Aritmética y álgebra", "Cálculo diferencial" ambos de Garza Olvera; y "Álgebra" de Rees Spark. Luego de su revisión, comenta que ninguno de estos libros aborda el aspecto numérico, es decir, ninguno da cuenta de cómo, a partir de ciertos elementos matemáticos, se construye la función logaritmo. En general, la presentan como la inversa de la función exponencial, justificándola a partir de una tabla, producto de la tabulación de la función exponencial, para luego ser utilizada como un concepto axiomático en aplicaciones como puede observarse en los libros que contienen problemas de población de bacterias, interés compuesto, etc. Por otro lado, en libros de Cálculo, tales como Spivak, Finney, Swokowski, entre otros, el enfoque es distinto. En ellos, se presenta la función logaritmo como la primitiva de la función $1/x$, definiendo a la función exponencial como su inversa. En libros de autores rusos, como Kudriávtsev, Bugrov, encontramos que la función exponencial es construida punto a punto utilizando la idea que todo número real es una sucesión de números racionales, o la de supremo, siendo éstas nociones propias del análisis matemático.

Cobra importancia entonces, realizar un estudio de corte epistemológico de los logaritmos y exponenciales, con el fin de determinar aquellos mecanismos y elementos matemáticos que, en el devenir de su enseñanza, han sido suprimidos reduciendo el abordaje de este tema a un conjunto de axiomas. Trujillo (1995) señala que los contenidos de estudio marcan dos facetas independientes en la enseñanza de los logaritmos, la parte aritmética, que consiste en la aplicación de sus propiedades para simplificar operaciones, y la parte de su uso como función, centrándose la atención en su representación analítica y dejando de lado su construcción geométrica.

En general, por ser el logaritmo y la exponencial, funciones inversas entre sí, sólo se requiere definir una de las mismas, pues la definición de la otra surge de esta relación. Esto trae aparejado que una de ellas adopte un papel intermediario. Adquiere importancia entonces la construcción de una de las dos, es decir, generar estrategias que establezcan la relación entre pares de números, su ubicación en el plano coordenado, etc., y es justamente en esta dirección hacia la que se orienta nuestro diseño.

Componente epistemológica:

Las dificultades que se presentan, tanto en la apropiación de la noción de función en general, como de logaritmo y exponencial en particular, pueden dotarse de significado indagando sobre la génesis de tales conceptos, y en su devenir en objetos de saber a ser enseñados; a la vez que explorando las concepciones de los profesores, y su epistemología, pues conocer ambas vertientes, puede aportar datos para comprender los obstáculos que se perciben en los estudiantes.

La génesis del concepto de función es una de las más interesantes de rastrear en la historia, y muchas son las opiniones vertidas al respecto. Este concepto comienza a gestarse en la antigüedad, aseveración amparada por tablas confeccionadas por los babilonios (2000 años A. C.) en las cuales encontramos correspondencias entre cantidades, aunque no pueda considerarse que, en esta época, se tuviera conciencia de tal noción. En la Edad Media en cambio, se cuenta ya con ideas mas acabadas al respecto, con representaciones gráficas y verbales, en tanto que sus expresiones analíticas aparecen recién en el siglo XVII gracias a los aportes de Vieta y Descartes entre otros. La definición que manejamos hoy en día, es atribuida a Dirichlet, por algunos, y a Lobachevski por otros, en el siglo XIX, y para llegar a ella se necesitó el aporte y las discusiones de muchos matemáticos, destacándose entre ellos los Bernoulli y Euler, cuya concepción de función y continuidad aparece frecuentemente entre los estudiantes.

Dando una hojeada a la historia, encontramos que los logaritmos y las exponenciales han estado estrechamente vinculados, desde sus albores como nociones matemáticas, surgidas a principios del siglo XVII. En el caso de los logaritmos, de la mano de Napier, para facilitar los cálculos necesarios para el desarrollo del comercio, la astronomía y la navegación. Es así, que el desarrollo histórico de la construcción de las funciones logaritmo y exponencial, ha estado plagado de discusiones y argumentos dispares, donde las nociones de número y de exponentes fueron centrales en las mismas.

Para comprender el proceso que diera lugar a la consolidación de estas nociones como objetos matemáticos, nos apoyamos en el trabajo de (Cantoral et al., 1983) y en la tesis de (Lezama, 1999).

De la revisión de tal material se infiere que las relaciones entre las series aritmética y geométrica se encuentra desde el origen de estos conceptos. En efecto, Napier definió y construyó sus tablas a partir de un exhaustivo estudio de relaciones entre las series geométrica y aritmética asociadas, ideando un modelo que le permitiera “hacer continua su tabla” utilizando los valores discretos que el proceso anterior le proporcionaba. Podemos considerar además, que estos conceptos surgen en el contexto aritmético pero con auxilio del geométrico y del físico para establecer significados. La noción de “base” requiere más tiempo para su construcción y no surge dentro de la teoría de Napier tal como la conocemos hoy en día. Sin embargo, en la necesidad de extender la tabla construida con valores aislados hacia una continua, podemos percibir el primer acercamiento a la noción de “función logaritmo”.

El sustento teórico de los logaritmos fue ampliado durante el siglo XVII gracias a la representación gráfica en coordenadas rectangulares y polares, de una variable, lo cual abre camino hacia su comprensión. Aparecen entonces, la curva logarítmica, la espiral logarítmica y la llamada hipérbola, la cual es especialmente importante en la historia de los logaritmos. Es St. Vicent, en 1647, quien logra establecer que “*si las paralelas de una asíntota son trazadas entre la hipérbola y la otra asíntota, de tal forma que las áreas sucesivas de los cuadriláteros mixtilíneos así formados sean iguales, entonces las longitudes de tales paralelas forman una progresión geométrica”* (Cantoral et al., 1993). Por otro lado, observamos que la gráfica de la función logaritmo no fue producto de la tabulación de sus valores, sino tema de múltiples exploraciones.

Así mismo, Descartes introduce el simbolismo moderno para potencias de números mediante una notación que es aceptada rápidamente por matemáticos de la época, como

Wallis y Newton quienes la extienden utilizando exponentes enteros positivos, negativos y fraccionarios. Sin embargo*, "la teoría de los exponentes que involucra valores positivos, negativos y fraccionarios es explicada y usada en el Analyse demontrée de C. Reyneau, París 1708. La unión de los conceptos de exponencial y logaritmo tuvo lugar hasta el siglo XVIII".* (Cantoral et al., 1993).

La controversia respecto a aplicar el concepto de logaritmo a números negativos y complejos aparece en los siglos XVII y XVIII, época en la cual la extensión de las propiedades conocidas para determinado conjunto de números a otro, era hecha de manera natural. Lo endeble de las concepciones que los matemáticos de esta época manejaban respecto a los números negativos y complejos generó controversias entre personajes de la talla de Bernoulli y Leibnitz, respecto al significado de calcular su logaritmo, las cuales quedaron plasmadas en la correspondencia mantenida por ambos.

El trabajo de Sotto (1988) rescata estas discusiones y las pone a consideración de un grupo de profesores mediante una serie de deducciones extraídas de las mismas. Su manuscrito es un claro ejemplo de la importancia de conocer el devenir en objeto de saber de cierta noción pues el mismo se repite y se percibe en las discusiones de los profesores. Vemos entonces que, rastrear la génesis de las nociones en la historia, nos arrojan luz sobre los sucesos del aula, así como también el estudio de las producciones de los alumnos y profesores nos pueden permitir comprender mejor su devenir histórico.

Sierpinska (1993), en un estudio sobre las dificultades para la comprensión del concepto de función, distingue varios obstáculos epistemológicos, tres de los cuales, a nuestro criterio, sustentan la problemática de la enseñanza de estas nociones: la falta de relación entre la matemática y los problemas prácticos; la concepción de función, estableciendo que una definición no determina un objeto, sino al contrario; y las tablas como representación de funciones.

Componente cognitiva:

Esta componente nos exige acercarnos a las concepciones que poseen los alumnos respecto al concepto de función, de número, de funciones logaritmo y exponencial, de representaciones de una función.

De la exploración realizada por Trujillo (1995), surge que las concepciones y las dificultades de los profesores y estudiantes coinciden con la forma en que son presentados al seno de la escuela. Pueden construir la gráfica desde lo aritmético, pero no aparece la relación funcional, lo cual es un índice de la compartamentalización de los saberes. Además, en los estudiantes se encontraron concepciones arraigadas fuertemente en lo aritmético, percibiéndose la existencia de cierta intuición de "función" en las progresiones, pero la carencia de una liga entre lo aritmético y lo gráfico.

Lezama (1999), por su parte, reporta la exploración llevada a cabo, mediante un cuestionario, con el fin de tener un primer acercamiento a las concepciones de los estudiantes respecto a la función 2^x. Se le aplicó a alumnos de bachillerato y licenciatura, obteniéndose los siguientes resultados:

- 2^x es una operación sólo para los enteros, ya que la interpretan como multiplicar 2 por sí mismo "*x* veces".
- Cuando $x < 0$, no hay una interpretación uniforme para 2^x, como lo demuestran respuestas como: $2^{-3} = 0.002$; $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$; $2^{-3} = 1/2^3$
- Si x no es entero, 2^x es solamente una notación, por ejemplo $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Por otro lado, 2^{π} es un número que no se puede calcular ya que carecen de un algoritmo para hacerlo y sólo pueden obtener una aproximación con auxilio de la calculadora.

Inferencias del análisis preliminar:

Del análisis preliminar realizado en sus tres componentes, podemos inferir que existe una ruptura entre el carácter aritmético y funcional de los logaritmos, el cual se encuentra en la génesis del mismo y por tanto se establece una brecha entre ambas concepciones que los libros de texto no abordan. En cuanto a la función exponencial, se presentan dificultades al elevar números a distintas potencias, cada tipo de número es un desafío y en ocasiones de difícil interpretación. Por ejemplo, $f(x)=2^x$ depende de *x,* así, $f(0)=2^0$; $f(1)=2^1$; son números reconocibles por los alumnos, en tanto que $f(\pi)=2^\pi$ no lo es.

En general, existen conflictos en identificar la naturaleza y estructura de las funciones logaritmo y exponencial. Además, se las presenta como una inversa de la otra, lo cual causa que no sean percibidas como funciones por sí mismas. Adquiere sentido entonces, enfocar el diseño a que el alumno construya significados para una de estas funciones, en nuestro caso para la exponencial, favoreciendo la ejecución de acciones tales que, partiendo de consideraciones geométricas y localización de puntos en el plano cartesiano, identificando dificultades y regularidades, construyendo tablas se propicie la generalización.

Situación didáctica de referencia:

Con estas ideas, se diseñó una situación cuyo objetivo fue:

- Proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función 2^x, así como analizar regularidades propias de la función.
- Confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando *x* es entero.
- Este trabajo fue presentado en Relme XI (ver Aguilar et al., 1997) y permite hallar puntos de la forma $(a, 2^a)$ con $a = p/2^q$, mediante construcciones geométricas de segmentos.

Nuestro objetivo aquí, no es discutir sobre los resultados obtenidos en las puestas en escena de tal situación, sino presentar las distintas inquietudes que han surgido a partir de las mismas y que hoy conforman un nutrido conjunto de investigaciones.

Investigaciones derivadas:

Del análisis a posteriori y de las observaciones realizadas en las producciones y discusiones de los alumnos, obtenidas en varias puestas en escena de la situación reportada en "Un estudio didáctico para la función 2^x (Aguilar et al., 1997)". Podemos mencionar, entre otras, que la actividad permitió a los estudiantes:

- Romper la idea que 2^x sólo tiene sentido cuando *x* es un número entero.
- Manipular el número $2^{1/2}$, ya que obtuvieron geométricamente segmentos de longitud $2^{1/2}$, utilizándolo para hallar el segmento de longitud $2^{1/4}$ y ubicando, en el plano coordenado, los puntos correspondientes.
- Reconocer la naturaleza creciente de 2^x.

Así mismo, en algunos grupos surgió la pregunta: ¿cómo hallar $2^{1/3}$ con estos procedimientos?. Se generó, entonces, una discusión sobre la generalización hacia a^x, pues varios estudiantes afirmaron que las regularidades percibidas para 2 seguirían cumpliéndose para cualquier número *a.* Se argumentó sobre la imposibilidad de graficar números cuya base fuera negativa y su exponente de la forma $1/2^n$, por tratarse de números complejos.

Estas preguntas dieron lugar a dos nuevas exploraciones. Una de ellas tuvo por objetivo indagar sobre las concepciones que los estudiantes poseen alrededor del significado de $(-2)^{1/2}$, obteniéndose interesantes resultados. Del análisis de las producciones de los alumnos, luego de la puesta en escena de una situación diseñada con tal propósito en alumnos de tercer y quinto semestre, se infiere que: algunos estudiantes al enfrentarse a este nuevo objeto matemático, lo interpretan como un número que no existe, representándolo como un símbolo sin poder justificarlo. Algunos recuerdan haberlo estudiado, pero desconocen su significado, lo cual de pauta de la influencia del discurso matemático escolar. Los resultados y discusiones entre los entrevistados reproduce en cierto sentido, el intercambio de opiniones mantenida entre matemáticos del siglo XVIII y que diera inicio a la caracterización de estos objetos matemáticos, reafirmando la hipótesis de la importancia de conocer el devenir histórico de un concepto a la hora de introducirlo al ámbito escolar (Sánchez, 1999).

El objetivo de la segunda, en cambio, fue explorar la posibilidad de extender la construcción de la función 2^x, es decir, avanzar en la construcción de una Ingeniería Didáctica que le permita al estudiante construir la noción de función exponencial en situación escolar. Se tomó para ello, como punto de partida, la situación reportada en (Aguilar,1998), y (Lezama, J., 1999), en donde se utilizan procedimientos geométricos para la construcción de la función 2^x.

Características de la situación

Se retomó, para el diseño de la situación, la pregunta ¿cómo hallar $2^{1/3}$ con estos procedimientos? generada por varios grupos de estudiantes durante la resolución de la situación de referencia. Este diseño, por tanto, retoma la idea de aproximación geométrica de un número atendiendo a elementos geométricos y gráficos requeridos en las actividades de localización de puntos en un sistema de coordenadas rectangulares trabajados por los estudiantes con anterioridad.

Se utiliza para ello la idea de densidad de los números de la forma $p/2^q$, proponiendo una aproximación geométrica, mediante la división de segmentos en dos partes iguales.

Análisis a priori:

Se considera que los estudiantes establecerán una aproximación para evaluar la función 2x, cuando x es un número arbitrario, asociándola con longitudes de segmentos.

Presentación del diseño:

El diseño se compone de ocho actividades, divididas en cinco bloques:

- **Bloque 1**: Motivación de la situación.
  Mediante la pregunta: "*¿Será posible construir un segmento de longitud* $2^{1/3}$ *con el método que utilizaste en la situación de partida? Explica ampliamente"* se espera que el estudiante, el cuál ya ha resuelto la situación de partida, reflexione sobre la imposibilidad de la construcción de un segmento de longitud $2^{1/3}$ utilizando los procedimientos geométricos con que fuera provisto.
- **Bloque 2:** Fase preliminar (fase de acción de la situación)
  Las actividades se concentran en construir la aproximación del segmento de longitud 1/3. Se proporciona para ello, el procedimiento geométrico para bisectar segmentos, cuestionándose sobre el significado numérico de tal actividad.
- **Bloque 3:** Fase de trabajo sobre el dominio (fase de acción y formulación)
  Se pide el llenado de una tabla en donde se incluyan las acotaciones de 1/3 encontradas en la actividad anterior, y otras tales como *p/32; p/64;* y *p/128*. Además se pregunta sobre la factibilidad de seguir encontrando números de esta forma, mayores y menores de 1/3.
- **Bloque 4:** Fase de trabajo sobre las imágenes (fase de acción y formulación).
  Se pide graficar, en un sistema cartesiano, los puntos $\left(x,2^x\right)$ donde *x* corresponde a los números que se determinaron en las actividades anteriores, así como también, el llenado de una tabla en donde se incluyan las acotaciones de $2^{1/3}$ ya encontradas. Además se les pregunta sobre la factibilidad de seguir encontrando números mayores y menores de $2^{1/3}$.
- **Bloque 5**: Fase de generalización. (fase de acción, formulación y validación)

Mediante la pregunta: "*¿Cómo harías para evaluar la función* 2^x *cuando* $x = \pi$ *?*" se espera que los estudiantes reflexionen sobre la posibilidad de realizar el mismo procedimiento al utilizado en el caso de x=1/3.

La puesta en escena

Hasta el momento ha sido llevada a escena con tres estudiantes que cursan el último año universitario, a los que, como actividad preliminar, se les pidió resolver la situación utilizada en (Lezama J., 1999), para después aplicar esta situación.

Algunos de los resultados obtenidos

- La idea de densidad de números de la forma $r=p/2^q$ surgió implícitamente para "encerrar" a 1/3, y así determinar este número sobre el eje *x,* al momento de graficar 2^x.
- Los estudiantes analizaron lo que ocurría a derecha e izquierda de 1/3, identificando un patrón que les permitió crear una única sucesión para aproximarse a 1/3, argumentándolo tanto aritmética como geométricamente
- Se generó la idea de la factibilidad de la construcción de 2^x para todo número *x* mediante la noción de número real como una aproximación, ya que se establecieron argumentos que explicitaban que 1/3 era sólo un caso particular para la construcción propuesta. Sin embargo, la naturaleza de la secuencia de actividades propició la aparición del obstáculo del infinito potencial, ya que en la misma no se propone construir un segmento de longitud $2^{1/3}$.

A manera de conclusión

- Planteamos como hipótesis que esta situación, aplicada a estudiantes que no "conocen" la gráfica de la exponencial, propiciará la aparición del obstáculo del infinito potencial.
  Queda abierta la pregunta ¿Cómo superar este obstáculo?

Otra de las investigaciones que están siendo desarrolladas en este momento proviene también de los resultados de la situación de referencia, lo que permitió detectar que la respuesta más frecuente para 2^0, es 0, y que la mayoría de los alumnos carece de argumentos al respecto. Por ello, nuestro grupo de investigación está llevando a cabo distintas exploraciones alrededor las concepciones que docentes y alumnos poseen respecto a 2^0, y reflexionando sobre las convenciones matemáticas y como éstas viven al seno de la escuela, además de llamar la atención sobre la ausencia de explicación teórica para ellas en la matemática escolar.

Otras exploraciones, en cambio, centran su atención en el fenómeno de la reproducibilidad de las situaciones didácticas, recabando información experimental mediante la implementación de esta situación (Lezama, 1999).

Hasta aquí hemos dado una visión de los trabajos que están siendo abordados por nuestro grupo de investigación, todos ellos surgidos de distintos interrogantes hallados al implementar la situación que propone construir la función 2^x.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J.; Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Rosa Ma. Farfán (Ed.), *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. 19-23, Morelia, Michoacán, México.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Gómez, P. (ed.). Una empresa docente, Grupo editorial Iberoamérica. México.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Hitt, F., Rigo, M. (1983). *Historia de los conceptos logaritmo y exponencial.* Seción de Matemática Educativa del Cinvestav -IPN

Farfán, R. M., (1992). ¿Matemática Educativa en el nivel superior?. Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe. *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (Cantoral, Farfán e Imaz editores). México. Vol 2, 236-253

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav- IPN. México.

Sanchez Gomez, M. T. (1999). *Exploración de concepciones de los estudiantes: el caso de las raíces cuadradas de números negativos.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Sierpinska, A. (1993). On Understanding the Notion of Funtion. En *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Harel & Dubinsky (Eds.). MAA Notes Vol 25. Pp 25-59*.*

Trujillo, R. (1995)*Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico.* Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México.

Intervención de los modos de pensamiento Sintético-analítico con relación al Concepto de Solución en Sistemas de Ecuaciones Lineales

Juan Guadarrama Méndez
jguadarr@mail.cinvestav.mx
Cinvestav - IPN.
México.

Superior, Álgebra Lineal

Resumen

En un trabajo presentado por el autor, identificamos a través del reconocimiento de características gráficas comunes, determinadas por un criterio que proporciona una clasificación y organización de las situaciones gráficas elaboradas como parte de los resultados obtenidos en trabajos recientes relacionados con los modos de pensamiento de Sierpinska (1996) se observa además la existencia de ciertas concepciones al momento de trabajar con el concepto de solución en el Álgebra Lineal. En ese sentido el objetivo del presente trabajo es mostrar que la identificación mencionada permite la determinación del desarrollo de una cierta permanencia en el pensamiento del sujeto, referida a las representaciones gráficas asociadas a la solución en sistemas de Ecuaciones Lineales. Pero también el análisis de esta determinación de permanencia sugiere señalar que es el eje central que acciona y organiza la creación de una base de significados, por lo que en este trabajo se presentan evidencias de cómo se establecen las relaciones entre los modos de pensamiento sintético y analítico a través de las dificultades que experimentan en su tránsito de uno a otro, así como del indicar la coexistencia de los mismos al momento de trabajar con el concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales bajo representaciones gráficas asociadas, en dos y tres dimensiones es decir en el plano y en el espacio.

Es de referenciar como parte de estas evidencias, que se les presentaron dificultades al momento de responder en el modo sintético-geométrico, ubicando sus argumentos, razonamientos y respuestas preferentemente en el modo analítico-aritmético, pues se remitieron al momento de dar sus respuestas en el segundo modo de pensamiento en vez del primero, lo cual evidencia que hay una preferencia en la utilización y desarrollo del discurso matemático escolar en un modo de pensamiento que en los otros, el cual creemos privilegia como forma de aceptación social y por tanto muestra del trabajo escolar también la preferencia en una cierta practica educativa "correcta", en el uso y empleo de este modo preferenciado, a saber: en el modo analítico-aritmético, dejando para otro momento la incorporación de manera explícita o través de actividades, u otras acciones del uso de los otros modos de pensamiento o a que las representaciones empleadas, apelen el uso explícito de los otros modos de pensamiento que aportan y complementan la riqueza en la conceptualización del concepto de solución.

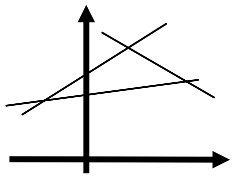
Introducción

Tomando como punto de partida que en Guadarrama J. (1999), "Modos de Pensamiento Sintético y Analítico en el Álgebra Lineal: Caso, la solución de un sistema de ecuaciones lineales", se identifica a partir de analizar ciertas representaciones gráficas que proporcionan entrevistados y que además reportan los trabajos de tesinas (Barrera J, Cano O, Cervantes J.(1998); Eslava M, Villegas M.(1998); Marines J, Monroy A.(1998)). Observamos la existencia de una característica gráfica común a ellos, que se obtuvo como parte de este análisis en dicho trabajo mencionado inicialmente. En la que podemos observar que esta característica común identifica, organiza y clasifica las distintas situaciones gráficas que nos proporcionaron tanto las entrevistas como las tesinas.

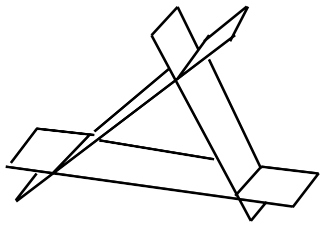
Ahora bien esta necesidad de identificación surge en tanto que nos permite observar y explicar cómo es que se desarrolla lo que hemos encontrado a través del desarrollo de un cierto estado de permanencia en el pensamiento de los sujetos de análisis, el cual dota de elementos intervinientes en la creación de las concepciones que los sujetos elaboran al momento de estar trabajando en el área del álgebra lineal y concretamente de la solución en sistemas de ecuaciones lineales.

En ese sentido este estado de permanencia permite explicar y dar respuestas a preguntas del porqué los docentes por ejemplo ante las representaciones gráficas como:

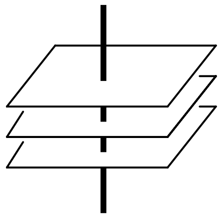
Situación en el espacio y el plano



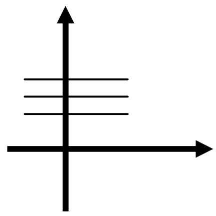
o



O bien entre las situaciones



o



Ellos consideran que son representaciones gráficas de situaciones de solución o no solución y esto es debido a que desarrollan estados de permanencia alrededor de las nociones matemáticas correspondientes al concepto de solución, en ese sentido lo que persigue este trabajo es evidenciar la construcción de bases de significación mediante el desarrollo del estado de permanencia del pensamiento que muestran los sujetos que están insertos en el Sistema Didáctico que interesa estudiar. Lo anterior es posible de señalar debido a la intervención de los modos de pensamiento sintético y analítico al momento de trabajar con respecto al concepto en cuestión.

Organización de las Categorías que Centran Nuestro Interés.

Las ideas que subyacen a partir de lo anterior, consisten en que el criterio que determinamos considera algo que es común y que observamos en estas representaciones que establecieron con relación al concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales por lo que, la organización de las representaciones gráficas de las respuestas en las entrevistas, con estudiantes y docentes que hemos mencionado, lleva implícito el reconocimiento de una característica previamente determinada y que a continuación mencionamos.

El criterio de clasificación y organización, se hizo en base a un criterio que obedece a las características gráficas implícitas en las mismas representaciones, el cual, tiene un sentido metafórico de los estados de permanencia que el sujeto desarrolla, Farfán (1999).

En ese sentido, el estado de permanencia se empleo para hacer la caracterización y organización de las representaciones gráficas de respuesta de las entrevistas y también nos sirve para dar una explicación coherente con respecto a los resultados de entrevistas aplicadas con profesores del nivel de educación superior recientemente realizadas Guadarrama J (1999).

En ellas tanto los alumnos como en los profesores se registra, la necesidad de búsqueda y asignación de significación que el sujeto le da a la solución, en ese sentido para ellos su estado de permanencia indica que, si lo que “le ha funcionado” en su conceptualización de los objetos matemáticos como es el caso del concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales entonces le funciona, sobre todo cuando miramos sus representaciones gráficas, asociadas al concepto, en ese sentido podemos decir que esa búsqueda se ancla en que *algo tiene que estarse intersectando*.

Como pueden ser estas las diferentes intersecciones que se dan las que hemos denominado aquí como categorías las cuales al agruparlas de acuerdo a características que explicamos las identificamos como las categorías generales.

Los casos considerados que se experimentan en el sistema didáctico a saber: En este desglose hecho con las situaciones gráficas de intersección del plano y del espacio, que *se establecen entre las representaciones gráficas de ambas categorías generales coincidencias con relación a las formas que sé intersectan*, mostrando estas coincidencias de que existe algo en común en la conceptualización errónea de lo que es solución y particularmente respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. De ahí que se rescatan esas coincidencias con base a un criterio mas general para ambas dimensiones que nos permite, evidenciar los estados de permanencia que estamos interesados en mostrar o probar. A saber: A) intersectando con respecto a una recta vertical el cual puede coincidir con un eje en un sistema de coordenadas. B) Tanto en el plano como en el espacio la intersección dos a dos en el plano coincide en cierta estructura con la de las representaciones del espacio. La situación coincidente seria la intersección dos a dos de los objetos (planos o rectas), son solución. C) Una tercera categoría en el plano y en el espacio; se tienen dos paralelos y un transversal, en ese sentido la intersección es solución. D) Finalmente una cuarta categoría que no hay su equivalente en el plano; la intersección de tres planos nos da una recta, la intersección se considera como solución.

Para lo anterior nos planteamos la elaboración Como Hipótesis de Trabajo: *El que los sujetos desarrollan ciertos estados de permanencia en el pensamiento por una necesidad de búsqueda y significado que le dan al concepto de solución.*

En ese sentido si lo que les ha funcionado en su conceptualización que hace de los objetos geométricos a diferencia de los objetos analíticos es que tengan una persistencia visual con algo que tiene que estarse intersectando como pueden ser estos rectas, planos. De ahí que todo aquello que represente o sea representado sobre la base de que algo tiene que estarse intersectando fuere la noción de solución que permanecerá a lo largo de sus visualizaciones y representaciones gráficas que establezca con respecto a este concepto y por consiguiente lo integrará como parte de sus experiencias de vida de ahí el estado de permanencia, pues permanece a lo largo del tiempo y en todo aquello que tenga que ver con sus vivencias.

Por lo que su identificación con las situaciones que intersectan serán para ellos las situaciones de solución mientras que las situaciones de no-intersección serán identificadas y caracterizadas que no representan los casos de solución a saber los denominaran de no-solución.

Retomamos para esto como marco teórico a Sierpinska A (1996), el cual es apropiado y adecuado respecto a lo investigado y para responder a las conjeturas así como de las interrogantes e hipótesis de trabajo que nos formulamos.

Marco Teórico del Trabajo.

Empezamos diciendo que en la evolución de las matemáticas, se presentaron de manera secuencial tres modos de pensamiento: Sintético - Geométrico, Analítico - Aritmético y Analítico - Estructural, sin que la aparición de alguno de ellos eliminara a su antecesor. El álgebra lineal, siendo una rama de las matemáticas, no quedó exenta de tales modos de pensamiento, y hasta la fecha se sabe que estos coexisten dentro de las mentes de las personas. Sin embargo, no es conveniente considerar a los modos de pensamiento mencionados como: "... estados en la evolución del pensamiento algebraico,...es preferible verlos como modos de pensamiento que son igualmente utilizados, cada uno dentro de su propio contexto y para propósitos específicos, y principalmente cuando ellos están en interacción..." Sierpinska (1996).

Ahora, la diferencia entre los modos de pensamiento analítico - aritmético y analítico-estructural, es que en el primero, un objeto está definido por una fórmula que permite calcularlo, y muchos razonamientos analíticos-aritméticos tienen una tendencia de mostrar que dos procesos conducen al mismo resultado; por otro lado, en el modo de pensamiento analítico-estructural, los objetos están mejor definidos por un conjunto de propiedades.

Pensando en términos de matrices singulares y no-singulares podría ser un síntoma del modo analítico-estructural." Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal usa un sistema específico de representaciones. El modo de pensamiento sintético-geométrico usa el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.

En el modo analítico-aritmético las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de m-ecuaciones con n-incógnitas o desigualdades. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores, son importantes. Así por ejemplo, un sistema general de ecuaciones no podría ser escrito usando todos sus coeficientes

El pensamiento analítico-estructural va más allá pues, sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Los modos de pensamiento sintético-geométrico y estructural, son ambos visuales, aunque en formas muy distintas. Sierpinska (1996), "*No debe creerse que el pensamiento sintético necesariamente tiene que ser geométrico, sino más bien es necesariamente intuitivo, aunque sí se relaciona con la geometría por ser esta de carácter intuitivo".*

Muy inducido visualmente, el estudiante tuvo que luchar para hacer su pensamiento más analítico: pensar en una línea como un conjunto de puntos, y en puntos como arreglos de números, y entender que contar el número de soluciones significa contar punto o tales arreglos de números. El estudiante ve a la línea como " un punto en particular". Sierpinska (1996).

Metodología Abordada en el Trabajo.

La investigación realizada se desarrollo sobre la base de una entrevista, partiendo de una descripción verbal e implementando simultáneamente las representaciones gráficas, asociadas al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, en dos y tres dimensiones esto con el objetivo de recabar un conjunto de datos e información con respeto a lo propuesto en los objetivos del trabajo y que refieren a información respecto a las concepciones erróneas que conforman los sujetos de estudio que en nuestro caso son de un grupo de docentes del sistema de educación superior, con relación al concepto de solución sobre todo visto en los modos de pensamiento sintético-analítico. *La Entrevista como Instrumento de Investigación.* Ahora bien puesto que "La entrevista es una conversación generalmente oral entre dos seres humanos en la cual tiene alguna finalidad y que dependiendo de la finalidad es el carácter de la entrevista". En ese sentido siendo más específicos con respecto a la caracterización y circunstancias de la entrevista podemos decir que fue de entrevista dirigida, este a su vez la podemos ubicar con mucho mas precisión en lo que se a dado en denominar en el ambiente metodológico de entrevista focalizada. Se elaboro una *Guía de la Entrevista*, el cual fuese también el *Diseño de* ella *para profesores del nivel de Educación Superior*, Donde se dieron Indicaciones para la Realización como: Desarrolla de manera personal las actividades que a continuación se enuncian.

El Contexto de la Entrevista.

Las sesiones de entrevista se realizaron en una Institución de Educación Superior que forma parte de un subsistema, llamado sistema de educación tecnológica del sistema de educación superior por tanto correspondencia con el sistema que queremos estudiar. El horario comprendido de entrevista fue de tres hrs., Para la primera sesión de tres entrevistas y para la segunda sesión de las otras tres entrevistas fue de tres horas y media. Es decir dividimos las sesiones de entrevista en dos días, esto para no provocar cansancio en la espera de entrevista entre uno y otro de los profesores. *Características generales de los entrevistados, relevantes para la investigación.* 1º Los seis entrevistados son docentes de la mismo instituto. 2º Todos ellos han dado cursos de matemáticas y particularmente en la institución. 3º De los seis docentes, cinco han dado el curso de álgebra lineal en algún momento. 4º De los seis entrevistados, cinco pertenecen al mismo departamento y uno al de Metalmecánica. La formación de los docentes es ingeniería, distribuyéndose de la manera siguiente: 3 ingenieros industrial electricista, 1 ingeniero químico, 1 ingeniero mecánico, y 1 declaro ser catedrático. De los seis docentes entrevistados 2 manifestaron haber realizado estudios de maestría, no especificaron si obtuvieron el grado o si tienen estudios parciales, uno de ellos esta actualmente estudiando maestría y los otros tres tiene estudios a nivel licenciatura.

Resultados a Partir de las Observaciones Generales.

Resultado Fundamental. Por lo aquí obtenido se señala que este estado de permanencia que metafóricamente lo indicamos que si les funciona lo aplican es considerado como todo aquello que se intersecta es solución, no importando si esta intersección es un punto, una recta, un plano pues se observa a partir del resultado de las entrevistas que lo produce que, en nuestro caso, corresponde a que a partir de las representaciones gráficas que miran es que establecen esa noción de solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Puesto que se observo que todos ellos apelaron a su estado de permanencia desarrollados en ellos y que corresponde como ya decíamos líneas mas arriba de que si funciona lo utilizan y en este sentido le dan significado al concepto de solución “gráfica": de ahí que su manera de idear el concepto tomando como referente, que todo aquello que intersecta representa la solución, por lo que si no muestra que intersecta esta situación los casos de paralelismo tendrá que ser considerada que no tiene esta solución.

Esto los llevo en nuestro caso de los entrevistados a que algunos lo extendieran de manera lineal sobre todo cuando se enfrentaron con las representaciones gráficas elaboradas en tres dimensiones, pues en el plano no les causo las mismas dificultades. Al realizar las sesiones de entrevista se observó de manera general que la cantidad de dibujos les fue extensa, aun a pesar de que algunos manifestaron estar bien que se les haya presentado los dibujos, por lo que consideramos que se puede hacer una selección mejor de ellos para futuros trabajos en esta dirección (algunas situaciones fueron repetitivas, tanto dibujos como situaciones para ellos, caso de paralelismos entre rectas y algunos casos paralelos de planos, dos paralelos y uno transversal).

La selección y el diseño de los dibujos empleados en las entrevistas, pretendió identificar o registrar las concepciones erróneas que establecen los sujetos del sistema didáctico, con relación al concepto de solución en sistemas de ecuaciones lineales, tanto en el plano como en el espacio, pero a partir de inscribirlos e insertarlos en el modo de pensamiento sintético-geométrico y que a partir de esta contextualización de representación geométrica dieran respuesta ya fuese en este modo o en los otros, esto para analizar sus dificultades en el transito de un modo en otro, que por cierto ocurrió, que se les presentaron dificultades al momento de responder en el modo sintético-geométrico, ubicándose sus argumentaciones, razonamientos y respuestas preferentemente en el modo analítico-aritmético, pues no remitieron en el modo analítico-estructural, lo cual evidencia y que sospechábamos a través de los trabajos referidos, que en efecto hay una preferencia en la utilización y desarrollo del discurso matemático escolar en un modo de pensamiento que en otros, el cual privilegia como forma de aceptación social y por tanto muestra también de una cierta practica educativa "correcta", en el uso y empleo de este modo preferenciado a saber, en el modo analítico-aritmético, dejando de lado la incorporación de manera explícita a través de actividades, u otras acciones el uso de los otros modos de pensamiento o que las representaciones empleadas, apelen el uso explícito de los otros modos de pensamiento que aportan y complementan riqueza en la conceptualización del concepto.

Referencias bibliográficas

Barrera, J., Cano, O., Cervantes, J. (1998). "Coexistencia del Pensamiento Sintético y Analítico del Concepto de Solución en un Sistema de Tres Ecuaciones Lineales con Tres Variables". Tesina de Especialidad. UEAH, México.

Eslava, M., Villegas, M. (1998). "Análisis de los Modos de Pensar Sintético y Analítico en la Representación de las Categorías de Tres Rectas en el Plano". Tesina de Especialidad. UEAH, México.

Guadarrama, J. (1999), "Modos de pensamiento Sintético y Analítico en el Álgebra Lineal: Caso, la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales", Memorias de la IV Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas ESFM, Julio del 999, México.

Marines, J., Monroy, A. (1998). "Dificultades en la Transición del Pensamiento Sintético y Analítico en Sistemas de Tres Ecuaciones Lineales con Tres Variables". Tesina de Especialidad. UAEH. México.

Sierpinska, A. (1996). "Synthetic and Analytic Modes of Thinking in Linear Algebra". Para ser publicado en BACOMET4, Editores Kilpatrick J, Hoyles C., Skousmore O. "Meaning and Communication".

La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo.

Francisco Cordero Osorio, fcordero@mail.cinvestav.mx
Enrique Jaime Martínez Capistrán, emartinez@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN
México

La epistemología de la periodicidad que se pone en juego en el estudio, consiste de dos aspectos. El primero es acerca de que el alumno al construir el concepto de periodicidad, desarrolla un procedimiento para el contexto continuo y otro para el contexto discreto, y que ambos procedimientos son necesarios para construir el concepto de periodicidad, y el segundo, consiste en considerar que el comportamiento periódico es una componente crucial para construir el concepto. Se presenta un avance del estudio a través de un estudio exploratorio que indica una relación puesta en marcha por los estudiantes en la situación diseñada: la propiedad de periodicidad como la generalidad del concepto y el comportamiento periódico como argumento contextual.

Introducción

Una de las problemáticas que atiende la matemática educativa, es la enseñanza de los conceptos matemáticos, pues los estudiantes no pueden adquirirlos directamente, a pesar de ser dados en forma explícita. Existen diferentes perspectivas teóricas que tratan de dar explicaciones al respecto. Por ejemplo, la teoría de las construcciones mentales postulan que los estudiantes necesariamente establecen relaciones entre los procesos y los objetos que entran en juego para construir cierto concepto matemático. Así, dentro de este marco las dificultades son explicadas en términos de niveles de construcciones que reflejan tales relaciones. Algunos fenómenos de enseñanza señalan que hay conceptos matemáticos escolares que sólo son entendidos en un nivel de proceso, y para tener un aceptable entendimiento escolar del concepto se requiere un nivel de objeto.

El concepto de periodicidad es uno de los conceptos, que llega a ser entendido a nivel proceso, como lo señala Shama (1998), teniendo como consecuencia relacionar fenómenos no periódicos como periódicos y tener cierta preferencia por identificar periodos de un fenómeno periódico no necesariamente en forma correcta, sin embargo el concepto que surge de nuestra practica social (la vida diaria), y de la enseñanza de tópicos relacionados a la periodicidad tienen influencia directa en como es entendido el concepto. En ese sentido, el estudio que se presenta en esta ocasión consiste en diseñar una situación de tal forma que el alumno logre pasar de su concepción proceso a la de objeto del concepto de periodicidad, en los contextos discreto y continuo.

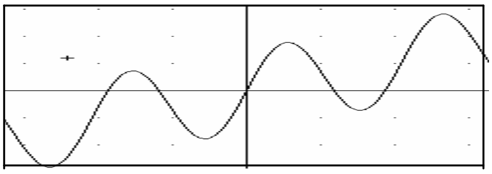
Para estudiar la comprensión del concepto de periodicidad del alumno se pretende realizar un diseño de una situación, en donde se consideren los dos contextos, de tal forma que la situación cree la necesidad al alumno para que haga acciones con los procesos, después los encapsule y logre alcanzar el nivel de objeto del concepto de periodicidad.

La epistemología que se está formulando en el estudio consiste de dos aspectos. El primero es acerca de que el alumno al construir el concepto de periodicidad, desarrolla un procedimiento para el contexto continuo y otro para el contexto discreto, y que ambos procedimientos son necesarios para construir el concepto de periodicidad, y el segundo, consiste en considerar que el *comportamiento periódico* es una componente crucial para construir el concepto. El diseño de la situación estará basado en esta epistemología.

En esta ocasión se presenta un avance del proyecto de investigación, el cual consiste en un estudio exploratorio enfocado, sólo al contexto continuo de la periodicidad. En particular se toma a la función seno con la intención de entender cuándo el alumno requiere de la periodicidad de esa función. Para tal propósito, se le pide que describa la función seno, luego, se le pide realice transformaciones a la función seno para enfrentarlo a una contradicción, en donde logre reconocer y distinguir propiedades y características de la periodicidad que le permitan superar la contradicción para que dé su propia definición de periodicidad y por último enfrentarlo a distinguir fenómenos periódicos de los no periódicos para conocer la argumentación de su definición.

Problemática

En la revisión de la literatura, se ha encontrado pocos trabajos relacionados con el concepto de periodicidad. Esto puede significar que es un tema nuevo de investigación dentro de la matemática educativa. Sin embargo como señalamos anteriormente encontramos un artículo relacionado a tal concepto (Shama, 1998). En éste se estudia el entendimiento del concepto de periodicidad con estudiantes de 3º a 12º grado. Se analiza el concepto imagen y el concepto definición de la periodicidad, en donde aparece la dependencia del tiempo y el movimiento en las respuestas de los estudiantes. Tal hecho, es tomado como la evidencia de que los estudiantes entienden la periodicidad como un proceso, cuya consecuencia es la aparición de errores al identificar ciertos fenómenos no periódicos como periódicos. Por ejemplo, establecer funciones periódicas a partir de un punto hacia la derecha, fenómenos que sigue un patrón, fenómenos que son periódicos en el sentido ilustrado pero no en el sentido matemático, fenómenos que están compuestos de una parte repetitiva mezclada con partes arbitrarias. Un ejemplo de los que ilustra Shama es el siguiente:



En esta representación que no es periódica, los alumnos la señalan como periódica. Su definición refleja entendimientos como proceso: "la línea repite lo mismo", "la figura continua siendo igual", "este segmento se repite por sí mismo". En éste ejemplo, podemos notar cómo el alumno se fija en un patrón de repetición, en el ciclo de la función, en la forma de la gráfica, que lo conducen a calificar la representación como periódica.

Otras características que surgen para entender la periodicidad como proceso, es la preferencia que tienen los estudiantes para identificar (no necesariamente en forma correcta) periodos de un fenómeno periódico, de acuerdo a ciertas características, entre ellas, es la de identificar la longitud de un periodo entre puntos extremos (máximos o mínimos), ceros o puntos discontinuos de una función. Además de tener preferencia por identificar el periodo en los extremos (izquierda o derecha) de una representación de un fenómeno periódico y la concepción de que los extremos de un periodo son idénticos.

La vida diaria y la enseñanza tienen influencia directa en como los estudiantes entienden el concepto de periodicidad. De acuerdo a las observaciones en las lecciones matemáticas y no matemáticas, relacionados al concepto de periodicidad los profesores siempre dan ejemplos de procedimientos periódicos que conducen a la periodicidad, como por ejemplo la fracción 1/3=0.3333. Esto muestra que el concepto es dado a los estudiantes y a pesar de ser dado éste no puede ser comprendido.

Marco Teórico. Una epistemología de periodicidad y la teoría APOE

La formulación epistemológica que se mencionó en las secciones anteriores es tomada como base para analizar las relaciones entre los procesos y objetos que deberán entrar en juego en la construcción de periodicidad. El marco teórico que se considera para la investigación es el de la teoría APOE de Dubinsky, la cual señala que un individuo realiza construcciones mentales esta aprendiendo un concepto, tales como: acción, proceso, objeto y esquema. Además, se ocupará la metodología llamada, el ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión en clase, y ejercicios).

Preguntas de investigación

Con el diseño de situaciones se pretende dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los procedimientos encontrados en ambos contextos que nos permiten la transformación del proceso al objeto del concepto de periodicidad?

- ¿Qué papel juega el comportamiento periódico, como categoría, para entender la periodicidad?

Estudio exploratorio

La dificultad que se tiene para contar con una fuente de objetos físicos que se puedan manipular en el nivel universitario, se convierte necesario construir objetos nuevos, no físicos pero si mentales, y manipularlos con el propósito de construir las ideas matemáticas (Dubinsky, 1996). Para nuestro estudio hemos elegido un medio tecnológico a través del uso de calculadoras que permite al estudiante visualizar las gráficas de funciones periódicas, observar los cambios que sufre está al realizar transformaciones al variar ciertos parámetros y así pueda reconocer propiedades características y relaciones de la periodicidad.

La investigación ha iniciado con la aplicación de una situación. Se han recolectado datos y se cuenta con un análisis preliminar que provee de indicadores para un rediseño de la situación, de tal forma que el alumno logre pasar de su concepción de proceso a la concepción de objeto del concepto de periodicidad. Esta situación se aplicó a estudiantes de la maestría en matemática educativa.

Algunos datos

Algunos datos que se han considerado importantes en este estudio exploratorio son los siguientes (véase Anexo):

- Los estudiantes para describir a la función seno utilizaron ciertas caracterizaciones como: oscilatorio, rango, repetitivo, periódica, amplitud, repetición del comportamiento, acotada superiormente e inferiormente, corta al eje en infinidad de veces, continua, tiene máximos y mínimos, función trigonométrica, raíces infinitas, dominio en todos los reales, la imagen en cada periodo con las mismas características.
- En general todos los alumnos reconocen las transformaciones $Y= A \sin(B x + C) + D$ de la función seno cuando varían los coeficientes *A,B,C,D.* En las respuestas reconocen que bajo las variaciones de los coeficientes de $Y = A \sin (x + C) + D$ el periodo permanece invariable y con la variación del coeficiente B, $Y = \sin(Bx)$, notan el cambio de la transformación del periodo del seno, y lo describen coherentemente.

Las respuestas que dan los estudiantes de las preguntas *1,2,3,4,6,* son similares pero vale la pena hacer un análisis de la definición que dan de comportamiento periódico y como esto influye en las respuestas cuando reconocen algunas gráficas de funciones, para ello describimos las respuestas de algunos estudiantes de las preguntas *5,7 y 8* de la situación.

Estudiante 1

Pregunta	Respuesta
5	Es la cualidad o comportamiento que tienen algunas funciones, que al observar su gráfica, esta se repite por intervalos
7	7.a Periódica, 7.b Periódica

Estudiante 2

Pregunta	Respuesta
5	Un comportamiento periódico de una función es el que tiene “movimientos” repetitivos en su gráfica que corresponden a un patrón de comportamiento
7	7.a Periódica 7.b Periódica

En los estudiantes 1 y 2 notamos que su respuesta de comportamiento periódico se refleja al reconocer las gráficas de las funciones como periódicas, pues ellos sólo se fijan en el comportamiento de la gráfica que se repite, siguiendo un patrón.

Estudiante 3

Pregunta	Respuesta
5	Una función tiene un comportamiento periódico si existe un *k* tal que *f(a)* = *f(a+k)* para todo *a* en *R*
8	Y_4, No es periódica pues queda indefinida en intervalos

En el estudiante 3 sus repuestas y sus argumentos son coherentes en el contexto de la actividad, pero cuando responde Y_4, no la reconoce como periódica, en él notamos que a pesar de llegar a establecer una definición matemática de periodicidad, no logra la construcción mental de objeto de periodicidad.

Estudiante 4

Pregunta	Respuesta
5	Una función se dice periódica si el comportamiento de la gráfica se repite en ciertos intervalos de su dominio y sobre todo al repetirse el comportamiento mantenga su imagen, es decir, mantenga su amplitud
7	7.c Periódica

En la respuesta del estudiante 4 notamos que el “comportamiento” y “mantener una imagen” se debe repetir, sin embargo este comportamiento puede tener su periodo variable, esto refleja como su definición lo lleva a identificar 7.c como periódica.

- Para los estudiantes el comportamiento periódico es lo mismo que la propiedad periódica, esto no les permite comprender el concepto de la periodicidad.
- Algunos alumnos llegan a construir una definición de comportamiento periódico, en una coherencia contextual, sin embargo, ellos no logran la concepción de objeto del concepto de la periodicidad.

Comentarios finales

Los datos del estudio exploratorio, de alguna manera, son indicadores de los entendimientos de periodicidad que tiene los estudiantes de la función seno. Parece ser que en los tratamientos de los estudiantes se ponen a debate dos aspectos: la identificación de la propiedad periódica y el comportamiento periódico. Cabe señalar que la propiedad periódica es en sí, la definición de periodicidad, en cambio, el comportamiento periódico es el argumento de periodicidad que se confronta con la nueva situación. La propiedad intenta ser independiente del contexto, mientras que el comportamiento es dependiente del contexto de la situación. En ese sentido, la propiedad representa la generalidad y el comportamiento la coherencia local, y sobre de éste descansa el argumento para enfrentarse a nuevas situaciones. La relación entonces debe ser considerada para robustecer la epistemología formulada con anterioridad.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (1998). *“Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática”*. En F Cordero (Ed.) Programa Editorial. Serie: Antologías No. 3 pp 1-45. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Dubinsky, E (1998). *“Una década de Investigación en Educación Matemática sobre algunos temas de Matemáticas Avanzadas”*. En E. Dubinsky (Ed.) Programa Editorial. Serie: Antologías No. 3 pp 223-247. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Dubinsky, E. (1996). “*Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria*”. En. E. Dubinsky (Ed.) Educación Matemática. Vol. 8. Pp. 25-46

Levi, E. (1989). *"Fenómenos Periódicos"* En Levi, E. El Agua Según la Ciencia (Ed.) Ediciones Castel Mexicana, S.A. (CONACYT). pp

Shama, G: "*Understanding Periodicity as a Process With a Gestalt Structure*", En. G. Shama. Educacional Studies in Mathematics, Vol 35, 255-181.

Wenzelburger G. "*Ambientes gráficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en matemáticas*" En Wenzelburger. G. E. Educación Matemática, Vol 3, No 2, Agosto 1991. Pp 66-79

White, E., " *Movimiento circular " y "Vibraciones y Ondas"* En White E. Física Descriptiva, (Ed) Reverte Ediciones S.A. de C.V.1997, pp. 64-71 y pp 159-166.

Anexo

Situación: periodicidad en el contexto continuo

1.a Explicar el comportamiento de la función $f(x) = sin\ x$, que se muestra en la *figura 1*.

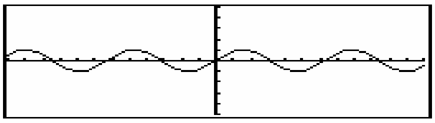


Figura 1.a

1.b La siguiente secuencia de gráficas muestra transformaciones de la función seno, multiplicándola por una constante A, $Y_1 = A\ sin\ x$. Discutir el comportamiento de cada una de ellas.

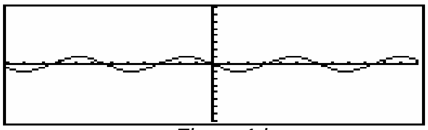


Figura 1.b

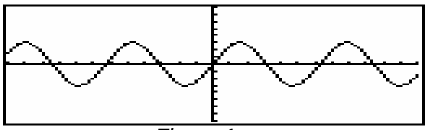


Figura 1.c

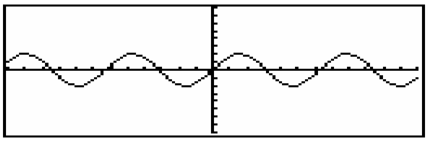


Figura 1.d

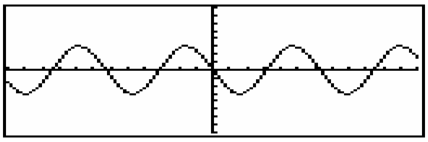


Figura 1.e

2. La siguiente secuencia de gráficas muestra la transformación de la función seno, cuando se le suma una constante D, $Y = sin\ x + D$. Describir el comportamiento de cada una de las funciones.

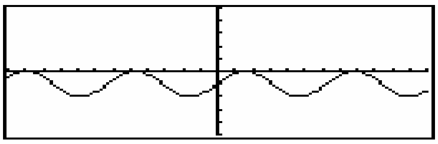


Figura 2.a

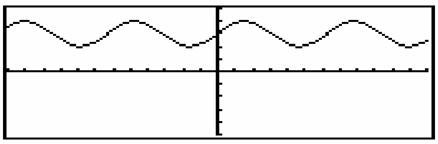


Figura 2.b

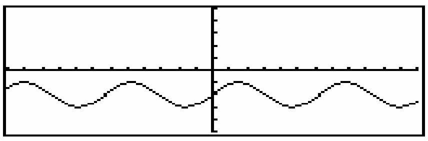


Figura 2.c

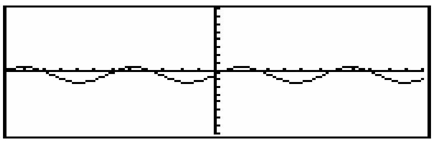


Figura 2.d

3. Realizar una secuencia de gráficas variando el coeficiente *C* de la función *Y = sin (x+C),* de tal forma que *C* tome los valores de –1, *-3, 4, 2*. Describir el comportamiento de cada una de las funciones.

4. a Realizar una secuencia de gráficas variando el coeficiente *B* de la función *Y = sin (B x),* (donde *B* tome valores positivos y negativos, incluyendo números entre *–1* y *1*). Describir el comportamiento de cada una de las funciones.

4.b Discutir ampliamente el comportamiento de la función f (x) = sin x y la función Y =sin(Bx)

5. Escribir una definición de comportamiento periódico de una función

6. Considerar la función Y = A sin (B x + C) + D, ¿ Es periódica la función?

7. En cada una de las gráficas siguientes, determinar si representa un comportamiento periódico de una función.

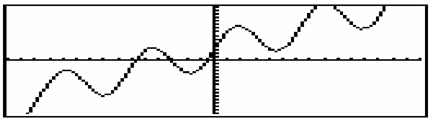


Figura 7.a

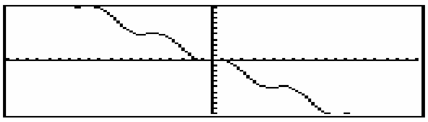


Figura 7.b

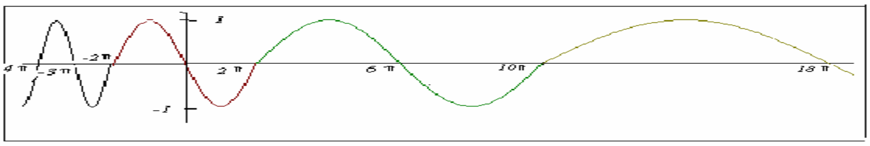


Figura 7.c

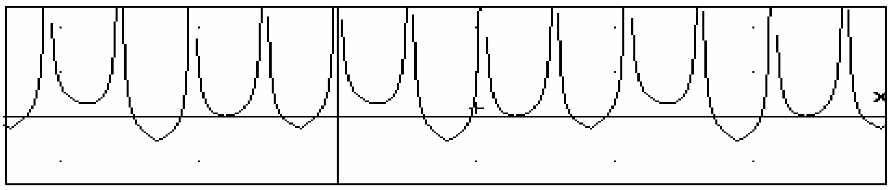


Figura 7.d

8. - Determinar si las siguientes funciones son periódicas

$Y_1 = [\sin x]^2$

$Y_2 = [\tan x]^2$

$Y_3 = 3 \sin (5x) + \cos (5x)$

$Y_4 = [\tan x]^{(1/2)}$

$Y_5 = \sin (x^{(1/2)})$

$Y_6 = \sin (x^2)$

La Escala como factor fundamental para construir la expresión algebraica. El caso de la recta.

Alma Alicia Benítez Pérez
"Wilfrido Massieu"-IPN. Cinvestav-IPN
México

Media, Álgebra

Introducción

El presente artículo muestra el estudio de la construcción de la expresión algebraica a partir de su gráfica y el efecto que tiene la escala. La construcción de la expresión algebraica a partir de la representación gráfica es una actividad poco socorrida en la curricula, ya que implica analizar de manera integral el contenido que encierra la representación gráfica. Lo que se traduce en identificar las variables visuales que componen a esta representación (Duval, 1994). Al respecto, el trabajo que ha desarrollado Duval permite la interpretación global de dichas variables visuales, a través de tratamientos cualitativos, logrando la identificación de valores visuales para cada una de las variables visuales. Dichos valores están conectados con los valores categóricos (Duval,1994) que posee la representación algebraica. Esta óptica permite interpretar el contenido de la representación gráfica de forma global, para luego interpretar el contenido de la representación algebraica y poder establecer sus conexiones.

Sin embargo, la identificación de los valores visuales no es suficiente para Construir su Expresión Algebraica. Requiriendo para ello otro tipo de tratamiento que permita analizar las variables visuales desde el enfoque numérico, sin descuidar el aspecto global de la representación gráfica. Este tratamiento es el llamado cuantitativo, a través del cual se identifican los valores numéricos para las variables visuales. Dichos valores numéricos son también identificados en la representación numérica y algebraica.

La identificación de los valores numéricos permite trabajar de manera simultanea con al menos dos representaciones, así como emplear herramientas que permitan explorar nuevas estrategias para analizar el contenido de la representación gráfica, favoreciendo la actividad de construir su expresión algebraica.

En otras palabras, la construcción de la expresión algebraica, esta estrechamente vinculada con el papel que desempeñan las Escalas, para identificar tanto los valores visuales como los valores numéricos. Ya que el cambio de escala, altera la aprehensión global de las variables visuales y por lo tanto la identificación de estos valores, repercutiendo en construcciones erróneas para la expresión algebraica.

El presente trabajo explora las estrategias que el alumno aplica, para interpretar globalmente las variables visuales a través de identificar los valores numéricos que le permitan construir su expresión algebraica, ante situaciones que presentan cambio de escala.

El trabajo se ha dividido en tres secciones, en las cuales se muestran de manera general el procedimiento seguido para llevar a cabo el estudio. En la primera sección se presenta la metodología que fue aplicada. La segunda sección referente a la discusión, describe la forma en que se llevó a cabo la experiencia. Y finalmente la tercera sección menciona resultados preliminares de la exploración.

Metodología

El presente trabajo impulsa el análisis del contenido de la representación gráfica desde la óptica de la interpretación global de las variables visuales, a través de tratamientos cualitativo y cuantitativo, con la finalidad de que el estudiante explore su contenido, y analice la influencia que ejerce la escala para construir su expresión algebraica.

La interpretación global de las variables visuales basadas en tratamientos cualitativos y cuantitativos, permiten la identificación de valores visuales y numéricos respectivamente. Esto posibilita por un lado la interpretación del contenido de la representación gráfica y algebraica, y por otro, permite la construcción de construir la expresión algebraica para dicha gráfica.

Al respecto, la escala es un factor determinante para interpretar las variables visuales, pues su cambio altera dramáticamente la aprehensión global de dichas variables, alteraciones que repercuten en los valores visuales y numéricos.

En este sentido la escala adquiere un papel determinante para interpretar el contenido de la representación gráfica, así como para la construcción de la expresión algebraica. Ya que los cambios que experimenta la gráfica debido a la escala son de orden figural, es decir modifica la figura forma (Duval, 1994), alterando la aprehensión global de las variables visuales. Esto deriva en cambios para identificar los valores visuales y numéricos, originando dos situaciones. La primera relacionada con los cambios que experimenta la figura forma para una misma gráfica (figura 1).

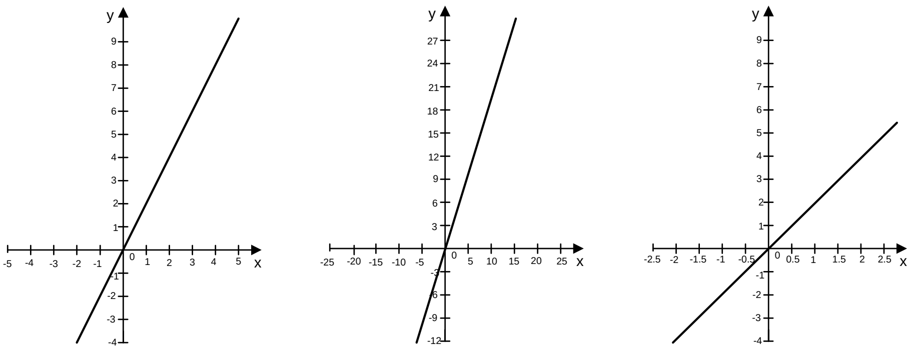


Figura 1. Diferentes escalas misma recta

La segunda situación referida a la presentación de la misma figura forma para diferentes gráficas (figura 2).

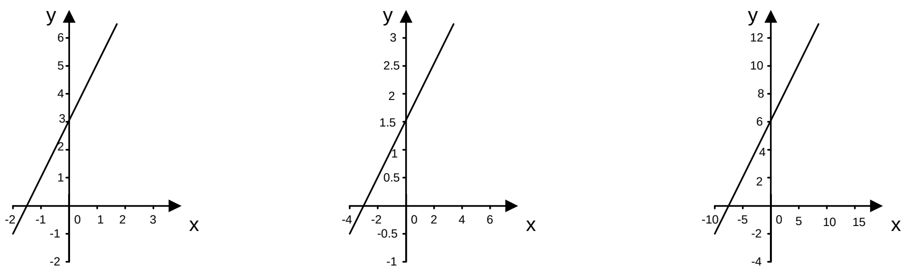


Figura 2. Diferentes escalas diferentes rectas.

Ambas situaciones afectan los tratamientos cualitativo y cuantitativo de la representación gráfica y por lo tanto la construcción de su expresión algebraica.

Duval (1994) ha mencionado la influencia que posee la escala para interpretar las variables visuales, considerando suficiente para su correcta interpretación el anclaje de los valores visuales de la gráfica, apoyados en tratamientos cualitativos. Siendo suficiente la identificación de estos valores para interpretar las variables visuales

Por otro lado, para identificar los valores numéricos debido a la influencia de las escalas, es importante continuar analizando la gráfica de forma global, ya que su análisis beneficia para determinar los elementos que alteran a los valores numéricos, a través del tratamiento cuantitativo. Tratamiento que puede ser aplicado tanto para la representación gráfica como para la representación numérica.

Discusión

La experiencia se realizó con 55 alumnos del primer semestre de bachillerato (nivel medio superior), cuyas edades fluctuaban entre 15 y 17 años, y cursaban la materia de álgebra. El estudio fue desarrollado a lo largo del semestre.

La secuencia de actividades para explorar el contenido de la representación gráfica a partir de la interpretación global, se componen de cinco actividades, considerando una función específica (recta) y evidenciándola a través de diversas situaciones. La primera actividad explora la interpretación de las variables visuales a través de identificar sus valores visuales empleando tratamiento cualitativo. En la segunda actividad se relacionan los valores visuales de la gráfica con los valores categóricos de la expresión algebraica (Duval, 1994). La tercera actividad involucra el aspecto numérico de la representación gráfica, es decir el tratamiento cuantitativo, en la cual se identifican los valores numéricos de las variables visuales, donde participa de manera activa la representación numérica. La cuarta actividad involucra la participación de las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para relacionar los valores numéricos de las variables visuales. Y finalmente la quinta actividad presenta la influencia de la escala para determinar los valores numéricos en las tres representaciones (gráfica, numérica y algebraica) y poder construir la expresión algebraica.

A continuación se presenta una muestra de las actividades aplicadas a los estudiantes (figura 3).

Las rectas **l, m** y **p** están expuestas a continuación

a) Determina si las rectas tienen o no las mismas expresiones algebraicas. Argumenta tus afirmaciones
b) De acuerdo con tu respuesta, construye su o sus expresiones algebraicas

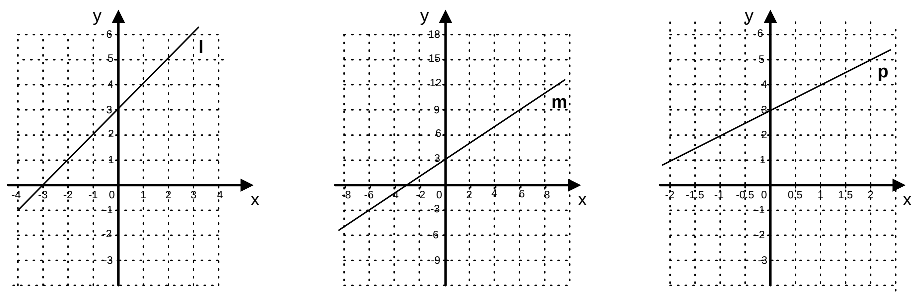


Figura 3. Muestra de actividad exploratoria

Resultados Preliminares

Para la recolección de datos los estudiantes fueron sometidos a la secuencia de actividades, enfrentándose a tareas específicas para resolver problemas. Y mediante entrevistas con los estudiantes estaremos obteniendo información, analizada a través del modelo de la Representación centrada en la función de Objetivación (Duval, 1995). Cuando este trabajo sea presentado, se tendrán ya algunos resultados que ofrecer.

Referencias bibliográficas

Duval R. (1994). *Les Représentations Graphiques: Fonctionnement et Conditions de leur Apprentissages.* C.I.E.A.E.M., Toulouse, France. Pp.3-14.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine,*. Bern: Peter Lang. S.A.

Duval R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt and M. Santos (Ed.). Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Pp. 3-26.

La Maduración para el Aprendizaje de la Matemática

Alejandro Muñoz Diosdado, amunoz@acei.upibi.ipn.mx
UPIBI, Instituto Politécnico Nacional
Araceli Arce Viveros
Universidad Pedagógica Nacional
México

Nivel superior
Funciones básicas para el aprendizaje

Resumen

Un problema importante en las escuelas de Ingeniería en México es que muchos alumnos que llegan al nivel superior no tienen los conocimientos necesarios para acceder a ese nivel, sobre todo en Matemáticas. En este trabajo se propone que el problema debe de enfocarse como una falta de maduración de los estudiantes, los cuales no tienen desarrolladas las funciones básicas para el aprendizaje escolar: la psicomotricidad, la percepción, el lenguaje y las funciones cognitivas. Se sugiere que los principales problemas del fracaso escolar en Matemáticas se refieren a la ausencia de habilidades relacionadas con las funciones cognitivas. Se realizaron varios estudios para diagnosticar el tipo de problemas de maduración que se presentan con alumnos de los cursos de Matemáticas de los primeros semestres de las carreras de Ingeniería, de los cuales se describe un estudio de caso realizado con alumnos de un curso de Estadística, en el cual se verificó el grado de maduración de los alumnos en la actividad de clasificar o de agrupar, la cual es una manifestación esencial del pensamiento lógico matemático. A partir de las observaciones realizadas se observaron grados de maduración diferentes en los alumnos y se detectaron alumnos cuya problemática de maduración se remonta a varios niveles de educación anteriores. Se propone como trabajo futuro elaborar y validar una serie de pruebas que permitan de una forma óptima valorar el grado de maduración de los alumnos y elaborar planes de maduración para los alumnos con deficiencias sobre todo en las funciones cognitivas, que son las más importantes para el aprendizaje de las Matemáticas. En este trabajo deberán de participar en forma interdisciplinaria profesionales de varias disciplinas.

Introducción

En las escuelas de Ingeniería de México es común que los profesores afirmen que los alumnos de nuevo ingreso no tienen los conocimientos adecuados para afrontar con éxito los estudios de nivel licenciatura. Esta opinión la transmiten al nivel anterior (preparatoria o bachillerato) los cuales a su vez se quejan del nivel anterior y así sucesivamente. Parece ser un factor común que cuando el alumno arriba a un nuevo nivel, el profesor observa en él la falta de ciertos conocimientos o conductas que debería de haber adquirido en el nivel precedente. Lo más grave es que estas carencias son acumulativas, por lo que existen alumnos que han podido llegar al nivel superior pero que tienen una serie de carencias que hacen prácticamente imposible su incorporación plena a los cursos.

En Matemáticas esto es más relevante, porque usualmente en el nivel superior de México los mayores índices de reprobación son en asignaturas de Matemáticas o estrechamente relacionadas con ella, como es el caso de la Física. Es frecuente que el alumno deserte por no poder aprobar tales asignaturas. Lógicamente, tanto los profesores como las instituciones han realizado esfuerzos muy importantes para evitar esta deserción. Sin embargo, usualmente es imposible recuperar a un gran número de estudiantes y a los profesores les parece que hay alumnos que aparentemente son irrecuperables. Pero, ¿porqué son irrecuperables?. Si no se consideran aquellos problemas de tipo económico que impiden que el alumno pueda continuar sus estudios, o problemas como el cambio de residencia o alguna enfermedad grave; al profesor le parece observar en el alumno cierta imposibilidad para afrontar las actividades de tipo remedial o propedéutico que se le ofrecen. Lo que proponemos en este trabajo es que el alumno, al alcanzar un nivel de estudios debería haber alcanzado un grado de maduración adecuado más que tener un conjunto de conocimientos.

La maduración para el aprendizaje escolar

El concepto que usaremos en este trabajo acerca de la madurez para el aprendizaje escolar se refiere a “la posibilidad de que el estudiante, en el momento de ingreso a un sistema o nivel escolar, posea un nivel de desarrollo físico, psíquico y social que le permita enfrentar adecuadamente esa situación escolar y sus exigencias” (Condemarín, Chadwick y Milicic, 1989). Se puede definir también el concepto de madurez para el aprendizaje escolar como “la capacidad que aparece en el estudiante de apropiarse de los valores culturales tradicionales junto con otros estudiantes de su misma edad, mediante un trabajo sistemático y metódico”. (Remplein, 1966).

Debe aceptarse que la madurez se construye poco a poco, y es resultado de la interacción de factores internos y externos. Por ejemplo, la madurez anatómica y fisiológica del alumno se obtiene en la medida que le sean proporcionadas las condiciones nutricionales, afectivas y de estimulación indispensables. La maduración se refiere a que las funciones básicas para el aprendizaje escolar: psicomotricidad, percepción, lenguaje y funciones cognitivas (pensamiento) estén desarrolladas al nivel que deberían estar. Tal como mostramos a lo largo de este trabajo, los alumnos de nivel superior efectivamente tienen problemas de maduración, muchas veces son problemas de fácil solución, que el profesor puede detectar y resolver si existe la cooperación del alumno (el profesor jamás podrá resolver tales problemas por muy ligeros que sean sino cuenta con la participación responsable del estudiante) (Richard, 1999). No obstante, otras veces se observan problemas de maduración de tal magnitud que pareciera que se originaron desde el Jardín de Niños.

En todo caso, más que hablar del fracaso del estudiante se debería hablar del fracaso de la institución (Carraher, Carraher y Schliemann, 1991). No hubo la suficiente atención para que el alumno madurara y a nadie le preocupó que al pasar de un nivel a otro, digamos de primaria a secundaria, el alumno tuviera el grado de maduración suficiente. En México hay poco interés en las escuelas (sobre todo públicas) en el tema de maduración. Esto no quiere decir que no se aborden algunos aspectos y que no se resuelvan algunos otros, pero casi siempre se refieren a las funciones de psicomotricidad y percepción, no se pone suficiente énfasis en la función del lenguaje y definitivamente casi no se atiende la maduración en cuanto a las funciones cognitivas.

Incluso al nivel de psicomotricidad pueden encontrarse problemas ya que la noción de psicomotricidad no solamente se refiere a que el alumno sepa “moverse” sino que se debiera otorgar una significación psicológica al movimiento y se debería permitir al educando tomar conciencia de la dependencia recíproca de las funciones de la vida psíquica con la esfera motriz. “Esta noción debería intentar superar el punto de vista dualista clásico que consiste en separar como dos realidades heterogéneas la vida mental y la actividad corporal ” (Condemarín, Chadwick y Milicic, 1989).

Las dificultades de percepción usualmente se detectan a niveles tempranos, incluso desde preescolar. Los docentes detectan con facilidad si algún alumno necesita alguna ayuda visual o auditiva. Sin embargo, las destrezas perceptivas no sólo implican discriminación de los estímulos sensoriales, sino también la capacidad para organizar todas las sensaciones en un todo significativo. El proceso total de percibir es una conducta psicológica que requiere atención, organización, discriminación y selección y que se expresa indirectamente a través de respuestas verbales, motrices y gráficas. Sobra decir que incluso en el ámbito superior se detectan problemas relacionados con esta función básica para el aprendizaje escolar.

En cuanto al lenguaje, baste decir que muchas personas, y los estudiantes no son la excepción, viven en un estado de analfabetismo funcional. Los problemas de lecto-escritura son tan comunes que es frecuente que el alumno no responda bien a los reactivos de un examen porque no supo leer el enunciado del mismo, otras veces él afirma haber entendido los conceptos pero al pedir que describa oralmente algún proceso, se encuentra prácticamente incapacitado para expresar lo que incluso pudo haber resuelto bien utilizando alguna relación matemática. Los profesores de nivel superior se enfrentan con alumnos que efectivamente no entienden el sentido de lo que leen. Esto muchas veces divide a los docentes en dos bandos, aquellos que proponen que se incluyan cursos, aunque no sean curriculares, de comprensión de la lectura; y aquellos que se oponen porque esas actividades se refieren a habilidades que los alumnos debieron haber adquirido al menos dos niveles escolares antes de la escuela superior.

Se ha escrito mucho del tema de maduración, pero casi todo al nivel de preescolar y primaria, incluso se han diseñado estrategias y planes de maduración para los niños pero hay muy poco escrito para los siguientes niveles. No se ha establecido cuales son las características de maduración necesarias para cada nivel. El hueco más profundo es en las funciones cognitivas, las actividades que ayudan a la maduración en estas funciones son las que menos se han motivado. Piaget estudió el problema con los niños pero es sencillo hacer una traducción aproximada para otros niveles. Al nivel de los niños Piaget distingue dos tipos de actividades, una de tipo lógico matemático y otra de tipo físico. Las primeras consisten en seriar, relacionar, contar diferentes objetos que sólo constituyen el material para la realización de tales actividades, las cuales llevan al niño a un conocimiento solo operativo. Las actividades de tipo físico consisten en explorar los objetos para obtener información respecto a sus principales características: color, forma, tamaño o peso y que conducen al niño a un conocimiento figurativo de la realidad que lo rodea. La inteligencia, según este autor, constituye una forma de adaptación del organismo al ambiente. La adaptación se realiza a través de la asimilación y la acomodación. La asimilación es el proceso por el cual cada nuevo dato de experiencia se incorpora a los esquemas mentales que ya existen en el niño. La acomodación es el proceso de transformaciones de los propios esquemas en función de los cambios del medio. Los nuevos datos que se incorporan en los esquemas, los modifican adaptándolos a los nuevos aspectos de la realidad. A la luz de los conceptos de Piaget se han diseñado ejercicios de maduración para desarrollar en los infantes por ejemplo las nociones de negación, conjunción, disyunción, la expresión simbólica de un juicio lógico o la noción de conservación.

Regresando al caso de la enseñanza de las Matemáticas, el fracaso escolar en esta asignatura puede deberse en gran parte a la falta de maduración, pero sobre todo al nivel de las funciones cognitivas, porque incluso si el alumno tiene alguna limitación motriz o de percepción visual o auditiva se ha demostrado que puede cursar con éxito cualquier asignatura de Matemáticas o relacionada con Matemáticas.

El trabajo a realizar consiste en su primera etapa en realizar diagnósticos para mostrar que efectivamente existe el problema y encontrar los niveles del mismo. Una vez localizados pueden diseñarse estrategias para resolverlos. Lo más probable es que la solución en muchos casos no sea exclusiva de los profesores, sino que requerirá la participación de psicólogos, pedagogos y otros profesionistas afines. Es también posible que durante un tiempo el alumno tenga que realizar actividades que aparentemente no tengan nada que ver con la carrera que quiere cursar.

El proyecto se encuentra en la primera etapa, en donde se trata de establecer los límites de la problemática, por brevedad no se describen aquí todos los estudios que se han realizado, solamente se describirá una situación que se presentó en dos grupos de aproximadamente 30 alumnos cada uno, en un curso de Estadística ubicado en el segundo semestre de una escuela de Ingeniería.

El estudio de caso

Los alumnos se organizaron en equipos de dos personas para realizar una actividad del tema de probabilidad del curso de Estadística. Primero se consideró el experimento teórico de lanzar dos dados balanceados y sumar los números que aparecen en las caras superiores, los posibles resultados van del 2 al 12. Previamente el profesor demostró que la probabilidad de obtener por ejemplo un 4 es diferente de la probabilidad de obtener un 6, o la de obtener un 9. Este es un ejemplo muy simple, en donde primero se enumeran los elementos en el espacio muestral:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Son 36 elementos en el espacio muestral, el alumno puede darse cuenta fácilmente que el 4 puede obtenerse de 3 formas diferentes con los eventos simples (1,3), (2,2) y (3,1) por lo tanto la probabilidad de obtener un 4 es p(4)=3/36; un 6 puede obtenerse de cinco formas diferentes (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) y (5,1) es decir la probabilidad de obtener un 6 es p(6)=5/36. Las probabilidades teóricas se muestran en la siguiente tabla:

#	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Una vez obtenidas las probabilidades el maestro plantea la cuestión, ¿Se obtendrán los mismos resultados con dos dados reales? Y propone a los alumnos realizar el siguiente experimento:

Los alumnos deberían de lanzar los dos dados aproximadamente 500 veces, un alumno lanzaba los dados y el otro anotaba los resultados. Obviamente la idea del maestro es que la probabilidad “experimental” se puede calcular dividiendo el número de veces que se obtuvo un cierto número entre el número total de veces que se lanzaron los dados, es decir la probabilidad es igual a la frecuencia relativa. El experimento tiene como objetivo que el alumno compruebe que aunque las probabilidades que obtiene del experimento se acercan a las probabilidades teóricas los resultados no coinciden, el “error” se debe a que los dados reales obviamente tienen defectos, no están perfectamente balanceados. El alumno construye dos diagramas de barras, en uno de los cuales grafica las probabilidades teóricas y en otro las experimentales y después compara los dos diagramas. Se sugiere que en la medida de lo posible se puedan hacer tales gráficas usando la misma escala y en hojas de acetato para que se pueda hacer una comparación visual de las mismas. La actividad resulta muy interesante para los alumnos y el profesor la puede aprovechar para repasar varios conceptos básicos de la probabilidad, sin embargo, en esta ocasión la primera parte del experimento se centró en verificar si los alumnos tenían en su estructura mental la noción de clase en el sentido de Piaget, es decir, se quería ver el grado de maduración de los alumnos en la actividad de clasificar, de agrupar objetos, la cual es una manifestación esencial del pensamiento lógico matemático. Según Piaget esta se expresa desde la infancia a través de un proceso genético por el cual el niño va estableciendo semejanzas y diferencias entre los elementos que le interesan, llegando a formar subclases que, luego, incluirá en una clase de mayor extensión. Por ello no se les dio a los alumnos ninguna indicación de cómo agrupar los datos que iban obteniendo, se les dio la libertad de que los anotaran y organizaran como quisieran. Los comportamientos observados se pueden agrupar en las cuatro formas siguientes:

Comportamiento I. Varios equipos agruparon los datos en una tabla y según se iban obteniendo los resultados ponían un indicador a la derecha que indicaba que ese resultado había salido, todos los que siguieron este procedimiento colocaron una / cada vez que salía ese resultado, por ejemplo, después de unas veinte veces de echar los dados el aspecto de la tabla pudiera ser el siguiente:

2	/
3	
4	//

5	//
6	///
7	////
8	///
9	//
10	/
11	/
12	/

En este comportamiento los alumnos siguieron poniendo / hasta que pensaron que ya tenían un número suficiente de datos, por ejemplo: el aspecto que tenía la tabla para algunos números podría ser la siguiente:

6	////////////////////////////
7	///////////////////////////////////
8	/////////////////////////////

Comportamiento II. Este comportamiento es muy parecido al comportamiento I pero incluye una actividad de clasificación adicional, cada cinco / se separaba del siguiente conjunto de cinco /. Por ejemplo para algunos números el aspecto de la tabla pudiera ser la siguiente:

6	/////	/////	/////	/////	/////	/////	///		
7	/////	/////	/////	/////	/////	/////	/////	/////	/////
	/								
8	/////	/////	/////	/////	////	/////	//		

Este comportamiento se considera equivalente a aquel en el que después de marcar cuatro / los alumnos ponían una quinta / tachando a las otras cuatro de tal manera que esto equivalía también a un conjunto de cinco /.

Comportamiento III. Otro conjunto de alumnos anotaron los datos obtenidos secuencialmente en una forma parecida a la siguiente:
12, 11, 4, 6, 3, 9, 8, 8, 7, 5, 6, 10, 6, 9, 6, 5, 9, 11, 4, 7, 8, 10, 9, 4, 7, 7, 8, 7, 4, 4, 10, 7, 4, 12, 5, 3, 7, 7, 7, 12, 8, 7, 7, 8, 6, 8, 10, 9, 11, 9, 9, 7, 2, 6, 10, 6, 10, ...

Comportamiento IV. Un solo equipo, aparentemente influenciado por el ejercicio anterior, hizo caso omiso de la indicación de que deberían de sumar los números en las caras superiores y anotaron los resultados en la forma siguiente:
(1,3), (2,3), (6,5), (4,3), (1,1), (5,4), (6,1), (4,5), (4,4), ...

Los alumnos sabían que había que realizar aproximadamente 500 “mediciones”, y luego tenían que contar cuantas veces salió cada uno de los números. Si se observan los diferentes comportamientos entonces puede verse que los alumnos que siguieron el comportamiento II tienen bien desarrollada la actividad de clasificar, lo primero que tenían que realizar era saber si ya habían terminado, es decir si ya tenían el número adecuado de mediciones, en la forma de clasificar y agrupar las mediciones fácilmente era posible contar (de 5 en 5) las veces que se echaron los dados y es también fácil contar cuantas veces salió cada número. Se tardaron un promedio de una hora en realizar esta actividad.

Los estudiantes que mostraron el comportamiento I hicieron una primera clasificación, pero no llevaron esto hasta sus últimas consecuencias. El resultado fue que al tratar de hacer el conteo se tardaron más tiempo que los alumnos que lo hicieron en la forma II, aproximadamente quince minutos más. Los alumnos que hicieron el ordenamiento de datos en la forma III, para hacer el conteo y saber si ya habían terminado tuvieron que contar uno por uno hasta saber si ya tenían las 500 mediciones. Varios equipos habían agrupado los números por renglones de tal forma que solo tuvieron que contar cuantos había en cada renglón y luego multiplicar por el número de renglones, sin embargo, la tarea de obtener la frecuencia de cada número es más difícil en esta forma porque se tiene que repasar el conjunto de datos para cada uno de los números, es decir, para saber cuantos 2 salieron hay que revisar todo el conjunto de datos, para saber cuantos 3 hay que hacer lo mismo y así sucesivamente, algunos se dieron cuenta de su error y ponían una marca sobre los números que ya habían contado lo cual facilitaba la tarea. Sin embargo, se tardaron un poco más de dos horas en promedio para terminar el conteo. El comportamiento IV fue el que más tiempo se tardó, el simple hecho de hacer las anotaciones requiere más tiempo que en las otras formas. Al terminar todavía tuvieron que hacer la tarea que no habían hecho, sumar los dos números. No terminaron de hacer ni siquiera esta parte de la actividad en las tres horas que se contaba para todo el experimento.

Los alumnos del conjunto II terminaron la actividad hasta el graficado de los diagramas de barras y les sobró tiempo, los alumnos del conjunto I terminaron apenas a tiempo, los demás tuvieron que terminar fuera de la clase.

Discusión y conclusiones

A pesar de la sencillez del experimento en el se muestran varios detalles de la problemática. Hay alumnos que no cuentan entre sus habilidades cognitivas con la noción de clase, no tienen la capacidad de agrupar de clasificar, de ver semejanzas, de observar características comunes en diferentes conjuntos, de sintetizar. A pesar de que la actividad resulta muy motivadora para los estudiantes, muchos de ellos se frustran porque no entienden como fue que los demás terminaron tan pronto, si ellos pusieron en juego todo su esfuerzo. La respuesta es que no tenían las mismas habilidades que sus compañeros y difícilmente son conscientes de ello. Como no entienden que es lo que está mal en ellos, se produce un desconcierto que abarca prácticamente todas sus actividades: ¿Cómo es que dedico tanto tiempo pero obtengo tan pocos resultados? Es el típico alumno que todo el día está estudiando pero no obtiene resultados visibles, nunca le alcanza el tiempo en los exámenes, probablemente no entregue a tiempo sus tareas.

Solamente se ha revisado aquí una sola actividad, al realizar varias actividades con los mismos grupos, sorprende ver a estudiantes de nivel de licenciatura que tienen un nivel de maduración en las funciones cognitivas tan bajo que no tienen las habilidades que debería haber tenido en uno o dos niveles anteriores. El trabajo futuro consiste en terminar los diagnósticos y elegir una serie de pruebas que se deben de validar para diagnosticar de manera efectiva el nivel de maduración de los alumnos. El siguiente paso sería diseñar un plan de maduración para los alumnos que mostraron problemas. En esta parte del trabajo la participación del profesor de Matemáticas tendrá que ser complementada con la de psicólogos, pedagogos y probablemente médicos. Se vislumbra también la participación activa de las autoridades de la institución y del núcleo familiar.

Referencias bibliográficas

Carraher, T., Carraher, D., Schliemann, A. *En la vida diez, en la escuela cero*. Ed. Siglo XXI, México, 1989.

Condemarín, M., Chadwick, M., Milicic, N. *Madurez Escolar. Manual de Evaluación y Desarrollo de las Funciones Básicas para el Aprendizaje Escolar*. Ed. Ciencias de la Educación Preescolar y Especial, Madrid, 1989.

Piaget, J.: *Development and Learning*, en Piaget Rediscovered, R. E. Ripple and V. N. Rockcastle, Eds. New York, Cornell Univ. 1964.

Piaget, J., Inhelder, B. *Psicología del niño*. Ediciones Morata, Madrid, España, 1978.

Piaget, J. *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. Fondo de Cultura Económica, México, 1978.

Remplein, H. *Tratado de Psicología Educativa*. Ed. Barcelona; Barcelona, 1966.

Richard, W. Condiciones para un aprendizaje de calidad en la enseñanza de las ciencias. Reflexiones a partir del proyecto PEEL. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 3-15, 1999.

La Representación Gráfica de la Relación Inversa entre Tangentes y Áreas

Rafael A. Meza V., rmesav@correoweb.com
CECyT "Diódoro Antúnez" – IPN; Cinvespav-IPN
México

Introducción

La motivación usual y pragmática con la que se pretende iniciar el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo es que éste hace uso de la estrecha relación que existe entre integrales indefinidas e integrales definidas, para calcular con facilidad los valores exactos de muchas integrales definidas sin usar la suma de Riemann. Además se menciona que establece la relación inversa entre las operaciones de derivación e integración y tal vez se insinúe que también establece la relación inversa entre el problema de la tangente y el problema del área, pero no se menciona en forma explícita como establece esta última relación en forma gráfica, ésta está ausente en los libros de texto, y en términos generales también del curriculum.

Preguntas de Investigación

La motivación de este estudio puede ser planteada en forma de preguntas. La primera puede ser:

¿Es el alumno capaz de identificar la relación inversa entre tangentes y áreas si únicamente dispone de información gráfica?

> *Aún cuando a primera vista parece posible identificar o establecer esta relación,* no es obvia*, así nuestra siguiente pregunta puede ser planteada de la siguiente manera:*

¿Es el alumno capaz de reconstruir la representación gráfica de la relación inversa entre estos dos problemas si cuenta con los elementos formales y abstractos del Cálculo que le proporciona un curso tradicional?

En efecto, mi interés está centrado en un problema más específico, el cual también planteo en forma de pregunta:

¿La coordinación de la relación inversa entre tangentes y áreas, en los registros de representación gráfico y algebraico, brinda al alumno una mejor oportunidad de apropiarse de un concepto mucho más rico del Teorema Fundamental que el proporcionado por un curso tradicional de cálculo?

Cuestionario

Para tratar de dar respuesta a las dos primeras preguntas se aplicó un cuestionario cuya característica general es que no presenta expresiones algebraicas explícitas y guía al alumno a tratar de dar una respuesta que se apoye en elementos gráficos pero sin obstaculizar, desde luego, una respuesta de tipo algebraica.

Cuestionario Diagnostico

Sea **L** una recta tangente a la gráfica de la función **f** en el punto de coordenadas **(2, 60)** que cruza el eje de las abscisas en **-1**,

a) Encuentra el valor de la función f en $x = 2$, es decir $f(2)$.
b) Encuentra el valor de la derivada de la función f en $x = 2$, es decir $f'(2)$.
c) En el sistema de coordenadas proporcionado en la figura 2 traza la gráfica de la función derivada $f'(x)$.
d) Determina la expresión polinomial de primer grado que corresponde a $f'(x)$.
e) Utiliza la expresión de $f'(x)$, obtenida anteriormente, y determina $f(x)$.

f) Haz uso de la expresión ***f (x)*** para determinar ***f ´*(0.5).**
g) A qué tipo de curva corresponde la expresión ***f (x)*.**
h) Proporciona dos o tres elementos representativos de esta última curva.

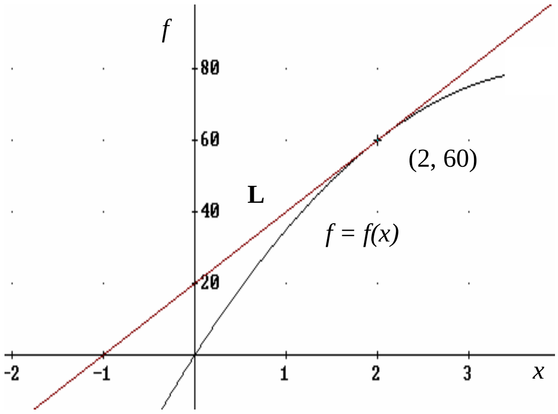


Figura 1

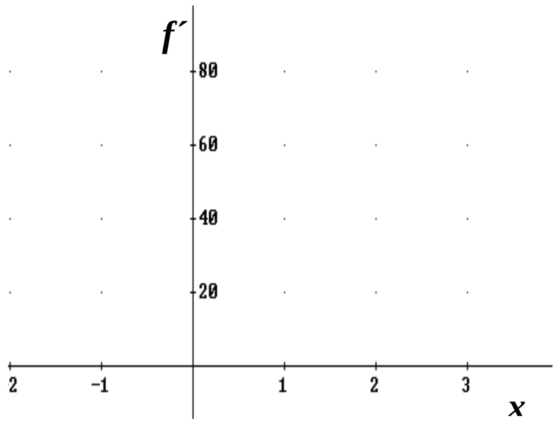


Figura 2

ESTUDIANTES. La población para nuestro estudio está compuesta por tres grupos de alumnos:

- El primer grupo está formado por **20** alumnos de nivel bachillerato, estudiantes del CECyT “Diodoro Antunez E” del IPN, que han cursado en el cuarto semestre la materia de Cálculo Diferencial (semestre I-98) y en el quinto semestre la materia de Cálculo Integral (semestre II-98), al momento de aplicar el cuestionario diagnóstico dichos alumnos cursaban en el sexto semestre, entre otras, la materia de Probabilidad y Estadística, tenían escasos dos meses de terminar su curso de Cálculo Integral.

- El segundo grupo de **31** alumnos está formado por estudiantes del segundo semestre de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN (semestre I-99), al momento de aplicar el cuestionario diagnóstico ellos cursaban, entre otras, la materia de Cálculo II, estos alumnos ya cursaron la materia de Cálculo I, que cubre los temas: Números Reales, Inducción, Sucesiones, Series, Funciones y Continuidad.

- El tercer grupo está constituido por **25** alumnos que cursan el tercer semestre en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (semestre I-99), al momento de aplicar el cuestionario diagnóstico ellos cursaban, entre otras, la materia de cálculo III, estos alumnos ya cursaron la materia de cálculo II, que cubre los temas: Derivadas, Integral de Riemann, Sucesiones y Series de funciones.

METODOLOGÍA. El cuestionario diagnóstico se aplicó a los tres grupos sin previo aviso. A los alumnos de los dos grupos de nivel superior al término de la aplicación se les proporcionó nuevamente el cuestionario, pero en esta ocasión se les indicó que podía llevarlo a casa, y que tenían una semana para regresarlo ya resuelto, pasado este tiempo, la mayor parte de los alumnos entregó su trabajo. El propósito de esta última tarea fue proporcionar a los alumnos tiempo suficiente para reflexionar sobre el problema que se les planteaba y brindarles la posibilidad de consultar a sus compañeros o a sus textos.

RESULTADOS (Primera parte).

Los resultados correspondientes al primer grupo son los siguientes:

- **Seis** de un total de veinte alumno resolvieron en forma correcta el inciso **a** y sin embargo ninguno resolvió correctamente el inciso **b** el cual requería de la comprensión gráfica de la derivada. Ningún alumno siguió más allá.

Los resultados correspondientes al segundo grupo son los siguientes:

- **Tres** de un total de 31 alumnos no fueron capaces de identificar gráficamente el valor de la función *f* en x = 2, no contestaron correctamente ninguno de los incisos.
- **Doce** contestaron en forma correcta solo el inciso marcado con la letra **a,** identificando gráficamente el valor de la función en x = 2.
- **Dieciséis** lograron identificar gráficamente en forma satisfactoria tanto el valor de la función en x = 2, como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de coordenadas (2, 60), es decir, contestaron correctamente los incisos **a** y **b**. De estos últimos alumnos, **ocho determinaron la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función** *f* en el punto de coordenadas (2, 60) como respuesta al inciso **d,** en lugar de determinar la expresión polinomial de primer grado que corresponde a la derivada de la función. **Cuatro** de estos ocho alumnos, trazaron la gráfica de la recta tangente **L** como respuesta al inciso **c**. Cinco de ocho alumnos que determinaron la ecuación de la recta tangente en el inciso **d**, intentaron dar solución al inciso **e** integrando la ecuación de la recta tangente.

Del tercer grupo tenemos los siguientes resultados:

- **Seis** de 25 alumnos no resolvieron ningún acierto.
- **Once** resolvieron satisfactoriamente solo el inciso marcado con la letra **a.**
- **Ocho** alumnos contestaron correctamente el inciso **a** y el inciso **b**. De estos últimos ocho alumnos cuatro dieron como respuesta a los incisos **c** y **d,** la gráfica y la ecuación, respectivamente, de la recta tangente a la función en el punto en cuestión, en lugar de la ecuación de la función derivada. Por lo menos tres alumnos muestran en forma clara desarrollos algebraicos correspondientes al lenguaje formal del cálculo que va más allá de lo que usualmente se trabaja a nivel bachillerato.

RESULTADOS (Segunda parte) Los resultados que se presentan a continuación corresponden al trabajo extra clase realizado por los alumnos de los dos grupos del nivel superior. Se recibieron un total de **45** trabajos, **31** de ellos corresponden a alumnos del segundo semestre y **14** del tercer semestre. Los tipos de desarrollos mostrados en ambos grupos fueron muy similares. En términos generales los incisos marcados con las letras a y b fueron resueltos en forma satisfactoria. Comentamos a continuación sólo las características de las diversas respuestas proporcionadas al inciso **c.**

1. **Veinticinco** alumnos, diecinueve segundo y seis de tercero presentaron desarrollos muy ambiguos e incorrectos.

2. **Nueve** alumnos, cinco de segundo semestre y cuatro de tercero determinaron la ecuación de la recta tangente **L** y consideraron a ésta como la ecuación correspondiente a $f'(x)$.
3. **Seis** alumnos, tres de segundo y tres de tercero argumentaron que cerca del origen la curva tenía un comportamiento similar al de una recta, procediendo a determinar la ecuación de dicha recta y la consideraron como la ecuación de $f'(x)$. Por ejemplo consideraban los puntos de coordenadas (0, 0) y (1/2, 20).
4. **Cuatro** alumnos, tres de segundo y uno de tercero, dan primero respuesta al inciso **d** y después al **c**, su alternativa de solución al inciso **c,** vía el inciso **d,** es de tipo algebraico. Consideraron a $f(x)$ como un polinomio de segundo grado en x, y aplicaron las condiciones iniciales, $f(0) = 0$, $f(2) = 60$ y $f'(2) = 20$, para determinar los coeficientes del polinomio de segundo grado que se busca e inmediatamente proceden a derivar el polinomio correspondiente a $f(x)$ para obtener la expresión de $f'(x)$.
5. Sólo **un alumno** de segundo semestre de los 45 recurrió a elementos de naturaleza gráfica para dar solución al inciso **c**, e identificó en forma correcta la ordenada $f(2) = 60$ como el valor del área limitada por los ejes coordenados, la recta $x = 2$ y la gráfica de $f'(x)$. Consideró esta área (conocida) como la suma del área (conocida) de un rectángulo de altura y base conocidas más el área (conocida) de un triángulo de base conocida y altura desconocida, de inmediato procedió a determinar el valor de la altura con el propósito de conocer un segundo punto y proceder a determinar el polinomio de primer grado correspondiente a $f'(x)$.

Estos resultados muestran la ausencia total en los alumnos de la representación gráfica de la relación inversa entre tangentes y áreas, existe también una notoria ausencia de la comprensión gráfica de la derivada de una función, no obstante que esta última se presenta cuando se introduce en el curso de cálculo diferencial el significado gráfico de la derivada de una función. Las cosas no mejoran aun cuando el alumno posee elementos formales del cálculo. Estos resultados muestran que es necesario un mayor énfasis en las representaciones gráficas en los temas centrales de nuestros cursos de cálculo. En términos generales podemos concluir que los **76** alumnos a los cuales se les aplicó el cuestionario diagnóstico no tuvieron éxito al trabajar la *relación* inversa existente entre tangentes y áreas apoyándose sólo de información gráfica. Los alumnos por sí solos no logran establecer la *relación* gráfica entre áreas y tangentes aun cuando se encuentren en posesión de un lenguaje formal más amplio del cálculo.

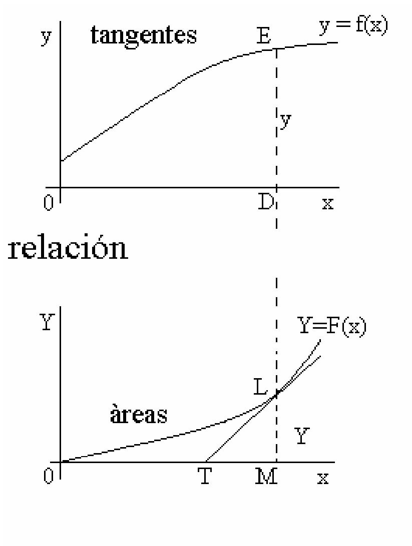
BARROW Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL. Fue Isaac Barrow quien con mayor precisión formuló, en 1667, el problema de la relación entre tangentes y áreas. Encontramos el teorema fundamental, entre otro resultados, en la *Lecture X* de sus *Lectiones geometricae* (London, 1670). En ella presenta una colección de teoremas, la mayor parte, relacionados con la búsqueda de tangentes, áreas, y longitudes de arcos. Struik (1969) en su libro *"A Source Book in Mathematics"* en las páginas 254-260 proporciona los más representativos de esta *Lecture X.* El método utilizado por Barrow es totalmente geométrico, y esto hace que no sea fácil reconocer la importancia de sus resultados. Este trabajo es, sin duda, una de las grandes contribuciones al cálculo, usa métodos geométricos libres de la carga de cálculos, hace uso de curvas auxiliares y es poco claro.

LA HISTORIA. Su consideración en el aprendizaje de la matemática, no es una tarea fácil, exige la preparación de un desarrollo didáctico a través del cual su importancia sea significativa y explícita a las necesidades del ámbito escolar, además están los riesgos inmediatos que puede ocasionar su incorporación en el curriculum, ya que puede hacerlo demasiado extenso, y demandaría de parte del profesor una cuidadosa y laboriosa preparación para su posible incorporación en el salón de clases a través de la minuciosa selección de temas que proporcionen información histórica y social que ayude a reforzar o aclarar los conceptos que se pretendan trabajar y que adicionalmente muestren, como un elemento central, los cambios que se han presentado en el pensamiento matemático a lo largo de los años de su desarrollo.

Por otro lado, brinda la oportunidad de rescatar los elementos genéticos que dieron lugar al desarrollo de algún concepto pero que la evolución y la preparación didáctica así como la elaboración de los textos fueron relegando. Del mismo modo, el conocimiento de la evolución del concepto del objeto matemático de interés puede brindarnos la oportunidad de ayudar al estudiante a determinar la forma más adecuada de concebirlo con el propósito de que más adelante no se convierta en un obstáculo.

PROPUESTA. Es posible presentar, con una ligera modificación del párrafo XI *Lecture* X de Barrow, la relación inversa entre tangentes y áreas de forma tal que tome en cuenta tanto la representación algebraica como la gráfica, estando presentes en esta última los elementos genéticos de esa relación. Así, nuestra tesis es que: *La coordinación de la relación inversa entre tangentes y áreas, en los registros de representación gráfico y algebraico, brinda al alumno una mejor oportunidad de apropiarse de un concepto mucho más rico del Teorema Fundamental que el proporcionado por un curso tradicional de cálculo.*

representación gráfica



representación algebraica

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

traslación

relación

$$F(x)=\int_0^x f$$

Hasta ahora se le ha explotado casi exclusivamente en el registro algebraico en un tratamiento de tipo algorítmico llevado al extremo de olvidar la explotación del registro gráfico. La explotación se ha realiza casi exclusivamente en forma algorítmica a través de la expresión $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. El Teorema Fundamental del Cálculo es más que una simple herramienta para evaluar integrales, sólo por poner dos ejemplos: Primero, puede usarse junto con la integración por partes para obtener el polinomio de Taylor con la forma integral del residuo. Segundo, es primordial para la obtención del teorema de Green.

Desde luego que una propuesta abstracta para el teorema fundamental, cristalizaría las relaciones lógicas inherentes entre tangentes y áreas en un curso inmediato superior a la propuesta que estamos presentando para el nivel bachillerato.

Referencias bibliográficas

Duval, R (1993). Registres de Représentations sémiotique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *"Annales de Didactique etde Sciences Cognitives",* 5, pp. 37-65. IREM de Strasbourg.

Boyer, C. (1968). *"A History of Mathematics"*. John Wiley & Sons. New York, USA.

Clagett, M. (1968). *"Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motion"*. University of Wisconsin Press.

Courant, R. (1964). *"Differential and Integral Calculus"*. Blackie & Son Limited. London and Glosgow.

Cunningham, F. Jr. (1965). The Two Fundamental Theorems Of Calculus.*"American Mathematics Monthly",* vol. 72, pp. 406-407.

Dehn, M. and Hellinger, E. D. (1943). Certain mathematical achievements of James Gregory. *"American Mathematics Monthly",* vol. 50, pp. 149-163.

Descartes, R. (1637). *"La Geometría".* (Traducción, 1947) Espasa - Calpe Argentina, S. A. Traducida por Rossell Soler, Pedro. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Argentina.

Kline, M. (1972). *"Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"*. Oxford University Press. New York.

Struik, D. J. (1969). *"A Source Book in Mathematics, 1200-1800"*. Harvard University Press. Cambrige.

La Técnica de la Modelación en Situación Escolar, con Alumnos de Cuarto Grado de Primaria. Un Estudio de Casos.

Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez
gcabanas@galeana.uagfm.mx
Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero
México

Nivel de incidencia: Primaria

En este trabajo se dan a conocer los resultados parciales de una investigación en desarrollo, relacionada con la solución de problemas en la enseñanza de la matemática. El trabajo se fundamenta en una propuesta de tipo metodológico que tiene que ver con la utilización de técnicas de estimulación intelectual en el proceso de resolver problemas. Una de esas técnicas es la Modelación, propuesta en “La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas en la escuela primaria” (Cabañas, M.G., 1995). En este trabajo, se puso en situación escolar la Técnica de Modelación con alumnos de cuarto grado de primaria, con el propósito de desarrollar la habilidad para resolver problemas aritméticos a través de dicha técnica. Antes de llevarla a la situación escolar, se realizó un diagnóstico para valorar el estado que guardaba la habilidad de resolver problemas en los estudiantes que participan en el trabajo. Con el diagnóstico nos percatamos de las siguientes dificultades en los estudiantes: No comprendieron el problema, relacionan la fracción con un entero, no identificaron significado de exceso, no identificaron parte alícuota, no interpretan las operaciones, no identifican relaciones, omite operaciones intermedias, utilizan palabra “clave” incorrectamente, entre otras.

Durante el trabajo con la técnica se utilizaron tres tipos de modelos: lineal, tabular y ramificado a través de un procedimiento generalizado expresado en forma de acciones para utilizar por el alumno en la solución de problemas. Los problemas utilizados para el trabajo con la técnica fueron del tipo de los simples y compuestos.

El procedimiento generalizado se fundamenta en las etapas de la acción de acuerdo con la Teoría de la actividad, según Galperin (Orientación, Ejecución y Control), tomando en cuenta las implicaciones que ella tiene en la solución de problemas.

Introducción

La actividad de resolver problemas ha sido reconocida como un componente importante del conocimiento matemático, esto podemos constatarlo en los actuales planes y programas de estudio del Sistema Educativo Básico Mexicano (primaria y secundaria), en los que resaltan la importancia por que “el alumno utilice las matemáticas como un instrumento que le ayude a reconocer, plantear y resolver problemas en diversos contextos”[1].

Se trata de una nueva propuesta metodológica de la enseñanza de la matemática, donde la solución de problemas es utilizada como elemento estructurador de los contenidos curriculares. Se consideran además, como un medio integrador del conocimiento, ya que se presupone que la enseñanza de la matemática a través de problemas puede contribuir al desarrollo del pensamiento creativo en los estudiantes.

Los cambios que se han realizado en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria, tienen que ver entre otras cosas: por los nuevos requerimientos sociales; por el desarrollo mismo de las matemáticas; y por los avances de la investigación.

Una de las formas de desarrollar habilidades en los alumnos para resolver problemas es a través del desarrollo de técnicas encaminadas a desarrollar esta capacidad. Una de esas técnicas es la que se propone en “La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas en la escuela primaria” (Cabañas, M.G., 1995). En esta investigación, la autora propone la utilización de cuatro tipos de modelos a saber: lineales, tabulares, ramificados y conjuntistas; mediante un procedimiento generalizado para utilizar por el alumno en la solución de problemas. Este procedimiento se fundamenta en las etapas de la actividad sistematizadas por Galperin (Orientación, Ejecución y Control), teniendo en cuenta las implicaciones que ella tiene en la resolución de problemas. Para ello se parte de las fases conocidas para la solución de problemas: (Comprender el problema, concebir un plan, Ejecución del plan y Visión retrospectiva), y de los procedimientos heurísticos que desde Polya ocupan un lugar importante en esta teoría.

En este trabajo, se puso en situación escolar la Técnica de Modelación con alumnos de cuarto grado de primaria, con el propósito de desarrollar la habilidad para resolver problemas aritméticos a través de dicha técnica. Antes de llevarla a la situación escolar, se realizó un diagnóstico para valorar el estado que guardaba la habilidad de resolver problemas en los estudiantes que participan en el trabajo.

Estado de desarrollo de la habilidad para resolver problemas aritméticos en cuarto grado de primaria. Taxco de Alarcón en el Estado de Guerrero

Esta investigación se desarrolló con alumnos del cuarto grado grupo "B", de la Escuela Primaria "Niño Artillero" en la ciudad de Taxco de Alarcón. Antes de llevar a la situación escolar la Técnica de la Modelación, se realizó un diagnóstico a los alumnos que participaron en este trabajo. Para lo cual se les aplicó una prueba pedagógica con el objeto de *valorar la habilidad de los alumnos para resolver problemas aritméticos simples y compuestos*.

Se inició con la selección de los problemas que formarían parte del diagnóstico. Estos problemas, fueron seleccionados de la investigación: "La técnica de la Modelación como un recurso para aprender a resolver problemas aritméticos en la escuela primaria", clasificados como simples y compuestos. (Cabañas, G. 1995)

Problemas simples. Son aquellos que se resuelven directamente mediante una interpretación inmediata de los significados de las operaciones, sin que medie ningún problema auxiliar. Con esta manera de concebir el problema simple, los llamados actualmente compuestos independientes, pueden ser considerados como tal pues en ellos lo que se hace normalmente es interpretar una o más de una operación, pero éstos son independientes.

Problemas compuestos. Son aquellos en los que para su solución, se necesita la realización previa de subproblemas o problemas auxiliares y la interpretación de uno o varios significados de las operaciones.

Algunas de las características consideradas en los problemas seleccionados, fueron las siguientes: Datos no expresados numéricamente; Palabra clave; Significado de exceso; Parte alícuota; Operaciones intermedias; Inclusión de relaciones; Operaciones sucesivas

Aspectos metodológicos considerados en la selección, validación y aplicación de los problemas utilizados en el diagnóstico.

Para la realización del diagnóstico, fueron seleccionados cuatro problemas distintos de la investigación "La Técnica de la Modelación como un recurso para aprender a resolver problemas aritméticos" (Cabañas, G. 1995). Estos problemas son parte de los que la autora utilizó en su diagnóstico.

Los problemas se estructuraron en forma de prueba. Se organizaron cuatro pruebas, en la que se consideró que cada alumno resolviera un problema distinto, con la finalidad de evitar que se comunicaran o verificaran resultados entre ellos. Junto a cada prueba se les incluyó una entrevista escrita en la que se les preguntó si comprendían los que se les pedía en el problema y si consideraban que los datos eran suficientemente claros para ellos.

Los problemas se sometieron a la validación en la escuela primaria “Niño Artillero” de Taxco de Alarcón. La muestra considerada en esta etapa fue seleccionada aleatoriamente, en la que participaron dieciséis alumnos del cuarto grado, grupo "A" de la misma escuela en que se desarrolló la investigación (un grupo distinto en el que se pondría en situación escolar la Técnica de Modelación) y cada uno contestó un problema diferente.

En esta parte, se validaron una sola vez los problemas, en la que tres de ellos fueron modificados. Enseguida se enuncian los problemas utilizados inicialmente, así como las modificaciones correspondientes y el enunciado final de cada uno, después de la validación y que finalmente son los que se aplicaron para el diagnóstico.

Problema 1. Carlos tiene treinta canicas. Una décima parte de las canicas son rojas y el resto son azules. ¿Cuántas canicas son azules?

No se consideró necesario modificar este problema debido a que los alumnos dijeron que no tenían dificultad con el enunciado del problema.

Problema 2. Un camión carga 200 kg. de plátano, otro carga tantos como él más 25 kg y un tercero, tantos como los dos primeros. ¿Cuántos cargan los tres juntos?

En este problema, los alumnos no comprendieron la pregunta ¿Cuántos cargan los tres juntos?.

En la entrevista escrita, de los dieciséis alumnos que participaron 10 contestaron que los tres juntos cargaban plátanos sin considerar la unidad de medida, otros dijeron que no entendieron qué tenían que encontrar, es por eso que se le agregó: kilogramos de plátanos. Después de la validación el problema 2 se enunció de la siguiente forma:

Problema 2. Un camión carga 200 kg. de plátano, otro carga tantos como él más 25 kg y un tercero, tantos como los dos primeros. ¿Cuántos kilogramos de plátanos cargan los tres juntos?

Problema 3. En un centro de confecciones se deben confeccionar trescientos cuarenta y cinco uniformes escolares en un día. Si faltan por hacer la quinta parte de ellos, ¿Cuántos uniformes faltan por hacer?

En este problema los alumnos no sabían que es “un centro de confecciones”, por lo que esta parte fue cambiada por “un taller de costura”. El enunciado del problema finalmente quedó de la siguiente manera:

Problema 3. En un taller de costura se deben confeccionar trescientos cuarenta y cinco uniformes escolares en un día. Si faltan por hacer la quinta parte de ellos, ¿Cuántos uniformes faltan por hacer?

Problema 4. Entre Luis y Juanito tienen 18 canicas. Si Luis tiene el doble que Juanito. ¿Cuántas canicas tiene Juanito?

En este problema los alumnos se confundían con la palabra “entre” porque consideraba

que tenían que dividir. Por otra parte, algunos lograron resolverlo por tanteo debido a que el todo es un número muy pequeño, por lo que también fue cambiado. De esta, se quitó la palabra clave “entre” y se aumentó el todo por 72. Finalmente, el problema se enunció de la siguiente forma:

Problema 4. Luis y Juanito tienen 72canicas. Si Luis tiene el doble que Juanito. ¿Cuántas canicas tiene Juanito?

El análisis de cada problema que se utilizó en el diagnóstico se muestra a continuación:

Problema 1. Carlos tiene treinta canicas. Una décima parte de las canicas son rojas y el resto son azules. ¿Cuántas canicas son azules?

Este problema es compuesto dependiente, para resolverlo tiene que hacer una división y una resta

Problema 2. Un camión carga 200 kg. de plátano, otro carga tantos como él más 25 kg y un tercero, tantos como los dos primeros. ¿Cuántos kilogramos de plátanos cargan los tres juntos?

Problema compuesto dependiente, para su solución tiene que interpretar el significado de exceso, realizar una adición y sumas sucesivas.

Problema 3. En un taller de costura se deben confeccionar trescientos cuarenta y cinco uniformes escolares en un día. Si faltan por hacer la quinta parte de ellos, ¿Cuántos uniformes faltan por hacer?

Problema simple, para su solución únicamente tienen que hacer una división.

Problema 4. Luis y Juanito tienen 72 canicas. Si Luis tiene el doble que Juanito. ¿Cuántas canicas tiene Juanito?

Problema compuesto dependiente, para su solución se tiene que hacer una división y una multiplicación (o una suma o una resta).

Resultados del diagnóstico

En la muestra seleccionada participaron los 44 alumnos de cuarto grado, grupo "B" de la escuela primaria en la que se desarrolló la investigación en la que se resolvieron 44 problemas.

Se consideró necesario hacer una entrevista a los alumnos que participaron en el diagnóstico, esto es, porque en el momento de analizar cuáles fueron las dificultades más frecuentes que se les presentaron, en muchos de los casos no quedaba claro con la prueba únicamente. Por otro lado, algunos alumnos únicamente anotaron su respuesta, a pesar de que se les indicó que escribieran todo lo que pensaban durante su trabajo. Algunos argumentaron que lo habían resuelto mentalmente y que por ese hecho anotaron únicamente la respuesta.

Con la entrevista pudimos comprender con mayor claridad cómo resolvieron los alumnos los problemas. Algunas de estas ideas se recogen en el anexo 1 en la parte correspondiente a las observaciones del análisis por problema. En la entrevista, una niña señaló que el resultado que había puesto en su prueba lo había copiado de sus compañeros.

Las dificultades más significativos que tuvieron los alumnos al tratar de resolver los problemas, fueron los siguientes: No comprendieron el problema; No interpretan las operaciones; Utilizan palabra "clave" incorrectamente; No identificaron parte alícuota; Relacionan la fracción con un entero; No identificaron significado de exceso; No identifican relaciones; Omite operaciones intermedias

De los cuatro problemas que se aplicaron en el diagnóstico, en uno de ellos se incluyó el significado de exceso (Problema 2), en cuanto a la "palabra clave", está considerada en los problemas 1 «resto»; 3 «faltan» y en el 4 «doble». Se incluyó la parte alícuota en los problemas 1 «décima parte» y 3 «quinta parte» y; la relación "tantos como" está considerada en el problema 2. Los problemas 1, 2 y 4 se resuelven mediante operaciones intermedias.

Se considera "palabra clave" a aquella palabra que se encuentra dentro del enunciado del problema que "avisa" a los alumnos que esa (s) operación (es) es (son) la (s) que deben realizar.

En el diagnóstico, al que consideramos como prueba de inicio, pudimos constatar que los alumnos no utilizaron medios auxiliares (dibujos, esquemas, entre otros), como un posible recurso para comprender los problemas durante el proceso de solución; únicamente realizaron procedimientos de cálculo. También pudimos constatar, que existen dificultades en los estudiantes cuando se enfrentan con esta actividad, por lo que tiene sentido el trabajo que se está realizando, encaminado precisamente al desarrollo de habilidades en los alumnos en la solución de problemas aritméticos.

La Técnica de la Modelación

La técnica de la modelación es un recurso a útil en la solución de problemas, que puede ser utilizado desde primer grado de primaria con acciones apropiadas a los niños de edades pequeñas en el momento en que se introducen los significados de las operaciones aritméticas a través de gráficos o esquemas que faciliten su comprensión.

"Modelar significa reproducir las relaciones fundamentales que se establecen en el enunciado de un problema despejado de elementos innecesarios o términos no matemáticos que hacen difícil la comprensión, es una capacidad muy importante en la solución de problemas"[10]

Una de las formas de modelar los problemas es a través de esquemas o gráficos que permiten al alumno hacer visible los elementos que componen el enunciado y las relaciones que se establecen entre ellos, y en muchos casos facilitan "descubrir" la vía de solución o la respuesta misma del problema La forma de modelar los problemas es una manera muy personal, que depende en gran parte de la interpretación que se haga de ellos. Sin embargo, como señalan Campistrous y Rizo (1993), hay algunas ideas generales que deben ser enseñadas a los alumnos y que deben ejercitarse adecuadamente, pasarán a formar parte de los recursos técnicos a utilizar en la solución de problemas, cuando se considere necesario hacerlo.

En este sentido, presuponemos que la utilización de modelos, ayudará al alumno a comprender y encontrar la vía de solución a problemas. Es por eso, que en este trabajo se puso en situación escolar, la técnica de la modelación en la solución problemas aritméticos en cuarto grado de primaria. Esta técnica, incluye la utilización de cuatro tipos de modelos a saber y que se usan de acuerdo a la información que aparecen en el enunciado del problema.

Modelos lineales. Se utilizan por lo general, cuando en el problema hay una sola magnitud o información en juego, en especial, cuando en el problema aparecen relaciones de parte y todo.

Este tipo de modelos tiene diversas formas: pictográficas (se hacen reproducciones de los objetos que intervienen), de segmentos, de rectángulos, entre otras. Tal como lo expresa Campistrous, L. et al. (1993), estas últimas formas son las que se han utilizado en varios ejemplos planteados en el proyecto TEDI (Técnicas de Estimulación Intelectual)

1. *Modelos tabulares*. Se utilizan cuando hay varias magnitudes o información en juego. Se llaman tabulares ya que la información se coloca por lo general, en tablas de una o de doble entrada.

[10] Campistrous, L. et al. (1993). Aprende a resolver problemas aritméticos. Cuba: Pueblo y Educación. Prepim.

2. *Modelos ramificados*. Se usan básicamente en problemas de conteo y también en los de multiplicación donde se dan la cantidad de partes y el contenido de cada parte para hallar el todo.
3. *Modelos conjuntistas*. Se usan cuando la información que se da se refiere a propiedades o características que cumplen los elementos de un conjunto. Esto hace formar nuevos conjuntos de los que satisfacen las características pedidas.

Para nuestro caso, solo se trabajó con los modelos lineales, ramificados y tabulares en virtud de que los temas de lógica y conjunto no forman parte de la currícula de nivel básico en nuestro país.

La formación de la habilidad para construir esquemas

La construcción de esquemas es una habilidad que tiene que ser desarrollada en los alumnos. En este sentido, en la técnica de la Modelación se sistematiza una serie de acciones, consideradas en el procedimiento generalizado para la solución de problemas. Estas acciones, tienen que ser aprendidas por el alumno, las cuales se describen a continuación:

1. *Analizo qué tipo de modelo utilizar*. (¿Qué tipo?)
2. *Decido por donde voy a comenzar a representar la información*. (¿Cómo represento la información?).
3. *Hago el esquema*.
4. *Controlo si se corresponde con la situación*. (Se ajusta el esquema a la situación?)
5. *Lo analizo para ver si me ayuda a comprender mejor el problema o a encontrar la vía de solución*. (¿Qué puedo inferir de él?)

En un principio, cuando el profesor esté iniciando con el desarrollo de la habilidad de resolver problemas, puede apoyarse a través de material ilustrativo (cartulinas), en el que se describan las acciones anteriores.

Referencias bibliográficas

Cabañas, M.G. (1995*). "La técnica de la modelación como un recurso para aprender a resolver problemas aritméticos en la escuela primaria".* México: U.A.G. Tesis de maestría inédita.

Campistrous, L. y Celia Rizo Cabrera. (1993*). Aprende a resolver problemas aritméticos*. Cuba: Pueblo y Educación.

Polya, G. (1976) *"Cómo plantear y resolver problemas"*. México: Trillas, 18ª reimp.

Los Asesores de Matemáticas y el reencuentro con la Labor Docente en Educación Básica. Una Experiencia en Video.

María Lucía Moreno Sánchez, cmbla@sep.gob.mx
Unidad de Centros de Maestros. México D.F.
México

En México, desde la década de los setentas se asumió como reto lograr la cobertura de la educación básica, en el 2000 "la presión por crecer disminuye y se convierte en un asunto de menor prioridad, (es así que) el reto central de la educación básica estará constituido durante muy largo tiempo por el imperativo de lograr que esta cobertura extensa sea una oportunidad de aprender con calidad" (Fuentes Molinar 1999, 7).

La reseña del trabajo que se presenta, se inscribe en una de las acciones propuestas a nivel nacional tendiente a elevar la calidad de la educación básica en México. En este contexto resulta fundamental considerar lo siguiente: La reforma curricular a la educación básica en México, se emprendió hacia 1993 con la creación de nuevos planes y programas para primaria y secundaria. Luego, se promovió la elaboración de nuevos libros de texto convocando a concurso a la sociedad en su conjunto. A la circulación de los nuevos libros de texto y auxiliares didácticos como los Ficheros y los libros de recomendaciones para los maestros, siguió la puesta en marcha de un Programa Nacional de Actualización Permanente a los maestros de educación básica en servicio (ProNAP) a partir de 1996.

Como parte de este Programa Nacional de Actualización se han creado los Centros de maestros con instalaciones para el manejo de equipos de informática, amplio acervo bibliográfico, videográfico y audiográfico; los Talleres Generales de Actualización, eventos periódicos en los que se convoca a maestros del mismo grado a analizar y a discutir temas relacionados con la currícula escolar; y los Cursos Nacionales, que funcionan promoviendo el autoestudio entre los docentes a través de "paquetes didácticos", libros con secuencias de actividades cuyo propósito fundamental es que los maestros en servicio logren además del dominio de los contenidos curriculares, apropiarse de una metodología particular para tratar esos contenidos.

El trabajo que se presenta está relacionado con esta última estrategia de actualización. Se ofrecen testimonios en video del quehacer docente de los asesores de matemáticas que han acompañado académicamente la actualización de maestros de educación básica en servicio desde 1996 a la fecha.

Es importante advertir que aunque este trabajo se inscribe en un programa de carácter nacional, los testimonios que se presentan son exclusivamente de los asesores del Distrito Federal, capital del país.

1. La actualización docente planteada como proceso permanente vs. La capacitación "en cascada"

Las asesorías se organizan considerando las actividades propuestas en los "paquetes didácticos" y se procura el intercambio permanente de experiencias entre los maestros participantes. Por ello, lo primero que destaca en las intervenciones de los asesores es, la convicción de que la actualización es un proceso continuo de formación que les ha permitido aprender de los propios colegas que asisten a los Centros de maestros:

Ser asesor ha constituido para mí, una experiencia innovadora...
Me ha permitido mantener el intercambio con diferentes maestros...
He aprendido junto con ellos (con los maestros)

La función de los asesores se vive como una experiencia innovadora en tanto que se plantea como un espacio de formación "libre" y "voluntario", al que los maestros tienen acceso de manera adicional, toda vez que también es posible, avanzar en la resolución de los paquetes didácticos de manera autodidacta y presentar el examen correspondiente en su oportunidad.

Aunque la acreditación de los Cursos Nacionales depende de la presentación de un examen de carácter nacional, la labor de los asesores se vive como una constante preocupación porque los maestros desarrollen nuevas habilidades para trabajar con sus alumnos en las aulas:
Es importante vincular lo que hacen aquí (en los Centros) con aquello que realizan en las aulas

Lo que se hace aquí (en los Centros) lo van a verificar en su trabajo con sus alumnos

Es así que la labor de los asesores no puede ser evaluada por el número de maestros acreditados en el examen, sino más bien por el impacto que su trabajo logra en el trabajo cotidiano con sus alumnos. Esto último es una tarea pendiente para los asesores y todos aquellos involucrados en este proceso de actualización.

A través de los testimonios, se puede evidenciar el manejo de una metodología cuyo punto de partida es la solución de situaciones problemáticas así como, el involucramiento personal que asume el asesor como parte de su función para colaborar con sus colegas en proceso de actualización.

Para ser asesor, es importante no olvidar lo que es ser maestro frente a grupo
Para llevar a cabo mi función, yo me ocupo mucho de platicar con los maestros de grupo

La actualización en matemáticas se vive por tanto, como un proceso de constante formación personal y superación profesional cuyas metas son: por un lado, la modificación de algunas actitudes frente a la matemática escolar y, por otro, la estructuración de una nueva práctica docente que da cabida y valora los distintos procedimientos que utilizan los alumnos para resolver las situaciones planteadas.

La labor de algunos asesores se ha podido constatar con sus grupos de trabajo y en la construcción de talleres breves para profundizar el tratamiento de algunos temas. Por otra parte, hay indicios de que algunos asesorados han empezado a vivir el proceso de actualización como forma de generar ciertas modificaciones en el aula, se sabe por ejemplo, que regresan a comentar algunas actividades con los asesores y a veces también, solicitan la organización de talleres breves que les permitan profundizar en ciertos contenidos.

Los paquetes didácticos con los cuales se promueve la actualización de los docentes en México han permitido entre otras cosas, la conformación de este grupo de asesores quienes acompañan académicamente a los maestros en el proceso de actualización y además, diseñan materiales de apoyo y técnicas de estudio que contribuyen en mi opinión, a avanzar en el mejoramiento de la calidad de la educación básica en este país, toda vez que promueven en los asesorados ideas que fundan una nueva actuación docente en las aulas.

A diferencia de una tradición de la actualización basada en la “capacitación en cascada”, que buscaba ofrecer “alternativas” de trabajo de cualquier asignatura en diferentes momentos del ciclo escolar, la existencia de este grupo de asesores constituye un avance en la organización de los eventos de actualización, pues conforman un equipo que apoya el diseño de talleres con temas particulares y orientan a los maestros en relación con los nuevos materiales de apoyo existentes en las escuelas.

2. La importancia del trabajo colegiado

Los asesores cuentan con algunos documentos de apoyo en los que se define su función y se ofrecen sugerencias para llevar a cabo su labor con los docentes en proceso de actualización. Los títulos son:

El taller como modalidad de trabajo colectivo (García 1998a)
La función del coordinador en el taller (García 1998b)
Guía para coordinadores de grupo (García 1998c)

Sugerencias para la formación de asesores de los Cursos Nacionales de Actualización (UNYDACT 1998)

Estos son los documentos que junto con cada paquete didáctico, han orientado la labor de los asesores en los Centros de maestros. Esta literatura está encaminada a ser un auxiliar para "diseñar, organizar y conducir de manera cada vez más eficiente y con calidad los talleres, grupos autónomos de aprendizaje y sesiones de asesoría... en la que se concreten las acciones de actualización destinadas a los maestros de educación básica en servicio... (García 1998ª, 5).

Como se lee, el Programa Nacional de Actualización Permanente en México, busca promover como modalidad de actualización la construcción autogestiva de grupos de estudio. Sin embargo, esta propuesta ha empezado a operar gracias a la entusiasta participación de los asesores quienes se han ocupado de hacer la promoción de sus servicios en los Centros de maestros y paulatinamente han conformado grupos regulares de asesoría.
Para llevar a cabo la promoción, los asesores han visitado algunas escuelas de la zona de influencia y han impartido talleres que sirven como introducción al paquete didáctico para iniciar posteriormente las asesorías correspondientes.

Las asesorías de matemáticas en los Centros de maestros, se han vivido hasta ahora como conformación de un grupo de estudio que participa en un Taller. El asesor promueve la solución del paquete didáctico y favorece el intercambio de opiniones entre los participantes, en concordancia con aquello que se postula en los manuales:

> *El proceso de taller genera nuevas relaciones pedagógicas, donde los participantes en la experiencia se convierten en un equipo para reflexionar sobre el trabajo que realizan e indistintamente van asumiendo roles de animador, de investigador, de educador o de alumno. En la tarea común de resolver problemas, van integrando la teoría y la práctica y aprender a ser (afirmación de sí mismos), aprenden a aprender (nuevas formas de adquisición de conocimientos) y aprender a ser (solución de problemas, clave y centro del proceso de aprendizaje).*
>
> Esta nueva forma de aprendizaje exige reeducación y lo que algunos autores llaman, por sus cualidades particulares, pedagogía de la responsabilidad. (García 1998ª, 17).

Es así que los planteamientos de trabajo colectivo han empezado a tener vida con la participación de los asesores de matemáticas en los centros de maestros.

Algunos asesores han logrado conformar un grupo de estudio en el que se intercambian los procedimientos para resolver las situaciones planteadas en el paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (Block (coord) et al. 1996) y opinan sobre las ventajas de trabajar con la modalidad de Taller.

El Taller me parece el modo más adecuado de propiciar que los maestros tomen conciencia y logren modificar sus actitudes en el aula

Es fundamental que los maestros tomen conciencia para actuar de otra manera con sus alumnos

El Taller aparece como la mejor opción para favorecer el tratamiento de algunos temas, pero además, como espacio que exige a los asesores buscar su propio mejoramiento profesional y personal:

Estar frente a los maestros es un compromiso muy grande que obliga a estar en constante preparación

Los asesores también necesitamos capacitarnos más

En relación con la formación de los asesores y su permanente actualización es importante destacar que en la mayoría de los casos, son maestros que tienen la formación en educación matemática aunque también hay maestros cuyas experiencias profesionales les han llevado a acercarse a las matemáticas sin llegar a ser especialistas; en todos los casos, se ha buscado que los asesores demuestren dominio sobre los contenidos expuestos en los paquetes didácticos y que muestren habilidad para conducir a grupos de maestros. Eventualmente, se les invita a participar en talleres, conferencias y a una reunión mensual en la que se intercambian opiniones y se sugieren formas de proceder en las asesorías.

El "trabajo colegiado" a través del cual se promueve la propia actualización de los asesores se vive en dos momentos: en el intercambio con los asesorados y en las reuniones con los asesores de la asignatura.

3. En relación con la vinculación entre primaria y secundaria

Aunque la reforma educativa iniciada en 1993 en México, se ha postulado como reforma a la educación básica en su conjunto, lograr la continuidad entre los niveles de preescolar, primaria y secundaria es todavía una tarea pendiente.

En relación con la labor de los asesores, se ha establecido la posibilidad de que los asesores de matemáticas compartan algunas tareas relacionadas con la formación permanente: Revisión conjunta de materiales, lecturas comunes, asistencia a eventos académicos y que paulatinamente entre los asesores de secundaria haya disposición a ofrecer ayuda a los asesores de primaria.

Este trabajo colegiado ha empezado a perfilarse como una novedad del grupo de asesores de matemáticas del ProNAP, por lo que resulta altamente significativo compartirlo con todos los interesados en los procesos de formación del profesorado y los testimonios finales del video permiten dar cuenta de la importancia de favorecer la interrelación entre los asesores de primaria y los asesores de secundaria:

Conocer el paquete de primaria me ha permitido comprender mejor el paquete de secundaria
Ahora que los muchachos de primaria han trabajado con una metodología basada en la solución de problemas, es importante que los maestros de secundaria reconozcamos ese antecedente para ayudarlos a avanzar en la secundaria

Consideraciones Finales

La labor de los asesores de matemáticas se inscribe en una política educativa que busca promover la actualización permanente de los docentes y que la ha postulado como proceso de autoestudio. Sin embargo, se ha visto que ese autoestudio no ha resultado una estrategia posible entre los maestros de grupo, por lo que la función de los asesores ha resultado de vital importancia para promover la actualización y dar vida a los centros de maestros en el Distrito Federal.

En virtud de que durante el periodo 1996-2000, sólo existía el paquete didáctico para la actualización en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, los maestros de primaria sólo tenían esa opción para canalizar sus esfuerzos tendentes a lograr una calificación en el rubro de Cursos Nacionales de su cartilla de evaluación en Carrera Magisterial. Esta circunstancia favoreció el análisis y desarrollo de actividades destinadas a reflexionar y en algunos casos, modificar su estilo docente al tratar contenidos matemáticos.

Los asesores de matemáticas primaria por su parte, vieron crecer paulatinamente sus grupos de estudio, situación que ha permitido que los asesores de matemáticas secundaria empiecen a convertirse en un apoyo más a estos grupos de estudio.

En los Centros de maestros donde se ha hecho posible que los asesores de matemáticas de primaria y de secundaria colaboren en la atención de los maestros, se ha empezado a hacer notoria la necesidad de avanzar en la organización de talleres que hagan evidente la vinculación entre los niveles.

La función actualizadora de los asesores cobraría mayor impacto si se lograra realizar el seguimiento de los maestros asesorados en su desempeño dentro del aula. Parece que también resultaría útil conocer el desempeño de otros asesores de matemáticas en otras entidades del país.

Ahora bien, aunque resulta importante que los asesores de primaria y de secundaria se apoyen y proyecten su vinculación, resulta urgente analizar la situación particular de los maestros de secundaria, pues es notoria su ausencia en los centros de actualización. En el avance por el mejoramiento de la calidad educativa es útil contar con nuevos materiales de apoyo (Planes y programas, libros de texto, ficheros de actividades didácticas, libros para el maestro) pero resulta fundamental planear y apoyar la formación de los sujetos que apoyan y orientan a los maestros en el uso de esos recursos.

Referencias bibliográficas

Alarcón, J y Rosas, R. (1995). **La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria**. Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP. México.

Block, D. (coord) et al. (1996). **La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros**. Parte 1 y Parte 2. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP, México.

García, M. (1998a). **El taller como modalidad de trabajo colectivo**. Serie: Cuadernos de apoyo a la actualización, Cuaderno 1. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP, México.

García, M (1998b**). La función del coordinador en el taller**. Serie: Cuadernos de apoyo a la actualización, Cuaderno 2. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP, México.

García, M (1998c**). Guía para coordinadores de grupo**. Serie: Cuadernos de apoyo a la actualización, Cuaderno 3. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP, México.

Fuentes Molinar, O (1999). **Perspectiva de la educación básica en México**. Conferencia dictada en el foro nacional "La educación básica ante el nuevo milenio", Guadalajara, Jalisco. En *Cero en conducta* Año 14 No. 48. Abril 2000.

UNYDACT (1998). **Sugerencias para la formación de asesores de los Cursos Nacionales de Actualización**. Serie: Cuadernos de apoyo a la actualización. Cuaderno 4. Programa Nacional de Actualización Permanente. SEP, México.

Los Foros de Discusión Electrónicos en Matemáticas

Liliana Suárez Téllez, CICATA-IPN
lsuarez@mail.cicata.ipn.mx
Francisco Cordero Osorio, Cinvestav-IPN
fcordero@mail.cinvestav.mx
México

Resumen

La introducción de la tecnología de la información obliga el planteamiento de preguntas que interesan a la matemática educativa. Algunas de éstas se refieren a los cambios en las interacciones entre los participantes del sistema educativo en diseños de situaciones de aprendizaje que consideren el uso de esta tecnología.

En la bibliografía del tema hay una constante en cuanto a que el ambiente que se genera propicia habilidades como la resolución de problemas, el análisis, la síntesis, la búsqueda, la selección de información, etc. Sin embargo hay poca información sobre los factores que determinan el desarrollo de estas habilidades y son pocos los ejemplos de estos aspectos en una disciplina concreta.

En este escrito reportamos un trabajo exploratorio sobre los foros de discusión electrónicos en un seminario de investigación de matemática educativa. Nuestra intención es describir el escenario que se genera al introducir esta herramienta en un ambiente de aprendizaje. Planteamos la necesidad de generar marcos y herramientas de análisis de las interacciones entre los participantes de una discusión, para lo cual presentamos lo que observamos en una discusión sobre el concepto de espacio vectorial. Describimos también las herramientas que hicieron posible dichas observaciones y discutimos las implicaciones que esta tecnología pudiera tener en el diseño de cursos de matemáticas.

Contexto

El seminario de Educación y Nuevas Tecnologías de un programa de Posgrado de Maestría en Matemática Educativa[11] sirvió como escenario para observar el uso de herramientas de comunicación electrónica. Este seminario tuvo como propósito establecer un estado del arte de las relaciones existentes entre la tecnología de la información y los objetos de estudio de nuestra disciplina. Podemos mencionar como resultados que la actividad en este seminario permitió que los estudiantes se familiarizaran con algunos términos (nombres y características de la tecnología) empleados por la comunidad interesada en usar la tecnología de la información en educación, así como algunos planteamientos hechos al interior de nuestra disciplina.

La metodología para llevar a cabo el curso consideró el uso de la computadora para la comunicación entre los estudiantes y con el profesor en las siguientes actividades: reportes de lecturas realizadas en un procesador de palabras, comunicación entre los integrantes de los equipos por correo electrónico, uso de un editor de presentaciones para exponer ideas, usar listas de correo para la comunicación de todo el grupo, la entrega de trabajos vía correo electrónico o vía una red local, la búsqueda de información en Internet, el manejo de plataformas para organizar actividades de aprendizaje, la asistencia a videoconferencias, uso de la comunicación electrónica simultánea (*chat*), el uso de procesadores matemáticos y el desarrollo y conclusión de discusiones por vía electrónica.

El objetivo de proponer este conjunto de actividades fue que los estudiantes conocieran una amplia gama de herramientas tecnológicas diseñadas para fomentar un tipo de comunicación distinto, que permitiera que se conocieran por medio del uso cotidiano, pero

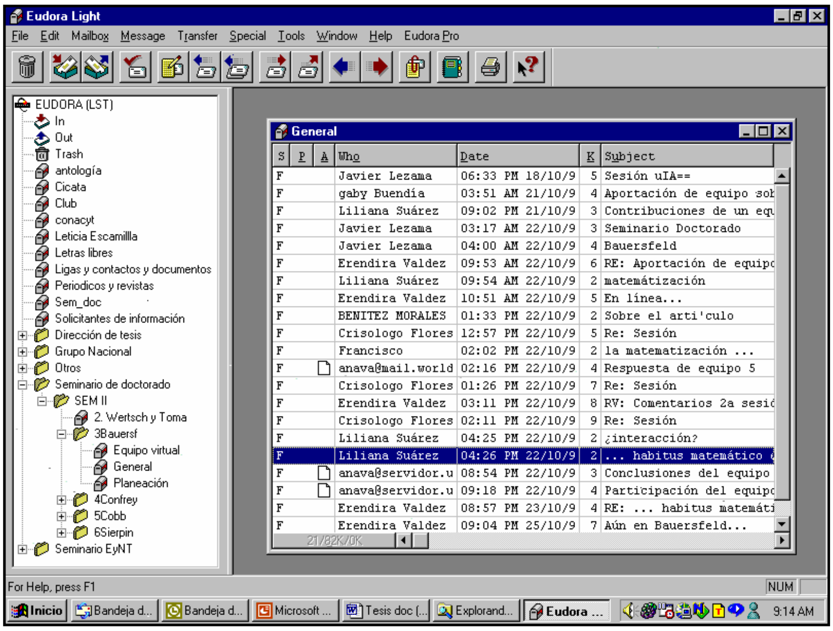
[11] Del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. (1999)

sobre todo que permitiera discutir sus potencialidades y limitaciones a partir de la experiencia de uso para cumplir una tarea específica del curso (un reporte, una presentación, la resolución de un problema, una discusión). De entre las actividades propuestas particularmente observamos una que es la que reportamos en este trabajo

Los foros de discusión electrónicos

Los foros de discusión electrónicos son una herramienta de comunicación asincrónica, es decir, que no requiere que se realice de manera simultánea, que permite "organizar por respuesta" las participaciones de la discusión en documentos *html,* y que puede ser pública o disponible para los miembros de un grupo.

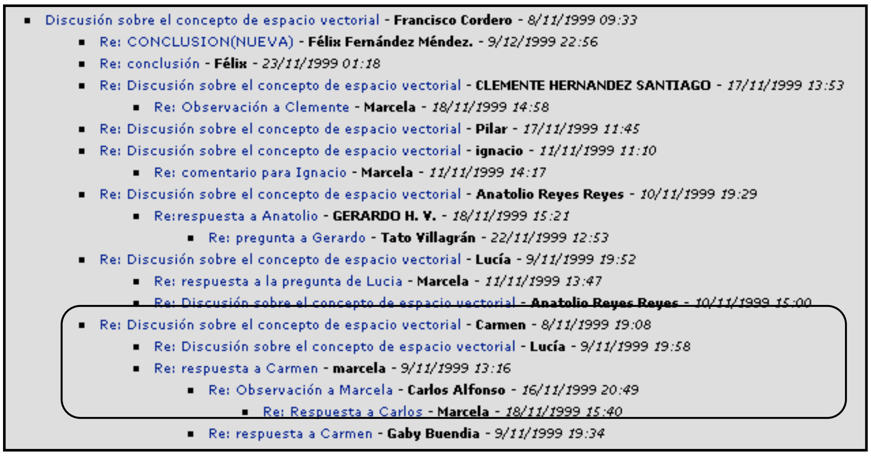
Figura 1. Organización de las participaciones de una discusión en un programa de correo electrónico



La experiencia

Se propuso a los estudiantes realizar nueve discusiones a través de un medio electrónico distribuidas a lo largo de 20 semanas del seminario. Siete de estas discusiones se realizaron mediante una lista de correos y que funcionaba mediante el envío de mensajes por correo electrónico a las direcciones electrónicas de los integrantes del curso (once estudiantes y dos profesores). Las dos discusiones restantes se llevaron a cabo a través de una aplicación en Internet que gestiona discusiones y que permite su organización por respuestas, es decir, permite identificar las respuestas a cierta participación gracias a que introduce un margen distinto de tal manera que las respuestas a un cierto mensaje se anidan en torno a la respuesta original (*Véase la figura 2*).

Figura 2. Ordenación en niveles diferentes de las respuestas a los mensajes.



- Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Francisco Cordero** - *8/11/1999 09:33*
  - Re: CONCLUSION(NUEVA) - **Félix Fernández Méndez.** - *9/12/1999 22:56*
  - Re: conclusión - **Félix** - *23/11/1999 01:18*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **CLEMENTE HERNANDEZ SANTIAGO** - *17/11/1999 13:53*
    - Re: Observación a Clemente - **Marcela** - *18/11/1999 14:58*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Pilar** - *17/11/1999 11:45*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **ignacio** - *11/11/1999 11:10*
    - Re: comentario para Ignacio - **Marcela** - *11/11/1999 14:17*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Anatolio Reyes Reyes** - *10/11/1999 19:29*
    - Re:respuesta a Anatolio - **GERARDO H. V.** - *18/11/1999 15:21*
      - Re: pregunta a Gerardo - **Tato Villagrán** - *22/11/1999 12:53*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Lucía** - *9/11/1999 19:52*
    - Re: respuesta a la pregunta de Lucia - **Marcela** - *11/11/1999 13:47*
    - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Anatolio Reyes Reyes** - *10/11/1999 15:00*
  - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Carmen** - *8/11/1999 19:08*
    - Re: Discusión sobre el concepto de espacio vectorial - **Lucía** - *9/11/1999 19:58*
    - Re: respuesta a Carmen - **marcela** - *9/11/1999 13:16*
      - Re: Observación a Marcela - **Carlos Alfonso** - *16/11/1999 20:49*
        - Re: Respuesta a Carlos - **Marcela** - *18/11/1999 15:40*
      - Re: respuesta a Carmen - **Gaby Buendia** - *9/11/1999 19:34*

El tema de las discusiones estuvo relacionado con las actividades que se llevaron a cabo en el seminario: discusión de la revisión bibliográfica, discusión sobre los trabajos relacionados con el uso de la tecnología desarrollados en nuestro grupo de investigación[12] y la discusión sobre el uso de la tecnología en nuestra disciplina como herramienta y como objeto de estudio.

La observación

Particularmente observamos las interacciones que se generaron durante la última discusión del curso relativa al concepto de espacio vectorial. El objetivo de proponer esta discusión fue sometemos a una discusión matemática para percibir algunas las dificultades de una discusión que invocara conceptos matemáticos.

La ordenación de la tabla 1 permite ver las interacciones que se dan entre los estudiantes. Seguir el camino de las flechas indica el camino que tiene una discusión, por ejemplo 1→1.1→1.1.2→1.1.2.1 o 3→3.1→3.1.1. La diversidad de flechas que salen una sola celda indica la diversidad de respuestas que generó dicha participación primera, por ejemplo 1.1→1.1.1 y 1.1→1.1.2. El regreso de la flecha al mismo renglón indica una interacción del tipo "respondo a la respuesta a mi comentario", por ejemplo 1.1→1.1.2→1.1.2.1.

Otro tipo de información que se puede leer en la tabla 1 es el número de participaciones que tienen cada uno de los participantes, la naturaleza de estas participaciones (inicial o respuesta de primer, segundo, tercer nivel) y también ver que participaciones no generaron ninguna respuesta.

El escenario

Las características que observamos en esta discusión son, en términos generales, las mismas que tiene una discusión matemática sin el uso de estos medios: se pueden plasmar diferentes concepciones y experiencias sobre el tema tratado, de observan distintas modalidades de debate, así como se pueden observar los recursos que se usan para argumentar (dar ejemplos, citar autores, etc.), las reinterpretaciones y consideraciones que se hacen a partir de otras participaciones, etc. Las ventajas que un foro de discusión electrónico

[12] Grupo de investigación alrededor del Área de Educación Superior del Departamento de Matemáticas del Cinvestav-IPN.

sobre una discusión que se hace de manera presencial son de dos tipos. Por un lado la discusión queda plasmada de manera inmediata en un registro textual, lo que permite contar con su registro para futuros análisis también de manera inmediata. Y, por otro lado, la discusión se lleva a cabo en forma escrita, lo que trae una naturaleza diferente de las participaciones, ya que están no sólo se dicen sino que se escriben, lo que le da un carácter más permanente e influye en el contenido de estas participaciones.

	10 semana					11 semana					12 semana	
P[13]	Inicio											
A[14] (3)	**1**											
A (10)		1.1		2.2, 4.1						1.1.2.1, 6.1		
I[15] (1)		1.1.1										
A (9)		2, 1.2										
A (2)							1.1.2					
A (1)			3, 2.1									
A (6)									3.1			
I (2)											3.1.1	
A (8)				**4**								
A (11)								**5**				
A (4)								**6**				
A (5)												Fin
A (7)												

Tabla 1. Ordenación de las participaciones de acuerdo a las respuestas.

Identificamos como una necesidad la generación de instrumentos que permitan el análisis de las interacciones entre los participantes en estas discusiones. ¿Cuáles son los criterios que podrían permitir la evaluación de una discusión?, ¿cuál es el papel de la naturaleza del contenido de la discusión en las interacciones que se fomentan entre los participantes?

La situación actual de nuestro grupo de investigación rebasa esta primera experiencia. Actualmente participamos en el desarrollo de un programa de investigación en matemática educativa a distancia, que se gestiona a partir de una plataforma electrónica dentro de Internet (BSCW), y en la que la interacción de los estudiantes se sostiene, principalmente, en la actividad de los foros de discusión. Hemos aprendido en la experiencia de un semestre de gestión de cursos en esta plataforma, pero esperamos hacer una observación detallada en los cursos siguientes que permitan avanzar en dar respuesta a nuestras interrogantes.

13 Profesor
14 Alumno, por ejemplo A(10) alumno 10 en la lista
15 Persona externa al seminario

Referencias bibliográficas

Gerber, S; Shuell, T; Harlos, C. (1998). Using the Internet to Learn Mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*. 17(2/3), 113-132.

Oktaç, A. (1998) Álgebra lineal a distancia. Antología del Área de Nivel Superior del DME del CINVESTAV-IPN No. 2.

Shaffer, D; Kaput, J. (1999) Mathematics and Virtual Culture: An Evolutionary Perspective on Technology and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematical*, 37, 97-119.

Shotsberger, P. (1999). The INSTRUCT Project: Web Professional Development for Mathematics.

Direcciones electrónicas

http://bscw.gmd.de

www.melodysoft.com/cgi-bin/foro.cgi?ID=eynt

Modelos Matemáticos y su Clasificación para la Ingeniería

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional
México
Nivel Educativo: Superior y Postgrado

Pensamiento matemático avanzado

Resumen

La matemática en el contexto de la ingeniería, como metodología didáctica para la enseñanza de la matemática en escuelas de ingeniería[16], requiere de una etapa que compete a los modelos matemáticos[17], es decir, a la etapa en la que se representará un problema dado a través de relaciones matemáticas[18,19], como lo son las ecuaciones, sistemas, distribuciones, etc.[20,21]

En el presente trabajo se lleva a cabo una clasificación, en dos direcciones, de los modelos matemáticos de la ingeniería, y se ilustra con ejemplos de la ingeniería electrónica y sus ramas afines. El objetivo de la clasificación es el de tener conocimiento más amplio acerca de los modelos para poderlos incorporar en los cursos de matemáticas de las escuelas de ingeniería.

Introducción.

La matemática en el contexto de la ingeniería, como metodología didáctica para la enseñanza de la matemática en escuelas de ingeniería[6], requiere de una etapa que compete a los modelos matemáticos[11], es decir, a la etapa en la que se representará un problema dado a través de relaciones matemáticas[2, 5,10], como lo son las ecuaciones, sistemas, distribuciones, etc.[14, 15]

En el presente trabajo se lleva a cabo una clasificación, en dos direcciones, acerca de los modelos matemáticos de la ingeniería y se ilustra con ejemplos de la ingeniería electrónica y sus ramas afine. El objetivo de la clasificación es el de tener conocimientos más amplios acerca de los modelos para saber cómo incorporarlos en el currículo de los cursos de matemáticas en las escuelas de ingeniería.

Los Modelos, la Enseñanza y el Currículo en Ingeniería.

Si bien los programas de estudio, de matemáticas en carreras de ingeniería, no siempre contemplan todos los temas que son necesarios para los demás cursos de la propia ingeniería[3], también es cierto que existen elementos que quedan en "tierra de nadie" y que sin embargo, se supone que el ingeniero en ejercicio de su labor debe conocer y manejar con habilidad[1], entre estos elementos se localizan los modelos matemáticos[11], ya que por un lado no existe ninguna asignatura de la ingeniería que los trabaje, y por otro, resulta los profesores de matemáticas sienten que este punto compete a los profesores de los cursos propios de la

---

[16] Camarena G. Patricia, (1995). "*La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*", XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Colima.
[17] Camarena G. Patricia, (1999). *Los modelos matemáticos y el contexto de la ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.
[18] Camarena G. Patricia, (1987). "*Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*", Tesis de Maestría en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.
[19] Camarena G. P., Rocha M. (1997). *Modelos matemáticos de la electricidad y magnetismo*. XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Morelia.
[20] Camarena G. P. y Suárez B. V. (1999). *La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.
[21] Camarena G. P. y Ponce C. J. (1999). *Modelos matemáticos de la física en ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.

ingeniería, mientras que estos últimos presuponen que los maestros de matemáticas son quienes deben enseñar al estudiantes a modelar fenómenos de la ingeniería a través del modelaje de diversos problemas que éste debe plantearle a los alumnos durante la enseñanza de las matemáticas[4].

El tema de los modelos se puede considerar que es un tema que está presente en el llamado currículo oculto, pero no se trata de un elemento con el cual nada pasa si no está presente en los cursos del futuro ingeniero; éste es un elemento que es clave para el desarrollo del ingeniero en ejercicio de su profesión[4], por lo que no puede ser descuidado.

Este elemento debe ser explícito en los programas de estudio de carreras de ingeniería, en particular cuando el estudiante tenga los conocimientos necesario, de la ingeniería y de la matemática, como para poder elaborar modelos matemáticos, los cuales le integrarán el conocimiento[11].

Más aún, la matematización de los fenómenos y problemas que se presentan en el campo laboral del futuro ingeniero es un punto de conflicto para el ingeniero[4], ya que éste recibió sus cursos de matemáticas por un lado y los de la ingeniería por otro lado, de forma tal que en el momento de hacer uso de las dos áreas del conocimiento sus estructuras cognitivas están desvinculadas y él debe integrarlas para poder matematizar el problema que tiene enfrente[4, 9,16].

La Metodología de Trabajo.

Dado que se desean clasificar los modelos matemáticos que se emplean en la ingeniería, en particular este trabajo se aboca a la ingeniería electrónica y sus ramas afines, la metodología que se empleará será la del análisis de textos de ingeniería[1], así como el análisis de algunos proyectos investigación de la ingeniería en donde ha elaborado modelos matemáticos[8] la que suscribe, los cuales corresponden a la ingeniería aplicada.

Como es sabido, el análisis de textos constituye una metodología para la detección de ciertos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias[1]. Depende de lo que se persigue para mirar de la forma indicada a esos textos. Así, para el caso de los modelos matemáticos en ingeniería, lo que principalmente se busca es:

1. *Problemas que se plantean para ser abordados por el autor.*
2. *La manera como representan matemáticamente los problemas que se han planteado.*
3. *Los conceptos de temas de la ingeniería que se describen matemáticamente*.

La Muestra.

Para el análisis de textos se tomó en cuenta la clasificación que establece ANUIES sobre las asignaturas de carreras de ingeniería. Esta clasificación define 5 bloques de materias:

- las ciencias básicas
- las ciencias básicas de la ingeniería
- las ciencias de especialidad de la ingeniería
- las ciencias sociales y humanísticas
- las ciencias económicas y administrativas

Es claro que para la presente investigación los tres primeros bloques son los que interesan. Dentro de las ciencias básicas se encuentran la física y la química como base de las ciencias básicas de la ingenieía[1], mientras que la matemática es una herramienta de apoyo a éstas, sin olvidar el carácter formativo[1, 4,6] que esta última ofrece al futuro ingeniero. De manera semejante, las ciencias básicas de la ingeniería son el fundamento[1] de las áreas de especialización de la ingeniería. Véase el siguiente esquema.

CIENCIAS DE ESPECIALIDAD ↑ CIENCIAS BÁSICAS DE LA INGENIERÍA ↑ CIENCIAS BÁSICAS

Esquema No. 1

Por lo anterior, es que se analizaron los textos correspondientes a las materias de física y química. Prosiguiendo con el análisis de los textos de las materias de las ciencias básicas y de especialización de las carreras de ingeniería electrónica y sus ramas afines.
Para el caso de la ingeniería electrónica y ramas afines, en el cuadro No. 1, se muestran las materias típicas de cada etapa cognitiva de la ingeniería[3].

CIENCIAS BÁSICAS	CIENCIAS BÁSICAS DE LA INGENIERÍA	CIENCIAS DE ESPECIALIZACIÓN DE LA INGENIERÍA
Física (2-4)*	Circuitos eléctricos (1-5)	Electrónica
Química (0-2)	Teoría electromagnética (1-3)	Comunicaciones
	Computación (1-4)	Control
	Electrónica básica (1-5)	Acústica
	Comunicaciones básicas (0-3)	Robótica
		Telefonía
		Computación

Cuadro No. 1

* La notación (a-b) representa el número de asignaturas que posee cada materia descrita.

La Clasificación.

Al igual que cualquier objeto en donde la clasificación de éste no tiene por que ser única, se han detectado, a través del análisis que marca la metodología, que para los modelos matemáticos de la ingeniería existen al menos dos clasificaciones. La primera se estructura de acuerdo al uso que le otorga la ingeniería al modelo dado, mientras que la segunda clasificación se lleva a cabo en función de las etapas de conocimiento por las que tiene que transitar el futuro ingeniero.

Para entender mejor las clasificaciones dadas se definirá lo que se entiende por modelo matemático en esta investigación.

Para iniciar, se tiene que la matemática en ingeniería es un lenguaje, ya que casi todo lo que se dice en la ingeniería se puede representar a través de simbología matemática6.

Es más, el que se represente a través de la terminología matemática y se haga uso de la matemática en la ingeniería, le ayuda a la ingeniería a tener carácter de ciencia por un lado y por el otro, le facilita su comunicación con la comunidad científica de ingenieros[13].

Dentro del conocimiento de la ingeniería, se tienen problemas de la ingeniería, así mismo, se tienen objetos de la ingeniería que para su mejor manejo o referencia se les representa matemáticamente y también se tienen situaciones que se pueden describir a través de la simbología matemática.

Como por ejemplo:

a) Problemas.

Se quiere conocer el fenómeno de carga de un condensador (capacitor), cuya capacitancia es C, el cual está conectado en serie con un resistor de resistencia R, a las terminales de una batería que suministra una tensión constante V, este planteamiento se puede representar a través de la ecuación diferencial lineal siguiente[2]:

$$R\frac{d}{dt}q(t)+\frac{1}{C}q(t)=V$$

b) Objetos.

Considérese una señal eléctrica del tipo alterno sinusoidal, la señal es el objeto de la ingeniería el cual se representa a través de la función[5]:

$$f(t) = A \text{ sen } (t+\propto)$$

c) Situaciones.

El condensador de carga q=q(t) estaba totalmente descargado al inicio del problema. Esta situación se puede representar matemáticamente, tomando en cuenta que al inicio del problema t=0 y que la carga es una función del tiempo, como[2]:

$$q(0)=0$$

De los tres rubros mencionados los que competen a la definición de modelos, que se da en esta investigación, son los objetos y los problemas, así la definición es:

> *Un modelo matemático es aquella relación matemática que describe objetos o problemas de la ingeniería.*

Cuando los modelos matemáticos describen objetos de la ingeniería, éstos dan origen a modelos de tipo dinámico o estático. Los modelos dinámicos son relaciones matemáticas que constantemente, por las necesidades de la ingeniería, requieren de modificaciones matemáticas, ya sea que se efectúen operaciones matemáticas con éstas (como el caso de una señal eléctrica que se modela matemáticamente a través de una función real de una variable real, y si se le altera su amplitud de onda y su frecuencia la función quedará modificada por la multiplicación de ésta por una constante y la composición de la misma con una función constante[5]), o que se les utilice para establecer nuevos modelos matemáticos. Los modelos estáticos son relaciones matemáticas que describen a un objeto de la ingeniería como si fuera un “apodo”, es decir, matemáticamente no se hace nada más (como el caso de la función impulso en ingeniería electrónica, remítase a la referencia bibliográfica No. 12).

Como se puede observar de esta clasificación, en modelos estáticos y dinámicos, ésta está en función del uso que se le da en la ingeniería, por lo que es obvio que un modelo dado podrá ser dinámico en alguna especialidad de la ingeniería, mientras que en otra podrá ser estático. Como se puede ver de este punto, es importante conocer la ingeniería en donde el docente labora para determinar los elementos de la clasificación, al igual que se menciona en la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería a través de la matemática en contexto.

Cuando los modelos matemáticos describen problemas de la ingeniería, éstos se pueden clasificar en modelos de primera generación[11], los cuales se obtienen de datos experimentales de la ingeniería, como por ejemplo determinar la ley de Ohm[10]; en general son relaciones matemáticas que dan origen a leyes o teoremas de la física, la cual es el cimiento de la ingeniería electrónica y sus ramas afines, ya que para el caso de estas ingenierías se pueden considerar que son física aplicada. Véase en el cuadro No.1 el número de incidencias de la materia de física con respecto a la de química.

Si se hace uso de estos modelos de primera generación para construir nuevas relaciones, a estás se les denomina modelos de segunda generación, como por ejemplo cuando construimos la ecuación diferencial que modela un circuito eléctrico[7] en el que interviene una resistencia, o sea, que aparece la relación que establece la ley de Ohm, que es de primera generación. Estos elementos se estudian en las asignaturas de circuitos eléctricos que forma parte de las materias básicas de la ingeniería.

Si a partir de estas ecuaciones construimos nuevos modelos, como por ejemplo sistemas de ecuaciones que modelan una red de circuitos eléctricos, entonces tenemos los llamados modelos de tercera generación. Estos sistemas son utilizados en la teoría de control, materia que pertenece al grupo de materias de especialización de la ingeniería.

Cuando el ingeniero está en ejercicio de su labor profesional, requiere de modelos que describen problemas complejos, los cuales puede trabajar de forma más eficiente a través de la paquetería de software existente denominada de simulación, a esto modelos se les denomina de cuarta generación. Es decir, los modelos de cuarta generación son aquellos modelos de tercera generación que se modelan de forma cibernética, ya que tienen la posibilidad de ser simulados a través de la computadora, con lo cual se construye una familia de modelos matemáticos sobre el mismo elemento.

De lo anterior se observa la correlación existente entre la clasificación de estos modelos y las áreas cognitivas de la ingeniería, como se muestra en el cuadro No.2.

ÁREAS COGNITIVAS DE LA INGENIERÍA	TIPOS DE MODELOS
Ciencias básicas	Modelos de primera generación
Ciencias básicas de la ingeniería	Modelos de segunda generación
Ciencias de especialización	Modelos de tercera generación
Ingeniería aplicada	Modelos de cuarta generación

Cuadro No. 2

Conclusiones.

Resumiendo se tiene que los modelos se clasifican en función del uso que se les da en la ingeniería, así como de cuerdo a las áreas cognitivas de la ingeniería, al mismo tiempo que los primeros modelan objetos de la ingeniería mientras que los segundos modelan problemas de la ingeniería. Véase el siguiente cuadro No.3.

<table>
<tr><th colspan="6">CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Modelaje de objetos de la ingeniería</td><td colspan="4">Modelaje de problemas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td colspan="2">La clasificación está en función del uso que le da la ingeniería</td><td colspan="4">La clasificación está en función de las áreas cognitivas de la ingeniería</td></tr>
<tr><td>Modelos estáticos</td><td>Modelos dinámicos</td><td>Modelos de primera generación</td><td>Modelos de segunda generación</td><td>Modelos de tercera generación</td><td>Modelos de cuarta generación</td></tr>
</table>

Cuadro No.3

En estos momentos la autora y su grupo de investigación se encuentran trabajando sobre un banco de modelos para categoría de clasificación, para elaborar materiales de trabajo para los profesores de matemáticas en carreras de ingeniería electrónica y sus ramas afines.

Referencias bibliográficas

Camarena G. Patricia, (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1988). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Propuesta curricular para la academia de matemáticas del Departamento de ICE-ESIME-IPN*. Directora del proyecto: Patricia Camarena Gallardo, registrado ante la DEPI del IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1995). *La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería*. XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Camarena G. Patricia, (1996). *El contexto y las ecuaciones diferenciales lineales*. Memorias del 6º Coloquio Académico de la ESIME-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1997). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Atenuación por lluvia en banda Ka*. Directora del proyecto: Patricia Camarena Gallardo, registrado ante la DEPI del IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1997). *Documento de trabajo para la investigación sobre modelos matemáticos en ingeniería, nov-97*. ESIME-IPN, México.

Camarena G. P., Rocha M. (1997). *Modelos matemáticos de la electricidad y magnetismo*. XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, México.

Camarena G. Patricia, (1999). *Los modelos matemáticos y el contexto de la ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.

Camarena G. Patricia, (1999). *Las funciones generalizadas en ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*. Tesis de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena G. Patricia, (1999). *Hacia la integración del conocimiento: Matemáticas e ingeniería*. Memorias del 2º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, México.

Camarena G. P. y Suárez B. V. (1999). *La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.

Camarena G. P. y Ponce C. J. (1999). *Modelos matemáticos de la física en ingeniería*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, República Dominicana.

Mochón Simón, (1997). "*Modelos matemáticos: los puentes entre las matemáticas y el mundo real*", Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN

Modos de pensamiento sintético y analítico: El caso de la base de un espacio vectorial *

Rosa Ma. Chargoy Espínola
rchargoy@mail.cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa.
Cinvestav-IPN, DGETI, México.

Nivel Superior. Álgebra Lineal

Resumen

Con el objetivo de detectar causas de dificultad cuando un estudiante resuelve problemas sobre la base de un espacio vectorial en el marco teórico de los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, he aplicado diferentes diseños de situación. Los resultados del análisis muestran algunas de esas dificultades así como las que tiene el alumno al transitar de un modo de pensamiento a otro. Asimismo considero en este trabajo el diseño que me propongo aplicar para continuar mi investigación.

Introducción

En los cursos de álgebra lineal los profesores se percatan que los alumnos tienen grandes dificultades para entenderla, se necesita encontrar la razón de la problematica y que no sean simples opiniones. ¿Por qué los estudiantes tienen dificultad en el entendimiento de los conceptos del álgebra lineal? Para contestar formalmente a la pregunta, es necesario tomar en cuenta que el estudiante de álgebra lineal debe entender una gran cantidad de símbolos, definiciones, propiedades, conceptos y teoremas que requieren en algunos casos, de un alto grado de abstracción, en otros de cálculo, además de razonamientos (Chargoy, 1999).

Es posible categorizar las dificultades en el entendimiento del álgebra lineal de la siguiente forma: 1) Por la naturaleza del álgebra lineal como una teoría generalizadora y unificadora (Dorier, 1995). 2) La forma de enseñanza en los niveles previos al estudio del álgebra lineal (Eslava, 1999, Dorier, 1997). 3) Desconocimiento de conceptos previos (Chargoy, 2000).

De esta amplia gama de dificultades, considerando los pocos trabajos sistemáticos que se tienen hasta ahora con orientación al análisis conceptual, mi investigación es sobre la base de un espacio vectorial en el marco teórico de los modos de pensamiento con la metodología de la ingeniería didáctica, misma que inicia una etapa pionera en su forma ya que sobre ella no he encontrado antecedentes.

Marco teórico

La importancia del marco teórico de los modos de pensamiento es que nace en la historia y el desarrollo del álgebra lineal depende de la tensión en entre los modos de pensamiento. El modo sintético-geométrico aparece primero y de manera subsecuente el analítico-aritmético y analítico-estructural. Sin embargo, no se puede decir que uno elimine a los otros dos, ni cuál es el más relevante, se puede inferir que los modos de pensamiento coexisten en el álgebra lineal y su importancia radica en esa interacción. Más que ver los modos de razonamiento en el álgebra lineal como niveles en el desarrollo del pensamiento algebraico, es preferible verlos como modos de pensamiento igualmente útiles cada uno en su propio contexto y para propósitos específicos, principalmente cuando interactúan (Sierpinska 1996b).

Resultados Preliminares

Para establecer un antecedente o idea general de lo que analizaré más tarde, presento algunos resultados preliminares que aportan elementos para un análisis posterior. Estos

* La Dra. Asuman Oktaç y el Dr. Francisco Cordero Osorio son los directores de esta investigación doctoral.

resultados muestran la complejidad que representa para un alumno entender el concepto de base de un espacio vectorial, además de que dan una perspectiva más clara en el aspecto de que existe una separación entre los modos de pensamiento geométrico-sintético, analítico-aritmético y analítico-estructural, por lo que es necesario vincularlos y que el estudiante tenga un uso flexible y consciente de ellos (Sierpinska 1996b).

Primer análisis

Inicialmente esta situación no fue diseñada con el objetivo de analizar la base en los diferentes modos de pensamiento, sin embargo, los resultados de este trabajo se pueden considerar en mi análisis porque muestran cómo los estudiantes prefieren trabajar en el modo analítico en lugar del geométrico y también algunas veces cuando este último les puede ayudar a resolver un problema.

En julio de 1998 en un curso introductorio al álgebra lineal de enseñanza a distancia para profesores de preparatoria y/o licenciatura que estaban cursando su Maestría en Educación, con especialidad en Matemática Educativa en el Tecnológico de Monterrey, los profesores trabajaron en equipos, con la situación diseñada que a continuación menciono:

Diseño de situación No. 1
Sea $u = (1, 0, 2, -1)$ un vector dado en R^4.
a) Encuentra un vector ortogonal a u.
b) ¿Hay un sólo vector ortogonal a u o hay varios?
c) Demuestra que todos los vectores ortogonales a u forman un subespacio de R^4.
d) Halla una base para el subespacio.

En el equipo A los cuatro profesores plantearon la ecuación u•v = 0 y resolvieron los incisos a, b y c; para la solución del inciso d, pensaron que deberían ser cuatro vectores linealmente independientes, ya que los vectores en R4 tienen cuatro elementos. Después de algunas discusiones su razonamiento fue:

- “El conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^2 es un conjunto de líneas paralelas; el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^3 es un conjunto de planos paralelos. Será entonces el conjunto de vectores ortogonales a un vector en R^4 un conjunto de espacios paralelos a R^3. Un plano puede ser subespacio de R^3 y con dos vectores independientes se define su base. Entonces el *volumen* puede ser un subespacio de R^4 y con tres vectores independientes se define su base también.”

Observaciones

1º. Inicialmente en el planteamiento de los estudiantes hay una confusión entre el número de coordenadas de los vectores y la dimensión del espacio vectorial.

2º. Recurrieron a una representación geométrica para resolver el problema y expresaron la solución en el modo estructural.

3°. Los estudiantes emplean una mezcla de lenguaje geométrico y lenguaje analítico.

En relación con la confusión entre el número de coordenadas de los vectores y la dimensión del espacio vectorial al que pertenecen, Dorier (1997) la observa en otra forma y reporta: “Los estudiantes derraparon completamente al dar dos vectores de R^2, para generar un subespacio de R^4”.

Comentarios

Los profesores recurren a la intuición y al lenguaje del modo sintético-geométrico y a modos intermedios, esto les ayudó a resolver el problema propuesto a diferencia de lo que reporta Dorier.

Segundo análisis

El equipo B de cuatro profesores, trabajó la misma situación, y uno de los participantes buscó cuatro vectores linealmente independientes en R^4 y pensó en la base como algo completamente ajeno a lo que originalmente se planteó en el problema, de tal forma que en lugar de trabajar el diseño de situación solicitado, propuso la base canónica para R^4.

Comentarios

Al trabajar el diseño, ante el desconocimiento de los conceptos, el alumno recurre a los conocimientos previos que posee sobre el tema, dando como resultado la generalización de conceptos ya que da como respuesta la base canónica.

Tercer análisis

En enero de 1999 once alumnos de maestría en Matemática Educativa del Cinvestav (cuya preparación es variada pues hay ingenieros, licenciados en matemáticas y egresados de la escuela Normal Superior), después del curso de álgebra lineal de un semestre, en el examen final trabajaron individualmente sobre el diseño 2, este fue preparado para analizar los resultados:

Diseño de situación No. 2
a) En cada una de las gráficas siguientes decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.

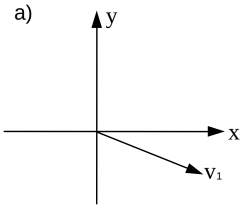
a)


Fig. 1 sólo v_1

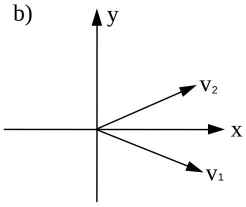
b)


Fig. 2 v_1 y v_2

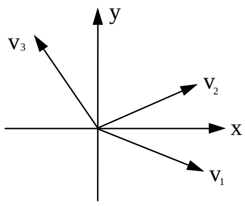
c)


Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

b) En los casos anteriores, decide si los vectores dados son:
1) Linealmente independientes.
2) Generan R^2. Explica tu respuesta.
c) Dibuja otra base para R^2.

Observaciones

1°. Usualmente trabajan en el modo analítico-aritmético.
2°. Se confundieron con el número de elementos de la base y la dimensión del espacio vectorial, por ejemplo: tres vectores en R^2, linealmente independientes dos a dos, pensaron que podían generar R^3.
3°. Cuando se les pidió dibujar una base para R^2, la mayoría de los estudiantes dibujó la base canónica u otra base ortogonal.
4°. Para algunos estudiantes los conceptos de independencia/dependencia lineal son confusos así como el concepto de generar un espacio vectorial.

Comentarios

- Es posible que los estudiantes privilegien el modo analítico-aritmético sobre el geométrico, dado que está acostumbrado a trabajar de esta manera desde los primeros años de educación secundaria.
- En este caso la imagen geométrica le causó confusión al considerar que tres vectores en R^2 podían generar R^3.

Este grupo de estudiantes debía trabajar el diseño de la situación No.1, en este caso las observaciones son:

Observaciones

1°. En general recurren al modo analítico-aritmético para resolver el problema, en la mayoría de los casos no llegan a determinar que el subespacio es de dimensión 3.
2°. En algunos casos pudieron trabajar con el diseño No. 2, sin embargo, con el diseño No.1 tuvieron dificultades con los conceptos de independencia-dependencia lineal así como para generar un espacio vectorial.

Comentarios

- Persiste la confusión entre el número de elementos de la base y el número de coordenadas de los vectores del espacio vectorial.
- Es posible que sin tener una imagen geométrica les resulte difícil encontrar la base para el subespacio de R^4.

Con los resultados de los análisis anteriores preparé un diseño para que lo trabajaran alumnos del Cinvestav:

Cuarto análisis

En Septiembre de 1999 nueve estudiantes presentaron un examen para ingresar a la Maestría en Matemática Educativa en el Cinvestav, trabajaron con el diseño de situación No. 3, sin tener guía de estudio y sin límite de tiempo. Los alumnos tienen diversas formaciones: licenciatura en matemáticas, licenciatura en matemáticas aplicadas e ingeniería.

Diseño de Situación No. 3
I. En cada una de las gráficas siguientes, decide si los vectores dados:
1) son linealmente independientes.
2) Generan R^2. Explica tu respuesta.
II. En cada una de las gráficas anteriores decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.
III. Dibuja otra base para R^2.
IV. ¿Cómo defines la base de un espacio vectorial?

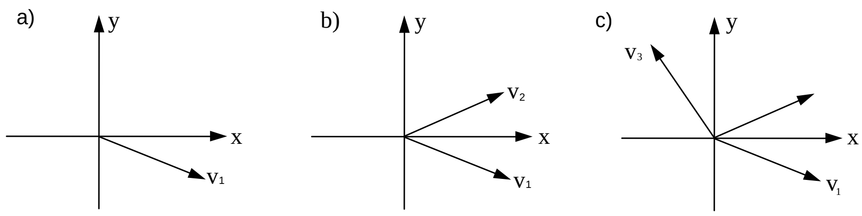


Fig. 1 sólo v_1 Fig. 2 v_1 y v_2 Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

Observaciones

1°. Al pasar al modo analítico-aritmético el primer caso provocó dificultad a uno de los estudiantes, posiblemente porque se pedía “decide si los vectores dados son linealmente independientes”.
2°. Un estudiante al ver las gráficas dijo que por “default” podría saber si los vectores eran o no linealmente independientes, sin embargo, no hizo representaciones geométricas.
3°. En un caso, aunque el alumno no ha tomado cursos de álgebra lineal, dibuja sumas de vectores, el vector resultante y dibuja la base canónica. La base que dibujan usualmente es la canónica y en un solo caso un alumno dibujó una base con vectores ortogonales de la misma magnitud.

4°. En un caso de manera tácita menciona un estudiante, que los tres casos son iguales, es decir, no discrimina sino generaliza, otros alumnos también llegan a ese resultado.
5°. Al considerar la gráfica de la figura 2 algunos alumnos particularizan dando valores a los vectores representados.

Comentarios

- Los alumnos pueden escribir la definición de base, sin embargo, la comprensión del concepto no la tienen ya que en algunos casos confunden el concepto de generar; en otros el de dependencia-independencia lineal y en otros, sólo tienen ideas vagas o ajenas del concepto de base.
- Pueden trazar la base canónica, aun sin tener idea de lo que es, pueden hacer una representación geométrica de dicha base, pero no necesariamente entenderla.
- Las respuestas de los alumnos son en el modo analítico-aritmético, parece que al responder de esta forma piensan que pueden hacer algo y en el modo geométrico no ven resultados. Sólo encontré en un caso el uso del modo geométrico para tratar de demostrar la independencia lineal.
- Es posible que al ver los ejes de la figura piensan que en los tres casos se tiene un plano y ven solamente este hecho ya que no discriminan la diferencia entre una situación y otra. Aquí hay una diferencia entre el diseño 2 y el diseño 3, posiblemente debido a la representación de los ejes.

A manera de **conclusión de los cuatro** análisis presentados aquí planteo que:

1) La magnitud de los vectores puede influir para la concepción de la base.
2) El alumno no tiene el conocimiento completo de un concepto si sólo lo identifica en uno de los modos de pensamiento.
3) El alumno no entiende la base si no ha sintetizado los conceptos de dependencia e independencia lineal así como el de generar el espacio vectorial.
4) Puede ser que la forma gráfica de representar la base, la presencia de los ejes confunda al estudiante.

Con estos resultados preliminares el siguiente paso es aplicar una situación a estudiantes que por lo menos hayan tenido un curso de álgebra y a profesores que estén impartiendo la materia, de esta manera establecer posibles diferencias y similitudes en la forma en que aplican sus conocimientos de álgebra lineal y apreciar la epistemología de la base en los modos de pensamiento.

A continuación describo los diseños de situación y algunas de las preguntas que surgen para investigar.

En el diseño de situación No. 1 trato de analizar los siguientes puntos:

A) Si el alumno puede interpretar la base en el modo sintético-geométrico.
B) Si la longitud de los vectores está relacionada con el concepto de base.
C) Si sólo emplea el conocimiento de la base canónica.
D) ¿Qué tipo de relaciones establece el alumno entre el concepto de independencia / dependencia lineal, así como en la generación de un espacio vectorial y la base y qué dificultades se le presentan para el establecimiento de dichas relaciones?.

Diseño de situación No. 1

I- En cada una de las gráficas siguientes decide si los vectores
1) Son linealmente independientes.
2)- ¿Cuál conjunto generan?. Explica tu respuesta.
II- En cada una de las gráficas anteriores decide si los vectores forman una base para R^2. Explica tu respuesta.
III- Dibuja otra base para R^2.
IV- ¿Cómo defines la base de un espacio vectorial?

a)

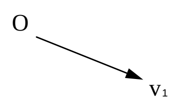


Fig. 1 sólo v_1

b)

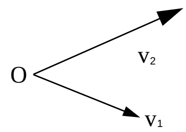


Fig. 2 v_1 y v_2

c)

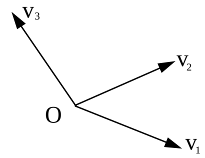


Fig. 3 v_1, v_2 y v_3

En el diseño de situación 2 trato de investigar los siguientes puntos:

A) Si el modo geométrico ayuda el estudiante o no al considerar un subespacio de R^4.
B) Si prefiere trabajar en el modo analítico-aritmético, en el sintético-geométrico o uno intermedio.
C) Si puede transitar entre los dos modos.
D) Si puede el alumno plantear la solución en el modo estructural.
E) Cómo construye una base.
F) Cómo relaciona la base con el concepto de subespacio y espacio vectorial.

Diseño de situación No. 2
Sea u = (1, 0, 2, -1) un vector dado en R^4.
a) Encuentra un vector ortogonal a u.
b) ¿Hay un sólo vector ortogonal a u o hay varios?
c) Demuestra que todos los vectores ortogonales a u forman un subespacio de R^4.
d) Halla una base para el subespacio.

Método

El método a seguir es de entrevista clínica. Los alumnos trabajarán de manera escrita el diseño de situación, las entrevistas serán grabadas y posteriormente serán analizadas. Con estos resultados prepararé un análisis *a priori* para comparar con un análisis *a posteriori* de acuerdo con la metodología de investigación de la ingeniería didáctica.

Perspectivas de la investigación

Por el momento se vislumbran en mi investigación algunos elementos que dan curso al desarrollo de la misma. Así se tiene que un estudiante al trabajar un problema en el modo sintético-geométrico con frecuencia se confunde y en ocasiones no alcanza a entender, por ejemplo, la gran diferencia que existe entre los conceptos de plano cartesiano y espacio vectorial sin llegar a ver la compleja estructura de este último.

La didáctica del álgebra lineal repercute sobre la conceptualización en el estudiante de la base de un espacio vectorial de manera decisiva, ya que el enfatizar el uso de la base canónica puede ser un obstáculo que le impida el entendimiento tanto de ésta como la concepción de subespacio.

La epistemología de la base requiere de interacciones y relaciones entre los conceptos de independencia lineal y generación de vectores, si estos conceptos son aislados las propiedades esenciales de la base no se entienden. De esta manera el estudio actual sobre la base en términos de un análisis cartesiano mecanicista puede dificultar el entendimiento de la base.

Se encuentra una separación entre los enfoques sintético y analítico, de tal forma, que aparece la necesidad de establecer un equilibrio dinámico entre los modos de pensamiento y evitar un desequilibrio al enfatizar uno en detrimento del otro. Establecer un estudio sistémico, desde el punto de vista filosófico, evita la relación mecanicista o reduccionista entre las partes, y el énfasis del todo le permite al estudiante una mayor flexibilidad en las relaciones conceptuales.

Referencias bibliográficas

Crowe, M. (1967): *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Dover Publications, Inc. New York.

Chargoy, R. (1999): *Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial*. Actas de la Relme XIII. Santo Domingo, República Dominicana.

Chargoy, R. (2000): *Modos de Pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial*. Memoria Predoctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav México, D. F.

Dorier, J. L. (1990): *Contribution à L' Étude de L' Enseignement à L' Université des Premiers Concepts D'Algèbre Linéaire. Approches Historique el Didactique*. Thèse de Doctorat de L' Université Joseph Fourier (Grenoble).

Dorier, J.L. (1995): *Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 29: 175-197.

Dorier, J. L. (1996): *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory*. Historia Mathematica, 22 pp. 227-261.

Dorier, J. L. (1997): *Recherches en Didactique des Mathématiques.L' Enseignement de L' Algèbre Linèaire en Question. Coordonné par Jean-Luc Dorier avec les contributions de Harel, Hillel, Rogalski, Roobert, Sierpinska et al*. Collection dirigée par Nicolas Balacheff.

Dubinsky, E. (1997): "*Some Thoughts on a first course in Linear Algebra at the College Level* in Carlson et Al. (ed.s) Resources."

Eslava, M. (1999): *Análisis de libros de texto de álgebra en el tema de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas en la perspectiva de los modos de razonamiento sintético y analítico*. Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemática Educativa.

Hillel, J. & **Sierpinska, A**. (1994). *On one persistent mistake in linear algebra*. PME, Portugal

Piaget, J. & García, R. (1994): *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI editores.

Saldanha, L. A. (1995): T*he Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties*. Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master in the Teaching of Mathematics. Concordia University. Montréal, Québec, Canada.

Sierpinska, A. (1992): *The diachronic dimension in research on understanding in mathematics-usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle*. Talk given at the conference: Interaction between History of Mathematics and mathematics learning, Essen, November 2-5

Sierpinska, A. (1996a): *Problems related to the design of the teaching and learning processes in linear algebra*, paper presented at the Research Conference in collegiate Mathematics Education, September 5-8, Central Michigan University, MT Pleasant, Michigan.

Sierpinska, A. (1996b): *Synthetic and Analytic modes of thinking in linear algebra*, BaCoMeT 4 publications. H.N. Jahnke, N. Knoche;-M. Otte (Eds), Interaction between History of Mathematics and Mathematics Learning. Göttingen. Vandenhoeck and Ruprecht.

Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1999): *Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The case of linear Transformations*. Recherches en Didactique des Mathematiques. 19(1), 7-40.

Perfil del Profesor Promedio en Matemáticas del nivel Secundaria[22]

Jesús Enrique Pinto Sosa
psosa@tunku.uady.mx
Universidad Autónoma de Yucatán
Mérida, Yucatán
México

Introducción

A pesar del valor y significado de las matemáticas en nuestra sociedad, actualmente el estudiante no aprende a razonar, sino a mecanizar y a tomar modelos únicos para la resolución de ejercicios y problemas (García, 1994; Loyola, 1990, Ontiveros, 1993; Wenzelburger, 1990 y Pinto, 1996) y aún más, la enseñanza y el aprendizaje de la matemáticas en México enfrenta graves dificultades (UNAM, 1994). Estudios como los de Bernal, Estrella y Sandoval (1983) y Pinto (1996) han demostrado que los alumnos llevan mecánicamente las operaciones, no poseen mecanismos de control para comprobar sus resultados, no utilizan los conceptos básicos, no saben analizar ni plantear la solución de un problema ni les gustan las matemáticas. Estos y otros resultados muestran que existen factores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y que obstaculizan el cumplimiento del objetivo final de las matemáticas particularmente en el nivel de secundaria. Este problema, involucra diferentes aspectos, los cuales pueden agruparse en tres rubros: el maestro y su categoría, el currículo y los alumnos.

En relación con el profesor, estudios como los de Loyola (1990), Ulloa (1991), Alcalá (1991) y Wenzelburger (1990) han demostrado que se enseña de una manera diferente a como originalmente debe enfocarse el aprendizaje de las matemáticas, que es el de razonar. Esta concepción tradicional, condena la enseñanza de las matemáticas a la operatividad, la memoria, las reglas, los procesos; buscando que el alumno sea ordenado y sistemático en sus decisiones; y que según Ulloa (1994) se caracteriza porque el estudiante sólo capte conocimientos, el maestro repita y explique cómo se resuelve el ejercicio o problema y el alumno apunte (Flores, 1991, Pinto, 1996). Según Alcalá (1991) y *The Sunday Times* (12 de febrero de 1995) esto no estaría mal si no fuera lo único que exige y a lo que se le da casi todo el peso de las calificaciones (particularmente en secundaria y en preparatoria). Esto es muy importante, pero sólo ha de ser un punto de partida (Marzano, 1994). En contraposición de esta concepción está la que ha prevalecido desde 1959 (Bonilla, 1989). Esta matemática concibe que la enseñanza debe estar orientada a que el alumno aprenda a crear y a utilizar métodos formales, generalizables y más económicos, es decir, modelos matemáticos de solución (Ontiveros, 1993); que aprenda a razonar para que él mismo construya y descubra su conocimiento y sea hábil para aplicarlo a una situación cualquiera.

Esto exige al profesor, no sólo el dominio de los contenidos, sino que tener la actitud, disposición, habilidad, apoyos para su estrategia y carisma para poder hacer que el alumno por sí mismo descubra el conocimiento.

En relación con el currículo, el programa de la SEP (1993) vigente a la fecha para todas las escuelas secundarias (oficiales o incorporadas) contempla como propósito central que el alumno aprenda a utilizar las matemáticas para resolver problemas cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa. Según el mismo programa, se trata de desarrollar habilidades operatorias, comunicativas y de pensamiento en los alumnos. Sin embargo, el programa no está concebido como una sucesión de temas uno a continuación de otro, ya que sus contenidos pueden organizarse en la forma que el maestro considere más

[22] Esta ponencia se origina del proyecto de investigación "Desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas y de pensamiento en la asignatura de matemáticas", clave 980303, aprobado y financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología - Sistema Regional "Justo Sierra Méndez".

conveniente para su aprendizaje (SEP, 1993, p.37). La valoración de la organización y los alcances del programa de matemáticas, así como el impacto que tiene sobre sus propósitos es fundamental para el sistema.

El tercer nivel de análisis es el alumno. Estudios como los de Brown (1982), Bernal, Estrella y Sandoval (1983), Loyola (1990), Ulloa (1991), Ontiveros (1993), Wenzelburger (1990), Eudave (1994) y Pinto (1996) han encontrado que existe una correlación significativa entre los antecedentes académicos del estudiante, su interés, motivación, actitud, atención, hábitos de estudio, madurez, distracción y mecanización, con el éxito o aprovechamiento escolar en matemáticas. Aunado a esto, trabajos como el de Wenzelburger (1990), UNAM (1994) y Pinto (1996), comparten la idea de que la ausencia de una cultura matemática dentro y fuera de clase es un factor que también influye en el alumno.

Con base en los estudios citados, las instituciones han tratado, en relación con el profesor, comisionarlo para su capacitación y actualización, más aún en estrategias específicas para enseñar las matemáticas. En relación con el alumno, las acciones están en informar y conscientizar al alumno sobre sus antecedentes, sus hábitos de estudio y otros factores que dependen de él e informar al profesor sobre estos resultados con el propósito de que se le facilite la enseñanza. Acciones como la implementación de cursos propedéuticos y de técnicas de hábitos de estudio cada día son más frecuentes.

Estas acciones resuelven en parte el problema ya que quedan en un nivel emergente o bien, se resuelve de manera aislada, ocasionando en muchas ocasiones un círculo vicioso. Es necesario, por lo tanto, incorporar alternativas en donde, con un profesor promedio, con los antecedentes del alumno y contemplando los objetivos básicos del programa oficial, el alumno aprenda a razonar, logre las metas del programa y construya sus propios aprendizajes.

Este estudio intenta probar un modelo de enseñanza denominado para fines de este trabajo como ECR (explorar, conjeturar y razonar). El modelo consiste en:

1. Tener un profesor promedio. Esto es, cubrir las habilidades docentes mínimas que se requieren para la enseñanza de las matemáticas.
2. Seleccionar tareas matemáticas. Esto es, diseñar con base en el programa, tareas que faciliten los aprendizajes, para que el alumno construya, descubra y desarrolle sus habilidades e interés.
3. Instrumentar el discurso. Es decir, proporcionar oportunidades al alumno para profundizar sus interpretaciones y comprensión de las matemáticas, así como promover el interés, motivación, autoconfianza y disposición para evaluar y usar sus capacidades.

Se contemplan por lo tanto, tres aspectos en este trabajo: el desempeño del docente, el uso de un paquete didáctico que contempla las estrategias de trabajo del profesor y el diseño de cuadernos de ejercicios para los alumnos, así como la dinámica de la clase. El modelo responde a las recomendaciones establecidas por la *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM) que establece en su "Estándares Profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas" (1991) que para lograr el objetivo de desarrollo de habilidades intelectuales se requiere de la creación de un currículo y un ambiente, en los que la enseñanza y el aprendizaje deben ocurrir y sean diferentes a muchas de las prácticas actuales.

El modelo contempla el trabajo con el profesor, que es un factor fundamental en el salón de clases, pero marca su diferencia con otras propuestas en poner en manos de los alumnos, cuadernos de ejercicios que permitan desarrollar sus habilidades paulatinamente y no enfocarse en exclusiva a la operatividad del programa.

Objetivo

Se pretende probar la efectividad de un modelo de enseñanza denominado ECR (explorar, conjeturar y razonar) en el desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas, de autodidactismo y de pensamiento complejo en la asignatura de Matemáticas en el nivel de Educación Media Básica: secundaria.

El proyecto tiene una duración total de cuatro años: en estos dos primeros años se intenta probar el modelo con alumnos de primer año y en los dos restantes, con segundo y tercer grado. El modelo intenta demostrar que a través del profesor y del diseño de unos cuadernos de ejercicios para la construcción de los aprendizajes de los alumnos, éstos logren desarrollar, desde primero hasta tercero, sus habilidades de pensamiento procesal, de comparación, clasificación, deducción y hasta de abstracción.

Los alcances pueden generalizarse a todo el sistema escolar de Educación Media Básica, Secundaria, no sólo de la región sino del país. Los resultados impactan no sólo el aspecto curricular y de capacitación de profesores sino también la edición de materiales de instrucción que pudieran asegurar la formación y el desarrollo de habilidades intelectuales de los adolescentes.

Objetivos particulares

Los objetivos particulares para esta primera parte del proyecto y que se presentan en esta reunión son:

(a) describir la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundaria

(b) determinación del perfil promedio del profesor de matemáticas a nivel secundaria, y

(c) describir las características teóricas y operacionales del modelo ECR.

Método

Con base en el objetivo y la naturaleza del estudio, éste será de tipo experimental puro con diseño de posprueba y grupo control únicamente. Se pretende tener tres grupos experimentales y sus correspondientes grupos control. Los tres grupos experimentales son un grupo de una escuela oficial de nivel socioeconómico medio alto, otro de nivel socioeconómico medio bajo y el tercero de una escuela privada. La selección de estos grupos experimentales tiene como objeto valorar los sistemas, los alcances del modelo a poblaciones diferentes y analizar las características de validez interna y externa del estudio.

<u>Sujetos</u>

Los sujetos que participaron en el estudio se seleccionaron con base en las siguientes etapas.

<u>Etapa 1</u>

En esta primera etapa participaron en el estudio tres tipos de sujetos: expertos, alumnos y profesores. El propósito de esta etapa fue obtener el perfil promedio del profesor de matemáticas en secundaria y realizar el diagnóstico sobre la situación actual y real sobre la enseñanza de las matemáticas en ese nivel.

En cuanto a los expertos se eligieron a profesores con maestría en enseñanza de las matemáticas o equivalente; o bien a profesores con reconocimiento en el área, ya sea como profesor o investigador. Son dos los propósitos: ayudar en la definición del perfil ideal del profesor de secundaria y opinar sobre el perfil real.

Respecto a los profesores y alumnos, se intentó obtener información que sea representativa de los estratos socioeconómicos de la Cd. de Mérida, así como del tipo de educación (pública y privada) que ayude a definir un perfil docente de matemáticas. Para ello se seleccionó de manera accidental una muestra que contemple a los diferentes sectores:

escuelas generales y técnicas, matutinas y vespertinas, de la zona norte y sur; escuelas privadas de la zona norte y sur; escuela rural y escuela urbano-marginal. La Tabla 1 ejemplifica el número de sujetos que fueron seleccionados.

En esta etapa, los profesores de matemáticas de todos los grados contestarán un cuestionario a manera de autoevaluación sobre sus características reales con que enseña matemáticas, dado un perfil ideal elaborado con base en expertos y de la información recolectada de la literatura (teoría, investigación y divulgación). Es por eso que se estudió la opinión del total de profesores de las escuelas que participan en esta etapa.

De igual manera, la muestra de alumnos representativa de todos los grados opinó sobre las características de sus actuales profesores. Para ello el número total de la muestra de cada escuela se dividió entre tres, dando como resultado el número de estudiantes por grado. Posteriormente se eligió al azar un grupo de cada grado y al azar se seleccionó a los alumnos del grupo que contestaron el cuestionario correspondiente.

Tabla 1 Muestra de profesores y alumnos para la Etapa 1

	Alumnos		Profesores
	N= 5795	n= 359	N= 49
Esc. Gen. Mat. Norte: *Santiago Burgos Brito*	752	46	5
Esc. Gen. Vesp. Norte: *Octavio Paz*	564	35	7
Esc. Gen.. Mat. Sur: *José Vasconcelos*	788	48	5
Esc. Gen. Vesp. Sur: *Silvia Cuevas Aguilar*	672	42	7
Esc. Tec. Mat. Norte: *Tec. No. 2*	617	38	4
Esc. Tec. Vesp. Norte: *Tec. No. 2*	100	6	4
Esc. Tec.. Mat. Sur: *Tec. No. 24*	763	48	6
Esc. Tec. Vesp. Sur: *Tec. No. 54*	697	43	5
Esc. Priv.Norte: *Colegio Peninsular, AC*	315	20	2
Esc. Urb. Marginal: *Tec. 59, Sur*	527	33	4

Etapa 2

En la etapa anterior se obtuvo información que ayudó a establecer las diferencias entre los perfiles y entre las muestras. La segunda etapa, tiene como propósito identificar a los profesores de primer grado que tienen el perfil promedio y que son los que podrán participar en el experimento.

Tabla 2 Escuelas que participaron en la segunda etapa

Escuela	Ubicación	n= 23 Prof. de 1°	n=894 Alumnos
Estatal: *Eduardo Urzaiz*	Sur	3	150
Estatal*: Salvador Alvarado*	Norte	3	121
Estatal: *Carmen Cervera Andrade*	Norte	1	32
Estatal: *Leandro Valle*	Norte	2	84
General: *José Vasconcelos*	Sur	2	90

General: *Santiago Brito*	Norte	2	80
General: *José Andrés Antuña*	Norte	2	84
General: *José Esquivel Pren*	Sur	1	41
Privada: *Cristóbal Colón*	Norte	1	43
Privada: *Avelino Montes Linaje*	Norte	1	47
Privada: *Colegio Peninsular*	Norte	2	53
Privada. *Instituto Cumbres*	Norte	2	34
Privada: *Colegio Mérida*	Norte	1	35

Para ello se contempló que participen los profesores de matemáticas de las escuelas públicas matutinas (estatales o generales) de la zona norte y de la zona sur; así como los profesores de matemáticas de primer grado de una escuela privada del norte (Colegio Peninsular) dado que es la institución que funge como uno de los usuarios beneficiados en el proyecto. La justificación de estas escuelas está en función del tiempo (matutino), facilidades otorgadas y autorización de la Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de Yucatán (SEGEY); y es con base en el protocolo entregado y aprobado por CONACYT-SISIERRA. La Tabla 2 muestra las escuelas con estas características, así como el número de profesores de primer grado, el número de grupos y su elección.

La muestra fue por conglomerados, es decir, se eligió al azar a un grupo por profesor de matemáticas de primer grado, y todos los alumnos valoraron las características de sus profesores. Es preciso mencionar que los alumnos que participaron en la primera etapa no fue necesario que contesten otra vez el cuestionario.

Etapa 3

En la etapa anterior se logró identificar a los profesores que tienen el perfil promedio de matemáticas para participar en el experimento. Para la etapa 3 se debe cumplir el diseño tipo experimental puro con diseño de posprueba y grupo control únicamente. Participan seis profesores, tres como grupo control y tres como grupo experimental.

De esta manera se tienen tres grupos experimentales, caracterizados por el tipo de institución y que desarrollan el modelo ECR. Por otra parte, los grupos control llevan su enseñanza como regularmente lo hacen. De los 23 profesores que participaron en la segunda etapa se seleccionaron sólo a seis, con características homogéneas.

Respecto a los alumnos que participarán en el experimento, como serán de primer grado y de nuevo ingreso, se solicitará a las autoridades de las escuelas que los asignen al azar a los grupos. De los profesores seleccionados, se elegirá al azar un grupo donde habitualmente en ciclos anteriores imparte clases. Este mismo procedimiento será utilizado para los demás grupos experimentales y de control. Se estima que cada grupo sea de aproximadamente 40 alumnos.

Instrumento

Con base en la naturaleza del estudio, en esta primera etapa se diseñó un instrumento denominado "*Perfil actual del profesor de matemáticas de secundaria*" el cual se utilizó para realizar el diagnóstico de la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en el nivel Secundaria.

En el desarrollo y caracterización del perfil del profesor se modificó el tipo de escala de las respuestas, se eliminó y añadió algunos ítems y se hizo el análisis de consistencia interna de la prueba. De 40 casos (alumnos) que participaron en la prueba piloto del instrumento, se obtuvo un alfa de Crombach de 0.9381, lo que permitió concluir que es confiable. Del análisis de los ítems para determinar su validez, se calculó la correlación punto biserial: se eliminaron tres ítems y por sugerencias tanto de profesores como de alumnos se añadieron otros tres.

La versión final, denominado "*Perfil actual del profesor de matemáticas de secundaria*" (tabla 5) está compuesto por 32 ítems clasificados en cuatro dimensiones: dominio de contenido (3 ítems), desarrollo crítico (5 ítems), enseñanza (15 ítems) y actitudes (9 ítems). La primera dimensión consistió en aspectos relacionados con el dominio del contenido de lo que se enseña. La segunda parte fueron aspectos relacionados con acciones que permitan que el estudiante construye su propio aprendizaje. La tercera parte estuvo relacionado con los aspectos didácticos y la cuarta y última sobre aspectos de la actitud.

Con base en este instrumento, se elaboró dos versiones: una dirigida para profesores y otra para alumnos. La siguiente etapa fue realizar el diagnóstico sobre la situación actual de la enseñanza de las matemáticas como se describió en el apartado de método.

Resultados

Situación actual de la enseñanza de las matemáticas

Esta sección tiene como propósito presentar los resultados del diagnóstico de la situación actual de la enseñanza de las matemáticas de la Cd. de Mérida, Yuc., México en opinión de profesores y alumnos. Asimismo se pretende identificar fortalezas, debilidades y a aquellos profesores que cumplen con el perfil promedio de matemáticas y que podrán participar en el experimento del modelo ECR.

Para ello, este reporte presenta el resultado de encuestar a muestras representativas de las secundarias del escenario, siendo 45 profesores de todos los grados escolares que imparten matemáticas y 1165 alumnos.

Diagnóstico

El cuestionario administrado tanto a alumnos como profesores fue calificado en una escala de 0 puntos a 96, representando este último una excelente enseñanza de las matemáticas. Los resultados se presentan con base en la escala total y por cada una de sus dimensiones (dominio, pensamiento crítico, enseñanza y actitudes).

Al comparar en la escala total la opinión de estudiantes y profesores se encontró ambos en su mayoría coinciden en que la enseñanza es regularmente aceptable y buena. Sin embargo, al hacer la comparación estadística se encontró con una t=4.47 con p=.001 que existe diferencia significativa en el promedio de la escala entre estudiantes (M= 68.2) y profesores (M= 78.4). Esto puede atribuirse y observarse que los estudiantes califican con menor puntaje a los profesores. No obstante, se mantiene la conclusión de una enseñanza regularmente aceptable y buena.

Respecto a los resultados de la dimensión dominio, se encontró la misma conclusión: un dominio regularmente aceptable y bueno en ambos muestras, aún cuando exista diferencia estadística significativa (t= 2.10, p=.04) entre estudiantes (M= 7.2) y profesores (M= 7.8).

Respecto a la dimensión *desarrollo del pensamiento crítico* (figura 1) se observa una distribución más normal que sesgada, principalmente al compararla con las dos anteriores. En este rubro no existió diferencia significativa (t=1.72, p=.09) entre profesores (M=9.3) y profesores (M=10.1). Se concluye que el desarrollo del pensamiento crítico en opinión de las muestras es ocasionalmente a regularmente aceptable. Es decir, existe un reconocimiento mutuo de ser un aspecto que quizás no se ha conceptuado lo suficiente o fortalecido lo necesario para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

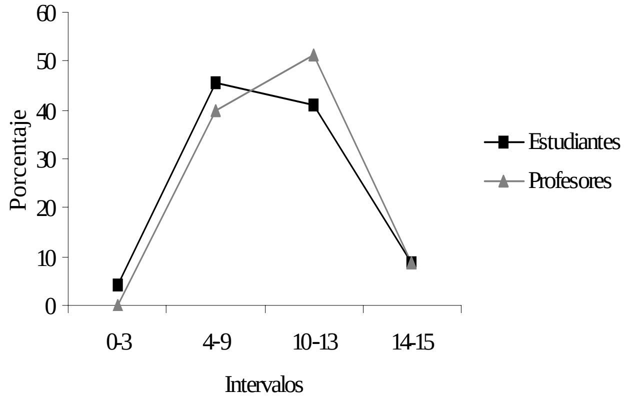


Figura 1. Distribución y comparación de los puntajes de la dimensión desarrollo del pensamiento crítico

La dimensión enseñanza muestra la misma situación de las dos primeras distribuciones (figuras 1 y 2). Se concluye que existe una didáctica o una enseñanza regularmente aceptable y buena en ambos muestras, aún cuando exista diferencia estadística significativa (t= 4.4, p=.001) entre estudiantes (M= 30.8) y profesores (M= 36.0).

Finalmente, para la dimensión actitudes (figura 6) se observó y encontró que existe diferencia significativa (t= 4.5, p=.001) entre estudiantes (M= 20.9) y profesores (M=24.4). Los relevante es que al observar la distribución sí es más evidente la diferencia entre las muestras: los profesores se autoperciben con mejores actitudes y no así (o tanto así) piensan los alumnos.

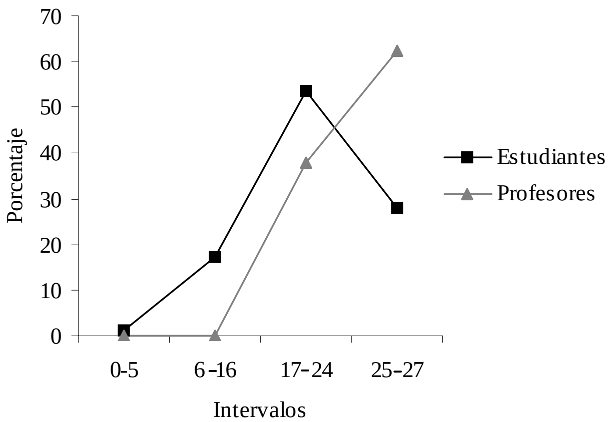


Figura 2. Distribución y comparación de los puntajes de la dimensión actitudes

Como conclusión a este primer análisis del diagnóstico la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria es regularmente aceptable, buena y cumple con los propósitos especificados por el plan de estudios vigente; resultado que retroalimenta a la SEGEY y los profesores de la Cd. de Mérida, así como informa a todos aquellos que investigan acerca del tema. A pesar de este resultado favorable se hace evidente dos aspectos fundamentales: el trabajo que se hace para desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes (propósito fundamental del plan de estudios y nueva teoría de la enseñanza de las matemáticas) y las actitudes que se generan en torno a las matemáticas.

Este diagnóstico fundamenta una vez más la elaboración e implementación del modelo ECR, ya que éste tiene entre sus ejes el capacitar a profesores para desarrollar el pensamiento crítico del alumno con el apoyo de materiales de instrucción, así como el crear una cultura matemática (actitudes) dentro del salón de clase que favorezcan los aprendizajes.

A continuación se presentará, siempre comparando la opinión de estudiantes y profesores, las fortalezas y debilidades específicas del perfil (cuestionario), con el propósito de incorporarlas y enfatizarlas más dentro del modelo ECR.

Fortalezas y debilidades

Para identificar las fortalezas y debilidades se procedió así: se dicotomizó la escala sumando la opción *nunca* o *rara vez* con *ocasionalmente* (debilidad) y regularmente con *casi siempre* o *siempre* (fortaleza). Se definió operacionalmente como debilidad aquella en donde al menos el 40% de una muestra quede ubica en este rubro. El análisis inferencial se hizo con base en la Chi Cuadrada.

Del análisis de la opinión de los profesores no existe debilidad y sí todas son fortalezas; mientras que para los alumnos es diferente. Las seis debilidades identificadas a este respecto fueron:

(a) Permite que los alumnos resuelvan los problemas matemáticos a su manera, a partir de sus conocimientos previos y sin usar necesariamente los símbolos y operaciones de los expertos.

(b) ayuda a los estudiantes aprendan por sí solos y se evalúen a sí mismos

(c) ejemplifica la utilidad de las matemáticas en diversas asignaturas (español, biología, historia) y en la vida cotidiana

(d) promueve la realización de ejercicios en equipo o en grupos pequeños

(e) utiliza diversos recursos (pruebas de opciones, de preguntas abiertas, juegos, interrogatorio...) para evaluar los aprendizajes

(f) solicita realizar investigaciones como apoyo al tema que se va a enseñar

Estos resultados permitirán a profesores mejorar aún más la enseñanza, pero sobre todo se incorporarán en la estrategia del modelo ECR.

Perfil promedio del profesor de matemáticas

Se define constitutivamente como perfil promedio del profesor aquel que tiene las habilidades, conocimientos y actitudes mínimas, necesarias e indispensables para enseñar las matemáticas. Son 17 ítems que fueron identificados con estas características: 1, 2, 3, 9, 10, 12, 13, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 29, 31, y 32. Es importante para ello contar con el instrumento *Perfil actual del profesor de matemáticas de secundaria* donde se muestran los indicadores correspondientes.

Se considerará que un profesor es perfil promedio de matemáticas si en las dimensiones de DOMINIO, ENSEÑANZA Y ACTITUDES se ubica en la media definida como regularmente (61 a 90%). No se concibe como perfil promedio si alguno sobrepasa el nivel o por lo contrario está bajo el nivel o no cumple satisfactoriamente alguna dimensión. Con esto se asegura que el modelo ECR puede ser accesible a profesores regularmente buenos y no muy buenos o malos.

Es preciso recordar que este análisis fue exclusivo solo para los profesores de primer grado (n= 27)y que la decisión de cumplir o no el perfil promedio fue con base en la opinión de sus alumnos. Operativamente para la dimensión DOMINIO el profesor debe tener entre 5 a 7 puntos, para ENSEÑANZA entre 15 a 21 puntos y para ACTITUDES entre 11 a 16 puntos.

Del total de profesor de primer grado y con base en la definición operacional de perfil promedio, ocho (30%) profesores resultaron ser seleccionados para participar en el experimento del modelo ECR. Tres profesores (11%) no fueron seleccionados por estar bajo el nivel necesario y 16 (59%) por estar sobre el nivel. Los ocho profesores seleccionados fueron dos de escuelas secundarias privadas (norte) y seis de públicas, de los cuales tres están ubicados en zona norte y tres en zona sur. Con ello se cumple con el modelo del diseño experimental descrito en la sección de MÉTODO.

<u>El modelo ECR</u>

El modelo ECR, se denomina así por sus siglas Explorar, Conjeturar y Razonar, conceptuando como expresar explorar como un proceso de aprendizaje que a través del uso de materiales concretos el alumno va adquiriendo el conocimiento; conjeturar como la formación de juicios probables o generalizables de una cosa con base en indicios y observaciones, y razonar como un proceso de pensamiento que incluye la identificación y explicación de cómo un patrón en una situación, o de acuerdo con una información, puede presentarse de manera similar o diferente del mismo patrón, en otra situación.

En términos operativos, el modelo ECR se representa a través del uso de materiales de instrucción, en donde el alumno puede explorar de manera distinta, en donde construya poco a poco su aprendizaje (conjeturar) y que finalmente logra razonar o formar su proceso de pensamiento lógico.

El modelo básicamente representa el aprendizaje de las matemáticas con base en la teoría constructivista, donde el alumno vaya desarrollando su pensamiento, pero también incluye como factor fundamental el rol del profesor ya que éste deberá utilizar sus habilidades para el modelo y para crear una cultura matemática en el salón de clases (ver esquema del modelo en Figura 3).

Los resultados que se presentan en este escrito son del primero componente del modelo: el perfil promedio del profesor. Para el segundo y tercer componente del modelo se tiene lo siguiente:

a. Programa de curso para el modelo ECR

b. Paquete didáctico del profesor

c. Cuaderno de tareas (secuencias didácticas) del alumno

d. Manual del modelo ECR (para el profesor)

 - Enfoque y sustento teórico
 - Perfil del profesor
 - Materiales de instrucción
 - Instrumentación del discurso
 - Capacitación

e. Instrumentos de apoyo:

- Escala de motivación, intereses, autoconfianza y disposición hacia las matemáticas
- Listas de comprobación (observación) de habilidades de profesor y cultura matemática en el salón de clases
- Registro anecdótico de una clase del modelo ECR
- Protocolo del informe de evaluación de la participación del profesor

Conclusión

El modelo ECR es una propuesta hecha con base en la teoría constructivista para desarrollar la habilidad de pensamiento crítico del alumno en la asignatura de matemáticas. Se fundamenta en estudios previos e inclusive en el diagnóstico presentado en este trabajo.

Aún cuando los resultados de esta primera parte permiten concluir que la enseñanza de las matemáticas en secundaria es buena, aceptable y favorable; existe suficiente evidencia de que hace falta una cultura mayor para desarrollar o ir construyendo el aprendizaje de la matemática en el alumno y una cultura matemática en el salón de clases. Con base en esto se complementa la propuesta inicial del modelo ECR.

Finalmente, se seleccionó a los profesores que participan en el modelo. Actualmente se está llevando a efecto el uso del modelo en el salón de clases con los componentes e indicadores descritos en la sección anterior.

Referencias bibliográficas

Alcalá, I. (1991). Matemáticas y realidad. Educación matemática 3 (1), pp. 77-81

Bernal, R. Estrella, A. Sandoval, J. (1983). Análisis de errores en el uso del álgebra a nivel CCH. Tesis de maestría, Sección de Matemática Educativa, CIEA.

Bonilla, R. (1989). La educación matemática: reflexión sobre su naturaleza y su metodología. Educación Matemática. 1 (2), pp. 28-42.

Eudeve, M. (1994) Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de bachillerato: Educación matemática. 6 (1), pp. 46-58

Flores, A. (1991). Formación de maestros de matemáticas para nivel medio superior: un marco de referencia para programas escolarizados. Educación Matemática. 3 (2), pp.5-17

García, J. (1994). La relación entre la conceptualización de los profesores accerca de la Matemática, su enseñanza y aprendizaje y la resolución de problemas. Tesis de maestría en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México, DF.

Loyola, C. (1990). El rechazo al estudio de las matemáticas. Tesis de maestría en Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, México, DF.

Marzano, R; Pickering, D.; McTighe, J. (1998). Assessing Student Outcomes. Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Depelopment.

National Council of Teacher of Mathematics (1991). Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas. Reston, Virginia.

Ontiveros, J. (1993). Claudia, las matemáticas y el lenguaje. Rompan Filas. Año 2, No. 8, pp. 3-10.

Pinto, J. (1996). Perfil académico de estudiantes con alto y bajo rendimiento académico en matemáticas de primero de preparatoria. Tesis de Maestría en Educación. Facultad de Educación de la Universidad Autónoma de Yucatán.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 1993). Plan y programa de estudios de estudio. Educación básica. Secundaria. SEP

Ulloa, R. (1991). Factores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el tronco común del bachillerato. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México, DF.

UNAM, (1994). Problemas del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. UNAM hoy. Año 3, No. 12.

Wenzelburger, E. (1990). ¿ Cómo enseñar la matemática para mañana? Educación Matemática. 1 (2), pp. 48-51.

¿ Pueden ser Consideradas Funciones Matemáticas las Funciones de la Hoja de Cálculo?

José Armando Landa Hernández
alanda@taurus1.chapingo.mx
Universidad Autónoma Chapingo
México

Nivel medio superior
Temática: Álgebra con computadoras

Resumen

En una hoja de cálculo se puede llamar *x* a la columna A, generar en ella una serie de números y obtener por ejemplo su raíz cuadrada en la columna B por medio de la función raíz() y de manera similar obtener en la columna C la raíz cuadrada de los valores que están en la columna B sin que eso implique para el usuario recurrir a nociones matemáticas como la composición de la función raíz(raíz(x)).

Hemos mostrado previamente (Landa & Ursini, 1999) que al pedir a estudiantes de primer año de bachillerato (14 y 15 años de edad) sin instrucción previa acerca de funciones, que busquen una expresión analítica para etiquetar las columnas de números generadas por medio de fórmulas de hoja de cálculo, los lleva a un proceso de reflexión el cual los ayuda, por un lado, a tomar conciencia de las operaciones hechas con la hoja de cálculo y, por otro, a asignarle sentido a la expresión simbólica a través del referente numérico. Hemos mostrado también que las expresiones simbólicas son mediadas por el ambiente computacional (Landa, 1999).

En la hoja de cálculo, al cambiar el valor numérico de una celda y observar que se modifica simultáneamente el valor de la celda asociada, el sentido de la variación funcional es el de una relación puntual de causa-efecto. Si se tiene una tabla 'dinámica', es decir, si al modificar el valor de la primera celda de la columna de la variable independiente todas las demás celdas sufren modificaciones, la hoja de cálculo despliega un comportamiento más general de la variación. La variación es ahora un proceso hecho por una 'maquina funcional' en el sentido que la transformación es llevada a cabo dentro de una 'caja negra' cuyo contenido no es directamente accesible para el usuario.

En la hoja de cálculo hay maneras de visualizar la dependencia entre celdas pero no la relación entre columnas de números. Al representar por ejemplo, el patrón de comportamiento de las fórmulas raíz(raíz(A3)), raíz(raíz(A4)), raíz(raíz(A5)). por medio de la expresión simbólica raíz(raíz(x)), se establece la relación funcional entre las columnas al encerrar en esos símbolos la variación 'vertical' de las fórmulas por un lado, y por otro al considerar la correspondencia 'horizontal' ya no de algunas celdas en particular, sino el comportamiento general de la correspondencia entre las columnas de números. Los símbolos de corte algebraico despliegan así el 'interior' de esa caja negra que determina la relación entre las columnas.

Las funciones de la hoja de cálculo desplegadas en columnas de números, adquieren el sentido matemático de funciones al simbolizarse en una expresión analítica al representar la variación y la relación general entre las columnas de números.

Introducción

Al trabajar funciones con lápiz y papel o con sistemas algebraicos computarizados se establecen relaciones funcionales a través de expresiones analíticas (por ejemplo f(x)=(x+10)/2) las cuales despliegan su comportamiento al representarlas por medio de una tabla de valores o de una gráfica. La relación funcional se establece y posteriormente se hace el análisis de su comportamiento a través de sus representaciones más usuales.

Al usar una hoja de cálculo para introducir nociones funcionales, el camino que seguimos para llegar a expresiones de corte algebraico para las relaciones funcionales es diferente.

Llevamos a cabo el estudio con 9 parejas de estudiantes de 14-15 años de edad durante 8 sesiones de hora y media quienes no habían tenido instrucción formal acerca de la noción de función y no manejaban la hoja electrónica de cálculo. Simultáneamente se introdujo el manejo de la hoja electrónica y actividades en las que subyacen nociones de funciones. El investigador era el maestro del grupo. Los datos constan de los reportes que los estudiantes hicieron por escrito de los resultados obtenidos y de las notas tomadas por el investigador durante las sesiones.

Se introduce a los estudiantes a la hoja electrónica con la sintaxis de las operaciones aritméticas empleando los nombres de las celdas. Los nombres refieren a la posición de las celdas en la hoja de cálculo determinado por la intersección de la fila y la columna, haciendo de los cálculos aritméticos fórmulas de hoja de cálculo al relacionar contenidos de celdas.
En una segunda actividad, se les pide a los alumnos generar en la columna A una columna de números usando fórmulas, a partir de la expresión 'a la celda de arriba le agrego uno'. En la columna B sumar el número 10 a las celdas de la columna A empleando fórmulas y dividir TODO entre dos. Se les indica a los estudiantes etiquetar con la letra x la columna A y se les pide encontrar una expresión en términos de x para la columna B.

Como tercera actividad, se les pide a los estudiantes generar en la columna A una serie de números, obtener en la columna B la raíz cuadrada de las celdas de la izquierda con la función raíz(). Se les pide también que en la columna C obtengan la raíz cuadrada de las celdas de la izquierda. Se le llama x a la columna A y f(x) a la columna B. Se les pide determinar la expresión simbólica de las columnas B y C en términos de x.

Hemos mostrado previamente (Landa & Ursini, 1999) que al buscar la expresión simbólica, lleva a los estudiantes a un proceso de reflexión el cual los ayuda, por un lado, a tomar conciencia de las operaciones hechas con la hoja y, por otro, a asignarle sentido a la expresión simbólica a través del referente numérico. El sentido de dichas expresiones simbólicas es la discusión que planteamos en éste escrito.

Análisis y discusión

En la actividad de introducción los alumnos cambian varias veces el valor de la celda independiente. Una manera de manifestarse el vínculo establecido entre ellas es por la variación que presentan las celdas asociadas. La relación entre ellas se percibe visualmente y es la fórmula de la hoja de cálculo el mecanismo que logra el vínculo. La relación establecida entre celdas toma otra dimensión al no ser un ente abstracto ya que la fórmula encarna la relación.

Las relaciones entre celdas las establecen las fórmulas a través de operaciones aritméticas.

Esa relación puede carecer de sentido al editar la fórmula =A1+20 en la celda A2 por ejemplo, cuando el contenido de la celda A1 es 'Juan'. La hoja de cálculo al 'realizar' la operación =Juan+20 nos presenta un mensaje de error. Sin embargo la asociación entre las celdas queda establecida y cobra sentido al sustituir el nombre por algún número.

Al cambiar el valor numérico de una celda y observar que se modifica simultáneamente el valor de la celda asociada, se presenta una variación cuyo sentido es el de una relación puntual de causa-efecto. El alumno decide el valor que introduce en la celda independiente y de acuerdo a él las celdas dependientes se modifican. Son imágenes puntuales las que se muestran de la relación funcional establecida por las fórmulas de la hoja de cálculo

En la segunda actividad los estudiantes generan una 'tabla dinámica' de la siguiente manera: Los estudiantes introducen el número 1 en la celda A3 (fig. 1). Localizan el cursor en la celda A4 y traducen la expresión ‘sumar uno a la celda de arriba’ a la fórmula =A4+1. De manera similar escriben fórmulas en A5 y A6 respectivamente e inmediatamente se les enseña como usar el ratón para ‘arrastrar’ hacia abajo las fórmulas para obtener la secuencia de números hasta donde ellos quieran. La siguiente instrucción es sumar 10 a cada celda y dividir TODO entre dos. Espontáneamente todos los estudiantes escriben en la celda B3 la fórmula =A3+10/2 lo cual da como resultado el número 6. El énfasis asignado al escribir con letras mayúsculas la palabra TODO, hace que los estudiantes esperen obtener el número 5.5. Al no presentarse dentro de la celda dicho resultado, les lleva a cuestionarse en la manera de obtenerlo.

Se les indica que pueden usar paréntesis sin decirles cómo, pero es suficiente ya que los alumnos escriben la fórmula =(A3+10)/2 y al aparecer el valor deseado arrastran hacia abajo su fórmula con el ratón.

	A	B	C
1		(A+10)/2	
2	x	=(x+10)/2	
3	1	5.5	
4	2	6	
5	3	6.5	
6	4	7	
7	5	7.5	

fig. 1

Los paréntesis surgen en ésta actividad como un contenedor que encapsula a los valores encerrados entre ellos y los opera como un todo. Si bien es un recurso de escritura, en la hoja de cálculo adquiere la categoría de operadores dado que, además de tener teclas propias como los símbolos de división, suma, resta, multiplicación, determinan la operación que se realiza. No son un accesorio para hacer más presentable la redacción de las operaciones como lo pudieran ser los ‘corchetes’ [ ] o ‘llaves’ { } que eventualmente, durante la investigación, algunos estudiantes pretenden emplear y que la hoja de cálculo no permite. La ‘función’ de los paréntesis es la de agrupar operaciones. Agrupar no es en sí una operación aritmética pero da orden, forma y contenido a la operación en la que intervienen. Surgen en la actividad como necesidad para los estudiantes y el sentido es el de agrupar operaciones aritméticas.

Para obtener la expresión simbólica de los cálculos efectuados dos métodos usaron los estudiantes:

Método 1:

Con apoyo del maestro una pareja de estudiantes regresan (fig. 1) a ver las fórmulas =(A3+10)/2, =(A4+10)/2, =(A5+10)/2... y se les pregunta:

Investigador: ¿Quiénes son A3, A4, A5... en las fórmulas de la columna B?
Alumno: Estas celdas (indicando sobre la pantalla las celdas de la columna A con su dedo)
Investigador: ¿Cómo llamamos a esas celdas?
Estudiante: Llamamos a todas x
Investigador: ¿Qué operación estamos efectuando con x?
Estudiante: Sumando 10 y dividiendo todo entre 2
Investigador: ¿Cómo podemos escribir eso?
Estudiante: x mas 10 todo entre dos

Así, los estudiantes escriben (x+10)/2 como nombre de la columna B con o sin el signo =

Método 2:

Otra pareja de estudiantes, espontáneamente escribieron (A+10)/2 en la celda B1. Se les dice que es correcto y se les pregunta:
Investigador: ¿Pero quién es la columna A?
Estudiante: Es ésta columna
Investigador: ¿Cómo le llamamos a esa columna?
Estudiante: Le llamamos x
Investigador: Entonces, si no lo quiero escribir como (A+10)/2 sino en términos de x ¿cómo lo puedo escribir?
Estudiante: Se puede escribir (x+10)/2

La expresión (x+10)/2 como etiqueta de la columna B, no es resultado de un cálculo simbólico sino una abstracción del patrón de comportamiento de las fórmulas =(A3+10)/2, =(A4+10)/2, =(A5+10)/2... La expresión en términos de x, representa dos cosas. Por una lado representa al conjunto de valores numéricos desplegados en la tabla, y por otro representa las fórmulas que producen dichos números. La expresión simbólica es una abstracción de la variación 'vertical' de las fórmulas y la encierra en ella.

Al haber generado la columna A con fórmulas relacionadas verticalmente y la columna B con fórmulas relacionadas horizontalmente con las celdas de la columna A, se tiene que, al cambiar el valor de la celda A3 todas las demás celdas sufren modificaciones. Se presenta un 'dinamismo' en la tabla de valores que es independiente de las fórmulas que despliegan los valores numéricos y de las expresiones simbólicas. Al poderse modificar su contenido por decisión del usuario sin que eso lleve a la necesidad de hacer cambios ni en las fórmulas ni en las expresiones simbólicas hace resaltar la arbitrariedad de los valores empleados y la independencia de la expresión simbólica de la tabla de valores.

El sentido de la variación que despliega la tabla dinámica en la hoja de cálculo, es el de un procedimiento llevado a cabo por una 'maquina funcional'. Basta con modificar el contenido de una celda para que automáticamente la tabla completa sufra modificaciones. La transformación es llevada a cabo dentro de una 'caja negra' donde el contenido no es accesible de manera directa para el usuario.

El 'interior' de esa caja negra se hace visible con las expresiones simbólicas al indicar el procedimiento de los cálculos llevados a cabo. No es el cálculo aritmético de una celda, sino el algoritmo que gobierna la relación entre todos los pares de celdas.

La correspondencia entre celdas es posible visualizarla por medio de flechas al usar el comando de rastrear dependientes de la hoja de cálculo pero no existe procedimiento equivalente para las columnas. La correspondencia 'horizontal' entre las columnas se establece al etiquetar con x y (x+10)/2 a las columna A y B respectivamente. La expresión simbólica adquiere de ésta manera el sentido matemático de relación funcional a partir de sus referentes numéricos.

La raíz de la raíz

En la tercera actividad, la consigna dada a los estudiantes es 'obtener la raíz cuadrada de las celdas de la izquierda'. Los estudiantes generan la variable independiente en la columna A empleando la fórmula =A3+1 y 'barriendo' hacia abajo. De manera espontánea emplean números naturales e inician con el número 1. La columna B la generan a partir de la fórmula =raíz(A3) y barren hacia abajo como traducción directa de la expresión 'la raíz cuadrada de la celda de la izquierda'. La columna C la generan con la fórmula =raíz(B3).

Al etiquetar las columnas, escriben x para la columna A y raíz(x) o =raíz(x) para la columna B sin que esto genere ya ningún conflicto. Las dificultades se manifiestan cuando tienen que determinar la etiqueta que corresponde a la columna C. Se observa que algunos estudiantes etiquetan la columna C escribiendo raíz(B3). Se interviene indicándoles que eso no es una 'etiqueta' apropiada pues es la fórmula que usa el valor de esa celda. Tratan de corregir escribiendo raíz(x) pero se les hace notar que esa no es la operación que están efectuando ya que x representa los valores de la columna A, lo que muestra las dificultades de los estudiantes para expresar la operación efectuada lo que los obliga a reflexionar sobre el significado de la fórmula empleada.

Algunos estudiantes, usan otras celdas de la hoja de cálculo para ensayar fórmulas del tipo =raíz(A3/2) o =raíz(A3*2) con la intención de reproducir los mismos valores de la columna C. Al parecer su objetivo es encontrar una fórmula que les permita generar los mismos valores de la columna A. Un estudiante hace la siguiente reflexión en voz alta para sí mismo: 'La raíz de la celda de la izquierda. pero ya le saqué raíz, así que es ... la raíz de la raíz'. Al decir 'la raíz de la raíz' escribe la fórmula =raíz (raíz (A3). La hoja de cálculo indica que los paréntesis no coinciden y eso los lleva a la fórmula =raíz(raíz(A3)). Esta última fórmula es equivalente a la fórmula empleada para generar la columna C =raíz(B3) y surge de manera espontánea pues no se les dio instrucción expresa a los estudiantes de cómo producirlas. Una vez lograda la expresión =raíz(raíz(A3)) pasan directamente a etiquetar la columna C con la expresión =raíz(raíz(x)) o raíz(raíz (x) empleando correctamente los paréntesis. Hemos mostrado previamente como las expresiones simbólicas son mediadas por el ambiente computacional (Landa, 1999).

En esta actividad, la función de los paréntesis al usar la función raíz() no es el de agrupar operaciones aritméticas. La hoja de cálculo exige su presencia para aplicar dicha función al argumento encerrado en ellos. Para la columna B el argumento de la función raíz() son las celdas de la columna A al arrastrar hacia abajo la fórmula =raíz(A3). La función de los paréntesis es aquí el de indicar el argumento para la función raíz(). La expresión simbólica raíz(x) indica sin ambiguedad la referencia del argumento empleado.

Para la columna C, el argumento de la función en términos de x no se detecta inmediatamente. Los estudiantes tienen la necesidad de encontrar la fórmula =raíz(raíz(A3)) equivalente a la fórmula =raíz(B3) en el sentido de que producen los mismos valores numéricos en la actividad, con la finalidad de identificar el argumento de la función compuesta.

La procedencia del argumento queda establecida con los símbolos raíz(raíz(x)) al hacer la referencia con las columnas de números, lo cual lo consideramos como una noción de argumento funcional. Nótese que existe una tercera función de los paréntesis en la hoja de cálculo al emplear funciones del tipo =PI(). En éste caso los paréntesis son código que se exige para desplegar el valor 3.14159265358979 si se requiere.

Usar funciones de la hoja de cálculo no implica automáticamente considerarlas como relaciones funcionales en el sentido matemático. Al establecer relaciones entre celdas empleando funciones matemáticas de la hoja, adquieren el carácter de operaciones automáticas en donde incluso el algoritmo que produce los resultados no es accesible al usuario. Las funciones adquieren un carácter aritmético al realizarse automáticamente los cálculos de manera similar a efectuar con la hoja operaciones aritméticas por muy complicadas que sean.

Al arrastrar hacia abajo una fórmula con el ratón, se muestran automáticamente valores que deben ser interpretados a partir de las fórmulas que los producen. La necesidad de interpretar los valores surge al pedir simbolizar las relaciones establecidas.

Conclusión

Los movimientos adecuados del ratón, establecen relaciones funcionales entre celdas. Descubrir esta relación funcional es un trabajo del usuario. La verificación visual de los valores obtenidos a través del conocimiento aritmético implica una noción de entrada-salida, de causa-efecto de la relación establecida.

Las fórmulas, aún producida por los estudiantes, son eclipsadas al aparecer el cálculo esperado y por la manera automática de producirse al usar el ratón lo que implica un comportamiento funcional de caja negra de las tablas dinámicas.
Las expresiones simbólicas dejan al descubierto el interior de la caja negra y contienen a la relación funcional.

Las funciones de la hoja de cálculo desplegadas en columnas de números, adquieren el sentido matemático de funciones al simbolizarse en una expresión analítica.
Las expresiones de corte algebraico representan la variación y la relación general entre las columnas de números y es la manera de asignarle un sentido matemático a las funciones de la hoja de cálculo.

Referencias bibliográficas

Landa, A. 1999. *Composición de funciones con la hoja de cálculo. Matemáticas no tradicionales al usar tecnología*. XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Santo Domingo, República Dominicana.

Landa, A. & Ursini, S. 1999. *Spreadsheet and composition of functions* . Proceedings of the Twenty First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México. Vol. . pp. La página es la 401 Volume 1

Puntos Notables en el Triángulo Usando Tecnología

Armando López Zamudio.
larmando@yreri.crefal.edu.mx
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No.94
México

Introducción

En el uso de las computadoras y calculadoras graficadoras en la educación matemática, existe una clara necesidad de actividades didácticas, que suministren un buen acercamiento al aprendizaje de las matemáticas, que garantice beneficios a los participantes del proceso enseñanza aprendizaje. En este reporte se dan a conocer algunas actividades que permiten al estudiante explorar los puntos notables de un triángulo (desde los puntos clásicos como: circuncentro ortocentro etcétera hasta el punto de Fermat, Napoleón, Euler, Nagel, Gergonne, Spieker, Schiffler, entre otros Bailey este último encontrado en 1998).

Objetivos

Dar a conocer un material que surge de un proyecto de investigación el cual consiste en generar secuencias didácticas que sea guía del alumno e instrumento del docente, en actividades guiadas usando software de geometría dinámica como Géometre CABRI (Cahier de Broillon Interactif: Cuaderno de Notas Interactivo) (Baulac, I, et. Al. 1992)o The Geometer's Sketchpad (Jackiw 1995). Se ejemplifica únicamente un tópico de geometría plana enmarcado para estudiantes del primer año de bachillerato (15 a17 años de edad)

Antecedentes

Para (Zimmermann 1990) con la ayuda de las imágenes visuales podemos iluminar las múltiples facetas de la geometría y más allá de eso, en muchos casos es posible presentar un resumen geométrico de los métodos de investigación y demostración. La utilización de la computadora favorece la interacción del alumno con su objeto de estudio que, de acuerdo a la epistemología Genética y la teoría constructivista (Piaget 1986; Resnick 1990; Swenson 1991) es una condición importante para lograr aprendizajes significativos. Algunos estudios han demostrado que la instrucción de la geometría asistida por computadora tiene algunos beneficios (Suydam, Marilyn, 1985; Tall,1994) se ha encontrado que es ligeramente mejor para la enseñanza de conceptos verbales, de dibujo y de verificación de teoremas así como de apoyo visual para conjeturar y dar certeza en las proposiciones geométricas. Alan J. Bishop (Bishop, 1992) al referirse a investigaciones que analizan el papel que juega el uso de software para la enseñanza de la geometría y los procesos visuales de los estudiantes, exhorta al maestro de matemáticas a la transformación de la enseñanza de la geometría diciendo: *en lugar de ser difícil y aburrido el tema concerniente al aprendizaje árido de las demostraciones y teoremas, que es así como muchos de quienes aprenden creen que es la geometría, pueden ser conducidos al descubrimiento y excitación y fascinación del tema...* El uso de software de geometría dinámica nos permite llevar acabo esa transformación de la enseñanza que señala Bishop, con esta tecnología se pueden implementar actividades para que los estudiantes descubran y conjeturen acerca de propiedades asociadas a figuras geométricas. La OCED (Black, et.al,1996) publicó 23 casos de estudio referidos específicamente a la innovación en la educación científica, matemática y tecnológica, procedentes de 13 países. Esto es muestra de la preocupación mundial que existe por investigar el impacto de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas ellos señalan que en los últimos años se están desarrollando investigaciones en todo el mundo acerca de la enseñanza de las matemáticas, ciencia y tecnología. Pues casi todas las condiciones sociales están cambiando con rapidez y las escuelas deben reflejar esos cambios con nuevas formas de preparar a sus estudiantes para el futuro. Y la insatisfacción de los resultados en las ciencias, matemáticas y tecnología de los estudiantes de los países los a llevado a la investigación. Pero, ¿qué han encontrado y qué proponen estas investigaciones?

Países como Canadá, Noruega, Irlanda, Estados Unidos, Alemania y Japón han indagado en estudios de casos. Trabajando aspectos de enseñanza en el aula de la física y la química, en estudiantes de 15 a 18 años sin antecedentes de estas materias. Con una participación de 250,000 estudiantes de bachillerato la integración de la ciencia y las matemáticas fue uno de los temas de estos proyectos, es decir vincular la enseñanza de las matemáticas intensamente con el mundo natural, el ingenio humano, todos estos estudios han generado una gran reforma curricular, pero en estos estudios de matemáticas se aprecia una gran variedad en la escala y propósitos de lo que se ha intentado. Esto ha originado dudas acerca de cuánta innovación se puede introducir con éxito de una sola vez. En noruega por ejemplo se desarrollaron métodos de enseñanza de matemáticas que implicaban una mayor actividad y responsabilidad de los alumnos, y se descubrió que la comunicación entre profesores, padres y alumnos es muy importante. En Francia se promovió un examen nacional para identificar las necesidades de los alumnos y el impacto de los nuevos métodos de enseñanza de los profesores, mientras que en Japón se desea promover la solución de problemas y la individualidad, y saber como manejar los progresos tecnológicos, en contraste, el enfoque Nacional de los Estados Unidos a través de The National Council Teacher of Mathematics (NCTM, 1989) el énfasis es hacia deducciones y resolución de problemas, con el empleo de calculadoras y computadoras, promoviendo como una de las estrategias de enseñanza el trabajo en grupo o cooperativo. En los Estados Unidos se diseñó un curso de precálculo basado en modelación de fenómenos reales el estudio indicó que, a algunos profesores les resultó fundamental el uso de las calculadoras y computadoras. En Suiza una investigación se realizó donde jugó un papel importante la representación, comprensión y destreza de la experiencia-modelación en un contexto transdisciplinario. En Austria la tecnología electrónica a sido vinculada con asuntos ambientales y ésta con las matemáticas. En Australia un proyecto para las ciencias, las matemáticas y la tecnología en la educación, subraya un aprendizaje centrado en el alumno así como el que los profesores estén bien preparados.

Los estándar de la (NCTM 1989) sin duda se ha convertido en una fuente bibliográfica indispensable en nuevas propuesta y análisis de desarrollo curricular de muchos países. Sus sugerencias de la resolución de problemas, comunicación, razonamiento, conexiones matemáticas, fomento de actividades de conductas para estimar, conjeturar, investigar y verificar se están considerando ampliamente.

La introducción de las computadoras en la educación matemática hace necesario cambios de actitudes tanto de los profesores como de los alumnos, en particular la interacción profesor-alumno. Es por ello que existe la necesidad, por parte de profesores y alumnos, de contar con nuevo tipo de actividades y materiales de trabajo que permitan una adecuada orientación de estos cambios. El uso de las nuevas tecnologías debe tomar en cuenta los avances que se han producido tanto en didáctica de las matemáticas como en las teorías del aprendizaje.

Para (Fritzler 1997) el programa CABRI apoya al estudiante en el proceso de aprender a visualizar. Las figuras geométricas se conceptualizan como resultados de construcciones, cuyas propiedades son definidas por las relaciones establecidas entre sus partes. Esta visión es más difícil de transmitir por medio de construcciones hechas con lápiz y papel, entonces la observación de las propiedades que se mantienen invaribles al modificar la forma y el tamaño de las figuras, motiva la explicación por parte del estudiante en un ambiente de geometría dinámica.

Metodología

Se realiza el diseño de las secuencias para que el estudiante las use a manera de practicas de laboratorio. El material se valida en un estudio piloto, el cual permite analizar las dificultades de aprendizaje generales y específicas de los estudiantes y estas dan pautas para modificar las instrucciones de las secuencias didácticas. También esto permite detectar las dificultades que el docente sortea al aplicarlas.

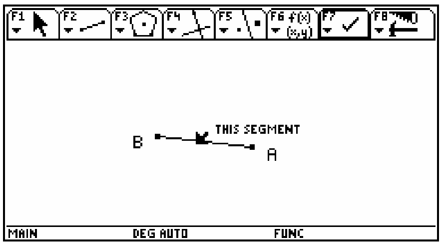
En una primera sesión se reparte unas hojas en las que se resume los conocimientos básicos sobre el uso del software y se describe brevemente cada uno de los comandos de los menús, para que los tengan, en cada momento, a la hora que realicen sus secuencias. Enseguida el docente apoyado de un Data Show o View Screen lee y construye junto con los alumnos actividades introductorias como construcción de un triángulo, círculo, mediatriz, alturas bisectrices, esto con el objeto de que el estudiante se familiarice con el software. Posteriormente se da a conocer las características de un punto notable y se va haciendo la construcción de manera que el maestro realiza un paso y el alumno enseguida, hasta verificar que el punto notable existe. Después el estudiante guiado únicamente por su secuencia didáctica contestará su práctica, en un tercer tiempo se dará únicamente las características de un punto notable y el estudiante realizara toda la construcción sin guía, en un último proceso el estudiante es inducido a que descubra por sí sólo puntos notables en el triángulo.

A continuación daremos un ejemplos de cada una de estas fases las cuales fueron propuestas en un curso taller donde el software que se uso fue el CABRI que viene implementado en la calculadora graficadora TI-92. De Texas Instrument.

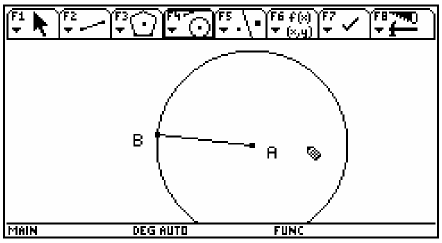
Actividad introductoria:
Construir un triángulo equilátero de lados un segmento dado (Proposición uno de los *Elementos* de Euclides)

Instrucciones: Crear archivo, presione el menú **F8** y el comando **3** baje el cursor a la caja Variable y teclear *GEO1.*

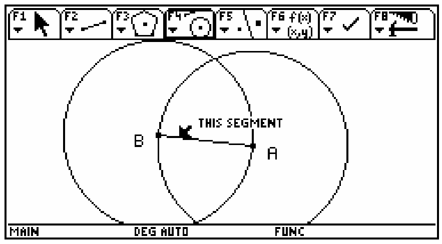
1.- Construir un segmento con extremos en *A* y *B*, presione **F2** y ejecute el comando **5**, luego presione **F7** y el comando **4** para dar nombres a los extremos del segmento.



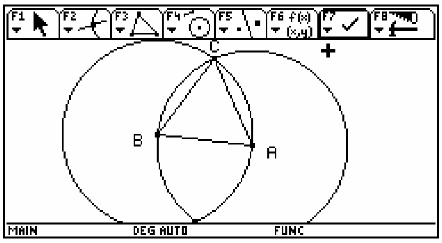
2.- Construya un círculo con centro en el punto *A* y radio el segmento *AB* presionando **F4** y ejecutando el comando **8**.



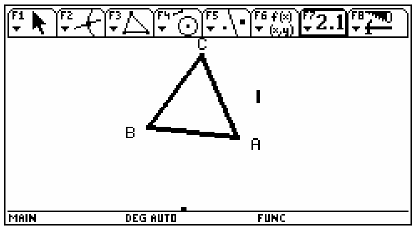
3.- Construya un círculo con centro en *B* y radio el segmento *BA*, presionando **F4** y ejecutando el comando **8**.



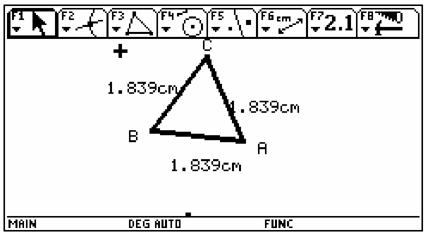
4.- Encuentre la intersección de las dos circunferencias trazadas presionando **F2** y ejecutando el comando **3**. De el nombre de C a cualquiera de los dos puntos de intersección de las circunferencias, presione **F7** y ejecute el comando **4.** Trace el triángulo formado por los puntos *A, B* y *C*, presione **F3** y ejecute el comando **3**



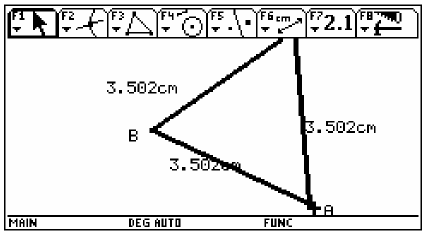
5.- Remarque el triángulo trazado y oculte los círculos, presione **F7** y ejecute el comando **8**, posesiónese del triángulo y de Enter, presione **F7** y ejecute el comando **1**.



6.- Mida los lados del triángulo, presione **F6** y ejecute el comando **1**. ¿Qué observa? Note que los lados del triángulo tienen la misma magnitud.



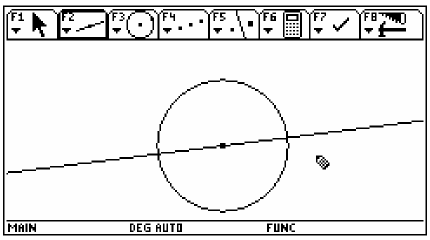
7.- Presione **ESC** y posesiónese de un vértice presione y no suelte la tecla **Drag** (la "manita") y mueva el cursor. ¿Qué puede concluir?



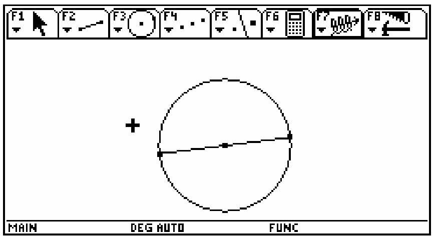
Actividad introductoria para conjeturar: Descubra un patrón que relacione el perímetro de un círculo con su diámetro.

Instrucciones: Crear archivo, presione el menú **F8** y el comando **3** baje el cursor a la caja Variable y teclear *GEO2*

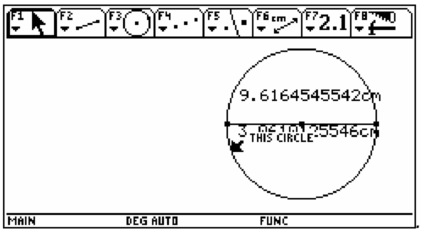
1.- Construya un círculo, presione **F3** y ejecute el comando **1**. Trace una línea que pase por el centro del círculo, presione **F2** y el comando **4**, posesioné el cursor en el centro del círculo y de **Enter**



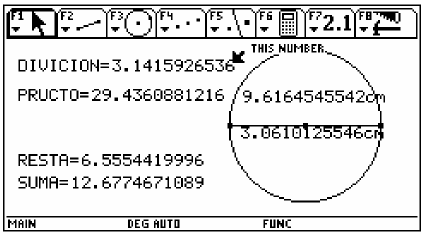
2.- Encuentre los puntos de intersección de la línea trazada que pasa por el centro del círculo, presione **F2** y ejecute el comando **3**. Trace el diámetro del círculo, trazando el segmento que une los dos puntos de intersección del círculo y la línea, presione **F2** y seleccione el comando **5** oculte la línea trazada, presione **F7** y seleccione el comando **1**..



3.- Mida el perímetro y el diámetro del círculo, presionando **F6** y el comando **1.**



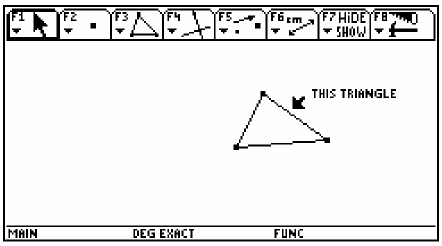
4.- Marque estas dos medidas como variables y calcule su suma, resta, producto y cociente, presione **F6** y seleccione el comando **6,** posesiónese de la medida del perímetro de **Enter** y escriba /, luego posesiónese de la medida del diámetro y de **Enter**. Genere otras circunferencias, discuta y conjeture.



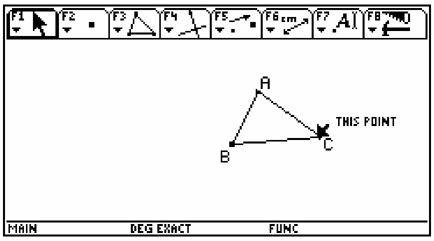
Actividad Guiada:El punto Nagel: Suponga un triángulo cualquiera ∆ABC, Sea
Ea=El excírculo de A.
Eb=El excírculo de B
Ec=El excírculo de C
Sea
D=El punto donde Ea toca BC,
E=El punto donde Eb toca CA,
F=El punto donde Ec toca AB.
Las líneas AD, BE y CF se unen en un punto al que nombramos X , este es llamado el punto Nagel.

Instrucciones: Crear archivo, presione el menú **F8** y el comando **3** baje el cursor a la caja Variable y teclear *GEO3.*

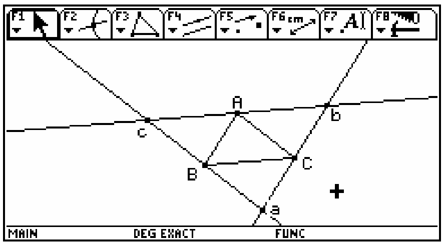
1.- Teclear **F3** y seleccione triangle o presione el **3** y de **Enter**, posesioné el cursor donde quiera ubicar el primer vértice del triángulo de un **Enter**, posesioné el cursor donde quiera el segundo vértice y de **Enter** y por último posesioné el cursor donde quiera el tercer vértice y de dos **Enter** y finalmente presione **ESC.**



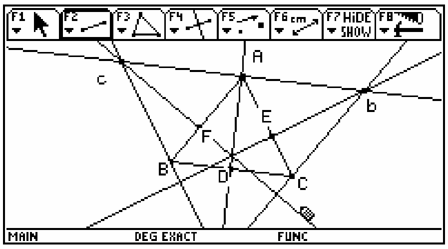
2.- Asigne nombres a los vértices (sean estos *A, B y C*) del triángulo, use el menú **F7** y el comando **4.** Posiciónese de cerca de cada vértice(hasta que aparezca el letrero (THIS POINT) y de **ENTER**, entonces pulsando la tecla SCHIF teclear la letra correspondiente.



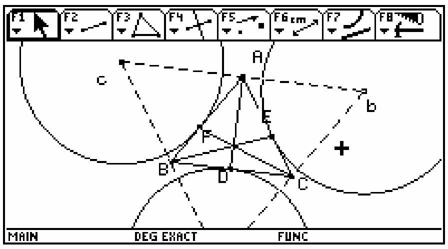
3.-Trace líneas paralelas a los lados del triángulo ABC que pasen por los vértices opuestos, pulse **F4** y el comando **2**, posiciónese del segmento BC y de un **ENTER** enseguida posiciónese del vértice A y de un **ENTER**. Del mismo modo para AB y AC. Encuentre los puntos a, b y c que son las intersecciones de las rectas paralelas antes trazadas, presione **F2** y use el comando **3**.



4.-Presione **F4** y ejecute el comando **1**, posesiónese del punto “a” y de un **ENTER**, posesiónese del segmento **BC** hasta que aparezca el mensaje (PERPENDICULAR TO THIS SAIDE OF THE TRIANGLE) y de un **ENTER**, nuevamente posesiónese del punto “b” de **ENTER** y después posesiónese del segmento AC y de un **ENTER**, del mismo modo con el punto “c” y el lado AB. Nombre al punto de intersección de los lados y las rectas perpendiculares antes trazadas D,E y F. Oculte todas las líneas.



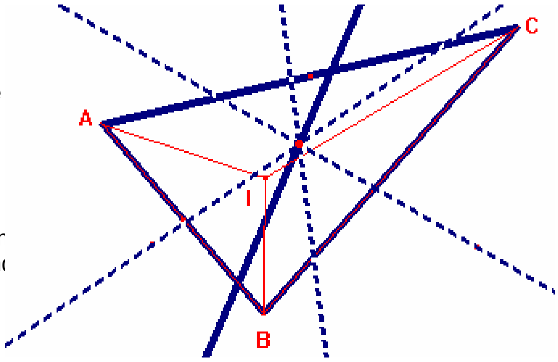
5.-Trace los excírculos con centro en “a” y radio aD, con centro en “b” y radio bE y con centro en “c” y radio CF, pulse **F3** y ejecute el comando **1**, posesiónese del punto “a” y de **ENTER** arrastre el cursor hasta el punto D y de **ENTER**, así sucesivamente con “b” y ”c”. Una los puntos a, b y c y obtenga un triángulo. Trace los segmentos AD, BE y CF. Arrastre cualquiera de los vértices A, B o C. ¿Qué puede conjeturar?
Al trazar las semirectas del punto “a” pasando por D, del punto “b” pasando por E y del punto c pasando por F, estas semirectas se interceptan en un punto que se llama MITENPUNKT, este punto fue estudiado por C. Von Nagel en 1836. ¡Verifíquelo!



Actividad verificar el siguiente punto.
Punto Kurt Schiffler (1896-1986):

Sea I el incentro del triángulo Δ ABC. **El** punto de Schiffler de ΔABC es el punto donde concurren las rectas de Euler (recta que pasa por el circuncentro, ortocentro y baricentro) de los cuatro triángulos ΔABC ΔBCI, ΔCAI ΔABI.

Ver Kurt Schiffler, G. R. Veldkamp, ar W.A. van der Spek, Problem 1018 an Solution, Crux Mathematicorum 12 (1986) 176-179.



Encuentre el punto de Gergonne: Suponga un triángulo cualquiera ΔABC, Sea

D= Punto de tangencia del círculo inscrito con BC.
E=Punto de tangencia del círculo inscrito con CA.
F=Punto de tangencia del círculo inscrito con AB.
Las líneas AD, BE, CF se interceptan en un punto X llamado Punto Gergonne (Matemático francés 1816) del ΔABC**. (Note que aquí no se da dibujo)**

Actividad última fase: se pide al estudiante que intente descubrir algún punto notable considerando como elementos iniciales lo siguiente Sea un triángulo cualquiera ΔABC, Sea

D= Punto medio de BC
E=Punto medio de CA
F=Punto medio de AB

Puedes trazar alturas, mediatrices, rectas de Euler, bisectrices unir puntos medios con vértices del triángulo ΔABC, trazar circunferencias inscritas circunscritas, se deja libertad de construcción.

Resultados:

Al implementar estas actividades en un curso de 20 profesores de matemáticas, los profesores se mostraron muy excitados por estar verificando resultados tan recientes, muchos de los cuales para ser demostrados formalmente no estaban al alcance de un curso normal de bachillerato, pero haciendo uso de software de geometría dinámica esto lo permitía, debo destacar que muchas veces los participantes no conjeturan, otros en cambio se inmersan en cuestiones de funcionamiento del software, sin embargo el uso de esta tecnología permite dar un visión completa de los tópicos en tiempos razonables, lo cual, en el pasado resultaba imposible. Se observo que el manejo verbal de definiciones, teoremas clásicos de geometría plana, el uso del trazo auxiliar se hacen necesarios para tener éxito en el desarrollo de las dos últimas fases de las secuencias. Es importante confrontar a los participantes en plenaria para enriquecer las actividades y la capacidad de argumentar con razonamientos lógicos.

Referencias Bibliográficas:

Baulac, I, et. Al. (1992).*Cabri Géomètre: The Interarctive Notebook*., . Laboratoire de Structures Discretes et de Didactique de l'IMAG of l'Université Joseph Fourier in Grenoble.Software

Bishop J. Alan .(1992) Implicaciones Didácticas de la investigación sobre la Visualización. Versión en español de Rodrigo Cambray Nuñez, *Antología Educación Matemática*, (pp.29-

42)Edición del Grupo de Estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato del Depto. de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Black Paul et al (Compiladores). (1996) *Matemáticas, Ciencia y Tecnología-Innovaciones* Ed. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. D.R.Organización para la Cooperación Económica y el desarrollo (OCED).

Fritzler H. Wolfgang (1997*) Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo, Una aplicación del software educativo "Cabri Géometre"* **Educación Matemática** Ed. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. Vol. 9 No. 2 pp.116-136.México.

Jackiw, Nicholas (1990) The Geometer's Sketchpad, , desinger Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press, , Software.

National Council of Teachers of Mathematics, (1989).*Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Va.: The Council. U.S.A,

Piaget, J. E Inhelder, B. (1986) *The Childs's concption of space*. Londosn Rountledge and Paul

Resnick, L., Ford, W (1990) *La enseñanza de las matemáticas y su fundamento Psicológico*. PAIDOS

Suydam, Marilyn N.(1985). The shape of instruction in geometry: Some Highlinghts from research., *Mathematics Teacher.*, September. 481-486.

Swenson, Leland (1991). *Teorías de Aprendizaje.*, Ed. PAIDOS.

Tall David (1994). Computer environments for the learning of mathematics. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*., Edited by Biehler R. , Scholz W. Roland, Sträber Rudolf and Winkelmann. Kluwer Academic Publishers., (pp.189-199)The Netherlands.

Zimmermann, W et al (Editors). (1990) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* Committee on Computers in Mathematics Education (CCIME).

Rediseño e Implementación de un Curso de Matemáticas, utilizando la Plataforma Tecnológica LOTUS NOTES/LEARNING SPACE

María Beatriz Gómez Talancón
begomez@campus.mor.itesm.mx,
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Morelos.
México

Resumen

En el Sistema Tecnológico surge desde 1997 el proyecto de "Rediseño de la Práctica Docente" en el cual se toma en cuenta: el rediseño didáctico de los cursos, eje central del nuevo modelo educativo y la tecnología que incluye como una de sus características el uso del software Lotus Notes/Learning Space.

Los profesores que participan en este proyecto deben asegurarse en el rediseño de sus cursos que cuenten con tres elementos fundamentales:

- ✓ Una plataforma didáctica que enfatice aspectos como el razonamiento, el autoestudio, el aprendizaje colaborativo, el uso y análisis de la información , el contacto con la realidad, etc.
- ✓ Una plataforma tecnológica que permita tener acceso a información actualizada, a la planeación del curso, mejorar el trabajo en grupo y el colaborativo,, el trabajo asíncrono y a distancia.
- ✓ Actividades de aprendizaje que fortalezcan la adquisición de habilidades, actitudes y valores.

En este trabajo se presentan los resultados del Rediseño didáctico de un curso de Matemáticas II para alumnos de segundo semestre de bachillerato. En este rediseño, siempre se tomó en cuenta que el eje central de todos los temas, es el concepto de función, lo cual llevó a seleccionar estrategias de aprendizaje que facilitarán la aprehensión de dicho concepto y que a su vez permitieran el desarrollo de capacidades y habilidades como son la investigación, el análisis y síntesis de la información, el uso eficiente de la tecnología, el trabajo colaborativo, etc. Algunas de las estrategias seleccionadas son:

- Realización de prácticas en un Laboratorio Gráfico, que faciliten establecer la relación existente entre la representación gráfica y algebraica de las funciones.
- Construcción y uso de las Salas del Laboratorio Numérico-Algebraico, extrapolando algoritmos algebraicos, a hojas de cálculo Excel, a fin de agilizar la obtención de resultados numéricos que permitan a los alumnos centrarse en la interpretación de los mismos.
- Talleres para la Solución de Problema, en los cuales los alumnos investigan en otras áreas problemas cuya modelación conduce a las funciones estudiadas.

Actualmente el curso se encuentra montado en las bases de datos de Learning Space

1. en el ***Schedule*** se localiza la documentación didáctica del curso y su calendarización
2. el ***Media Center*** es la biblioteca electrónica del curso
3. a través del ***Course Room*** los alumnos y profesores interactúan asincrónicamente.
4. en el ***Profile*** se ingresan los datos personales de alumnos y maestros
5. en el ***Assessments*** los profesores realizan las evaluaciones.

Actualmente en el Sistema Tec se están impartiendo cursos rediseñados en 18,298 grupos, que representan el 55.4% del total que ofrece en diferentes niveles: bachillerato, profesional y graduados.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, es difícil concebir a una persona, una comunidad o a un país en total aislamiento. Los medios de comunicación no solo han contribuido a facilitar la interacción entre las personas, las empresas, las instituciones, etc., sino que también han generado una competencia comercial a nivel internacional, generando cambios importantes en la forma de llevar a cabo los negocios tradicionales y modificando los modelos productivos a nivel mundial.

Si el mundo se está modificando en el ámbito de las comunicaciones, negociaciones, formas de vida, etc., una consecuencia directa de este hecho deberá ser que la educación superior también tendrá que evolucionar junto con estas transformaciones.

Hoy en día, es importante que los profesionistas tengan la capacidad de discriminar, clasificar y procesar la información que obtienen de las redes computacionales, ya que en esta se apoyan, en muchos de los casos, para encontrar la solución a problemas sociales, económicos, culturales, etc.

El Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey consciente de los cambios que se están dando a nivel mundial y de los requerimientos de la sociedad actualiza su Misión para dar respuesta a estos cambios e incluye en ella elementos necesarios para que sus egresados no solo sean profesionales de excelencia, sino primordialmente personas con habilidades, actitudes y valores que les permitan desarrollarse profesionalmente como agentes de cambio, preocupados por su entorno y por el desarrollo sostenible de su país.

Una de las acciones que está llevando a cabo el Sistema Tec es el proyecto de Rediseño de los cursos que se imparten en preparatoria, profesional y posgrado. En ellos deben incorporarse acciones y/o actividades que permitan lograr el perfil requerido por los profesionistas del mundo actual, además de los conocimientos que tienen que adquirir de acuerdo al programa oficial de cada curso. Lo innovador de este proyecto es que además del rediseño didáctico de los cursos, éstos deben estar montados en la plataforma tecnológica Lotus Notes/Learning Space.

ETAPAS DEL PROYECTO DE "REDISEÑO DE LA PRÁCTICA DOCENTE"

Proceso de cambio

En el proceso de cambio el profesor busca rediseñar su curso, asegurándose que cuenta con tres elementos fundamentales:

1. Una plataforma didáctica que enfatice aspectos tales como el razonamiento, el autoestudio, el aprendizaje colaborativo, el uso y análisis de la información y el contacto con la realidad del país
   En esta etapa, el profesor hace explícitas sus intenciones educativas, de acuerdo a la Misión, en términos de objetivos de aprendizaje, combinando el programa analítico y las habilidades, actitudes y valores que espera desarrollar en el alumno; selecciona las estrategias de aprendizaje que utilizará, en función de lo anterior, que garanticen el autoaprendizaje, aprendizaje colaborativo, interacción con el medio y la autoevaluación; integra su plan del curso por sesiones o módulos y define el proceso de evaluación en función de las intenciones educativas
2. Una plataforma tecnológica que permita tener acceso a información actualizada, mejorar el trabajo en grupo y el colaborativo, la planeación del curso, el manejo de la información relacionada con el curso así como el trabajo asíncrono y a distancia.
3. *En esta etapa, el profesor integra el rediseño didáctico a la plataforma tecnológica Lotus Notes/LearningSpace, para hacer más eficiente su diseño.*
4. Actividades de aprendizaje que fortalezcan la adquisición de habilidades, actitudes y valores

Desarrollo del curso rediseñado

Esta etapa consiste en la puesta en práctica, durante un semestre del curso rediseñado durante la cual los profesores reflexionan permanentemente en cómo impacta la aplicación del rediseño en los diferentes factores que intervienen en el proceso, tales como: el papel del profesor, los aprendizajes de los alumnos y el uso de la tecnología, para hacer las adaptaciones necesarias que permitan el logro de los objetivos planteados.

Certificación del curso

Los cursos que han cumplido con las etapas anteriores son evaluados por el Comité de Certificación de la Rectoría, a fin de que puedan ser transferidos a cualquier Campus del Sistema que se interese por su adopción.

Espacios en la plataforma tecnológica

Learning Space está compuesto por cinco bases de datos:

Schedule. Es la base de datos donde se colocan todas las actividades que el alumno realizará durante el curso. Funciona como un menú principal del curso. Para comenzar una sesión en Learning Space, los alumnos primero deben entrar a esta base para informarse de cómo deben realizar las actividades.
Media Center. Es una biblioteca electrónica, con capacidad de soportar multimedios. Ahí se pueden colocar artículos, lecturas, formatos, archivos, videos, simuladores, etc., relacionados con el curso
Course Room. Es el componente más dinámico de Learning Space, es donde se realizan las discusiones, las cuales pueden ser públicas o privadas.
Profiles. Es la base de datos con información relevante de los alumnos e instructores.
Assessments. Es donde se realizan las evaluaciones. A esta base de datos sólo pueden acceder los maestros.

Al iniciar una sesión en un curso de Learning Space aparece un navegador que permite desplazarse al Schedule, Media Center, Course Room y Profiles.

REDISEÑO DIDÁCTICO DEL CURSO DE MATEMÁTICAS II

El rediseño del curso de Matemáticas II se inició con un análisis de su contexto curricular y de los problemas cognoscitivos que generalmente presentan los alumnos para el aprendizaje de determinados temas del programa, con el fin de detectar áreas de oportunidad para mejorarlos.

Análisis del contexto curricular

Los alumnos son de segundo semestre de preparatoria y este curso es el segundo de seis que deben acreditar para la materia de matemáticas. Es un curso básico, por lo que es necesario profundizar en los contenidos, ya que requerirán de estos no solo en sus siguientes cursos de matemáticas, sino también en otras áreas. En consecuencia, es importante que los alumnos hagan investigación para que descubran la importancia y utilidad que tienen estos conocimientos para su aplicación a otras áreas del conocimiento.

Análisis de los problemas cognoscitivos detectados

En cuanto a motivación, a pesar de la importancia que tiene la materia, la mayoría de los alumnos sienten aversión hacia el estudio de las matemáticas, ya sea por el grado de dificultad que les representa, por su experiencia en cursos anteriores, por el alto índice de reprobación en relación a otras materias o por comentarios negativos de compañeros, maestros, familiares, etc. Por ello, se consideró importante incorporar al curso diferentes tipos de actividades que permitan despertar en los alumnos el gusto por las matemáticas.

Por otra parte, en este curso es central el concepto de "función", así como la determinación de las características propias de cada tipo de función, ya sea algebraica o gráficamente. En este sentido, a los alumnos les cuesta mucho trabajo interactuar con estas dos representaciones para obtener información sobre una función determinada. Para lograr dicha interacción, se implementó el Laboratorio Gráfico, utilizando el software "CALCULA" y la construcción de un Laboratorio Numérico-Algebraico en hojas electrónicas de cálculo "EXCEL", donde los alumnos realizan actividades específicas, que les permiten la visualización de las gráficas y su interpretación numérica-algebraica y viceversa.

Otro problema es la falta de mecanización de procesos algebraicos que se tienen que llevar a cabo para encontrar determinadas soluciones, por lo que se consideró necesario propiciar procesos de automatización a través de la realización de ejercicios graduados. También tienen dificultad para realizar los procesos de análisis y síntesis en la solución de problemas, por lo que se propusieron talleres de Solución de Problemas.

INTENCIONES EDUCATIVAS

Producto del análisis anterior fueron las Intenciones Educativas del curso ya que al tratar de dar respuesta a los problemas que se iban presentando, estas se fueron generando de forma natural.

En el curso de Matemáticas II se tiene la intención de que los alumnos:

- ❑ adquieran el concepto de función, el cual les servirá como eje central en casi todos los cursos posteriores de matemáticas que cursen y de apoyo a otras materias.
- ❑ relacionen los diferentes tipos de funciones con situaciones de la vida real.
- ❑ desarrollen un pensamiento lógico-analítico que les permita interpretar a partir de una ecuación o gráfica las características de cada tipo de función y viceversa.
- ❑ desarrollen su capacidad de análisis y síntesis en la resolución de problemas.
- ❑ aprendan, a través del trabajo colaborativo, a relacionarse respetuosamente con sus compañeros, se comprometan con la realización de la tarea, aprendan de los otros, mejoren su comunicación oral y escrita y adquieran diferentes papeles donde puedan ejercitar el liderazgo.
- ❑ aprendan por sí mismos a través de trabajos de investigación y de la interacción con sus compañeros.

OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

- Al término del curso, el alumno deberá ser capaz de resolver algebraica y gráficamente las ecuaciones de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y seccionadas para su aplicación en la solución de problemas.
- Al término del curso el alumno deberá ser capaz de resolver problemas de diversas disciplinas, cuya modelación algebraica y/o gráfica corresponda a funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales o logarítmicas
- Al término del curso el alumno deberá haber desarrollado la habilidad para utilizar herramientas computacionales en la solución de ecuaciones polinomiales, exponenciales y logarítmicas.
- Al término del curso el alumno deberá haber desarrollado la habilidad para trabajar colaborativamente en la realización de tareas.

CONTENIDO TEMÁTICO

Unidad I	*Introducción a las funciones*
Unidad II	*Función lineal*
Unidad III	*Función cuadrática*
Unidad IV	*Función polinomial*
Unidad V	*Funciones exponencial y logarítmica*
Unidad VI	*Funciones seccionadas*
Unidad VII	*Álgebra de funciones*

SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

Para propiciar que se dé el aprendizaje, se diseñaron diversas actividades, a través de las cuales el alumno interactúa con la realidad, investigando y solucionando problemas afines a otras áreas; desarrolla su habilidad para comunicarse eficazmente con los demás, al participar colaborativamente con sus compañeros en discusiones, realización de tareas y desarrollo de prácticas en los laboratorios; desarrolla su capacidad para interpretar algebraicamente el lenguaje común en la modelación de problemas, al participar en los talleres; autoaprende, mediante la interacción con los diferentes lenguajes, el común, el aritmético, el algebraico y el gráfico, al ir analizando y relacionando, en el Laboratorio gráfico, las gráficas de las funciones con sus ecuaciones algebraicas y al comentar e intercambiar sus experiencias con sus compañeros de equipo; extrapola conocimientos a otros ámbitos, al construir las salas del Laboratorio Numérico-Algebraico; verifica su competencia en cada tema, al autoevaluarse después de realizar cada actividad, dándose la oportunidad a sí mismo de identificar las principales variables que afectan su desempeño.

Las estrategias de aprendizaje seleccionadas para el curso y que contemplan actividades con las características anteriores son:

Trabajo en equipo

- **Prácticas en el Laboratorio Gráfico**: La realización de las prácticas en este laboratorio, tienen como objetivo que los alumnos experimenten, utilizando el software “Calcula”, con funciones de diferentes tipos, a fin de que establezcan la relaciones existentes entre sus dos tipos de representación: la algebraica y la gráfica. Con estos experimentos, se pretende desarrollar en los alumnos, una comprensión intuitiva de las familias de funciones, variando los coeficientes de la expresión algebraica de la función, mientras observan cómo se comporta su gráfica con cada cambio. Se recomienda que en una misma pantalla, ingresen secuencialmente la gráfica de cada ecuación, con el propósito de construir la historia de cada familia de funciones que facilite la formación de imágenes mentales para que, al transformarlas, logren establecer la relación entre gráfica y ecuación de la función estudiada. Estas prácticas los alumnos las realizan en equipo, para que al compartir las interpretaciones individuales del análisis visual realizado, la discusión entre compañeros permita llegar a conclusiones que fortalezcan el aprendizaje esperado.
- **Construcción de las Salas del Laboratorio Numérico-Algebraico.** En esta actividad los alumnos construyen en equipo las seis Salas de Trabajo de este Laboratorio, extrapolando algoritmos algebraicos que se realizan cotidianamente con lápiz y papel a una hoja de cálculo electrónica “EXCEL”, con el fin de agilizar la obtención de resultados numéricos que permita a los alumnos centrarse en la interpretación de los mismos. En ocasiones, lo laborioso de elaborar un algoritmo, por ejemplo, cuando se efectúa sucesivamente la división sintética al aplicar el Teorema del Residuo y del Factor para encontrar las soluciones de una Función Polinomial, hace que el alumno pierda de vista lo que realmente está buscando y, en consecuencia, no logre interpretar de la matriz resultante, los indicadores que lo conduzcan a la solución total del polinomio.
- **Talleres.** Los alumnos participan en Talleres para la Solución de Problemas, en donde investigan problemas de otras áreas y cuya modelación matemática requiere de la aplicación de las funciones estudiadas.

Taller 1.“*PILAS DE PIEDRAS*”. Esta actividad consiste en resolver una serie de problemas, los cuales pueden ser resueltos procediendo por acierto y error o por medio de un planteamiento algebraico. Resulta benéfico, sobre todo para los alumnos menos avanzados, primero tratar de resolver los problemas por medio de tanteos y, posteriormente, con procedimientos algebraicos. Los problemas de refieren a dos o tres pilas de piedras y presentan una variedad de grados de dificultad cuyo objetivo es responder a los requerimientos de cada alumno. La situación de aprendizaje denominada “pilas de piedras” se considera un contexto adecuado para enfrentar la tarea de abordar algebraicamente un problema, ya que permite al estudiante contrastar con la intuición el uso de un lenguaje formal.

Taller 2. *"RUTAS DE NÚMEROS"*. Esta actividad ubica la solución de ecuaciones en un contexto de diagramas. Los ejercicios se presentan en un orden de acuerdo a su grado de dificultad y solo se emplean números naturales. Este tipo de diagramas permite modificar el nivel de dificultad introduciendo otro tipo de números en la medida en que se juzgue conveniente. Asimismo, el uso de diagramas puede resultar conveniente para plantear problemas que se enuncien en el lenguaje usual. El material y las actividades que se proponen en los talleres Pilas de Piedras y Rutas de Números fueron diseñados por Alan Wigley, David Rooke, Maurice Hart y Alan Bell, quienes participaron en el South Notinghamshire Proyect.

Taller 3. "*APLICACIÓN DEL ALGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES".* La aplicación del álgebra en la solución de problemas verbales consiste en transformar el enunciado de los problemas al lenguaje algebraico. Sin embargo, en la enseñanza tradicional generalmente se le enseña al alumno a resolver problemas, haciendo el profesor una exposición de la forma en que él los resuelve. Dado que existe una gran variedad de problemas en el lenguaje común y que pueden ser modelados matemáticamente por una o varias ecuaciones y no existiendo un procedimiento único de solución, es decir que para encontrar la solución de un problema se requiere de una estrategia particular para resolverlo, se hace necesario brindar a los alumnos la oportunidad de que ellos mismos se enfrenten a la búsqueda de la solución de diferentes problemas, detectando en primera instancia los datos conocidos y los desconocidos, estableciendo entre ellos relaciones que les permitan diseñar estrategias que los lleven a su solución. El realizar todo este proceso de análisis y síntesis ayuda al alumno a encontrar más simple y significativa la transferencia de los problemas de un lenguaje a otro.

Taller 4 y **5**. Los alumnos investigan problemas de otras áreas que requieran para su modelación matemática ecuaciones cuadráticas, esponenciales y logarítmicas, respectivamente. Encuentran la solución de los problemas investigados con sus compañeros de equipo y comparten con el grupo la forma en que los resolvieron.

Portafolios

El portafolios es una carpeta, obligatoria, donde cada alumno, en forma individual, va integrando los resultados de las actividades propuestas durante todo el curso, ya sea realizadas en equipo o individualmente. Esta estrategia tiene como propósito que el alumno aprenda a trabajar con limpieza y orden, que valorice su propio trabajo y que le sea útil para la preparación de sus exámenes. Los apartados que debe contener y que serán criterios para su evaluación son:

- Resúmenes de cada tema, elaborados con sus compañeros de equipo
- Ejercicios realizados en clase o extraclase
- Reportes de las prácticas realizadas en el Laboratorio Gráfico
- Reportes de las prácticas realizadas en el Laboratorio Numérico-Algebraico
- Disket con las seis salas del Laboratorio Numérico-Algebraico que construyeron
- Autoevaluaciones de cada parcial

Lecturas

A lo largo del curso, se propone la lectura de 13 lecciones. Cada lección contiene un glosario de los términos más usados durante el desarrollo de la unidad correspondiente, un diagrama que sintetiza y relaciona los temas más relevantes, la teoría mínima necesaria y ejemplos de los algoritmos necesarios para la comprensión de los conceptos.

Ejercicios

Se propone la realización de ejercicios en el salón de clases para que, en el caso de que los alumnos tengan dudas, tengan una relación directa con el profesor y compañeros de grupo; los diseñados para realizarse individualmente extraclase propician que el alumno verifique su comprensión sobre el tema al contrastar sus resultados con las respuestas correctas. Esta estrategia favorece la autoevaluación continua del aprendizaje adquirido por los alumnos

Cuestionarios

Los cuestionarios contienen series de preguntas diseñadas para inducir a los alumnos a la construcción de algunos conocimientos o para favorecer el pensamiento reversible.

Exposición del profesor

Para la adquisición de algunos de los conceptos clave del curso, se recurrirá a la exposición del profesor, apoyándose esta, en la lectura previa sobre el tema realizada por los alumnos, la discusión e intercambio de significados entre los alumnos y haciendo preguntas abiertas al grupo.

Cuando se trate de que el alumno aprenda a realizar determinados algoritmos numéricos o algebraicos, el profesor realiza ejercicios en el pizarrón a la vez que expresa y razona su actuación, a fin de que los alumnos construyan modelos mentales adecuados que les faciliten realizar posteriormente, por sí mismos, esos procedimientos.

Exposición de los alumnos

Esta estrategia tiene como objetivo favorecer el trabajo en equipo, la creatividad, la comunicación oral y escrita y la responsabilidad, a través de la preparación y presentación de un tema en el salón de clase.

Sistema de evaluación

La evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje en el curso, es una actividad sistemática y permanente que permite comprobar el nivel en que se van logrando los objetivos propuestos, va en paralelo con el aprendizaje del alumno, con el propósito de que este pueda detectar errores u obstáculos en su proceso y pueda tomar decisiones oportunamente, para corregirlos y superarlos.

El sistema de evaluación para este curso comprende:

Evaluación Cualitativa:

- **Examen diagnóstico.** Se aplica a todos los alumnos al inicio del curso, con el propósito de detectar las deficiencias individuales sobre conocimientos o manejo de temas básicos que pudieran obstaculizar su proceso de aprendizaje de los nuevos temas, así como la aplicación de un postexamen cuando hayan realizado las actividades sugeridas por el profesor, a fin de constatar su recuperación en los temas. (sin valor a calificación)
- **Observación del Profesor**. Registro de las actitudes observadas en cada alumno ante su aprendizaje y de su relación con sus compañeros de grupo, con el propósito de orientarlo oportunamente, en el caso de ser necesario.
- **Revisión periódica del Portafolios**, con el propósito de dar seguimiento al trabajo personal de cada alumno que permita retroalimentar su proceso de aprendizaje o tomar decisiones sobre el proceso de enseñanza.
- **Aplicación de un examen sobre la habilidad desarrollada en el manejo del Laboratorio Gráfico, del Laboratorio Numérico-Algebraico y del trabajo colaborativo.** Presentan este examen por equipo y tiene como propósito evaluar y retroalimentar no solo los conocimientos adquiridos sobre las funciones, sino también valorar el grado de

integración y colaboración entre los miembros de cada equipo, con el fin de que el profesor tenga elementos para hacerles observaciones particulares sobre el trabajo colaborativo que les permitan mejorarlo.

Evaluación Cuantitativa

- **Aplicación de seis exámenes parciales y un final**, en los que se evalúa la teoría, la práctica y la aplicación de los conocimientos adquiridos.
- **Evaluación del desempeño intragrupo.** Cada equipo evalúa la participación de sus compañeros
- **Autoevaluación.** Cada alumno evalúa en forma personal su aprendizaje y esfuerzo.
- **Evaluación del Portafolios,** ésta se pondera de acuerdo a los criterios establecidos

Evaluación individual y por equipo

MONTAJE DEL CURSO EN LA PLATAFORMA LEARNING SPACE

En el rediseño del curso, siempre se contempló que estaría montado en Learning Space, por lo que después de haber definido las Intenciones Educativa y los Objetivos Generales, reorganizado los Contenidos del programa oficial, seleccionado las Estrategias de Aprendizaje, diseñado las Actividades y propuesto el Sistema de Evaluación del curso, se procedió a su montaje en los diferentes espacios que ofrece Learning Space.

En el **Schedule,** se localizan la bienvenida al curso, la documentación del rediseño didáctico, el mapa conceptual que relaciona entre sí los contenidos del curso, las referencias bibliográficas, las políticas de evaluación y el código de ética que deberán cumplir todos los participantes. En el Schedule, también se encuentran organizadas las actividades de las 80 sesiones correspondientes a las diez y seis semanas que dura el curso. En cada semana se señalan los objetivos específicos, un glosario, apoyos en línea, los contenidos por clase y las actividades a desarrollar tanto en el salón de clase como extraclase.

Sobre el **Media Center,** se colocaron las lecturas glosarios, formatos de evaluación, prácticas de los laboratorios, cuestionarios, ejercicios, y respuestas de los ejercicios.

A través del **Course Room,** los participantes del curso interactúan asincrónicamente, proponiendo discusiones sobre algún tema, enviando aportaciones, retralimentando a sus compañeros, enviando las conclusiones a las que llegan como equipo después de la realización de las prácticas propuestas, solicitando ayuda, etc.

En el **Profile**, cada semestre se actualizan los datos de alumnos y profesores

RESULTADOS

1. Avance del Proyecto de Rediseño de cursos en el Sistema

Actualmente se están impartiendo cursos rediseñados en todos los niveles académicos:

Nivel	Número de grupos	% del total de grupos
preparatoria	5,145	60.6%
profesional	10,743	49.1%
posgrado	2,410	73.2%
Total	18,298	55.4%

Resultados del rediseño del Curso de Matemáticas II

Un curso rediseñado didácticamente y montado en la plataforma Learning Space que integra innovaciones educativas como son:

- Construcción y uso del Laboratorio Numérico-Algebraico en hojas Excel

- Prácticas en el Laboratorio Gráfico que facilitan el aprendizaje a través de la visualización
- Trabajo colaborativo en la realización de tareas
- Trabajo en equipo asincrónico a través del Course Room de Learning Space
- Sistema de evaluación en el que intervienen alumnos y maestro.

Sobre el impacto del curso en el Sistema

Obtuvo la certificación para ser transferido a otros maestros en diciembre de 1998 y desde esa fecha ha sido adoptado por profesores de varios Campus. Actualmente está considerado como un Curso Modelo, lo cual significa ser uno de los cursos que servirán, a partir del verano de este año, como material de apoyo de la Primera Etapa del Programa de Desarrollo de Habilidades Docentes, para la capacitación de profesores de nuevo ingreso en el Sistema.

CONCLUSIONES

En cuanto al Proyecto de rediseño en el sistema. Este ha crecido de manera constante en cantidad y calidad. En la actualidad el 55.4% de los cursos que se ofrecen en los diferente niveles educativos: bachillerato, profesional y posgrado, se ofrecen en este esquema. Muchos de los cursos rediseñados en profesional y posgrado se imparten además a través de la Universidad Virtual.

En cuanto al curso de Matemáticas II:
De la implementación del curso en el aula

- Un cambio significativo en la relación profesor-alumno en la cual el papel que juega el profesor es más de facilitador del proceso que de expositor, dando con esto a los alumnos la oportunidad de interiorizar en sus procesos cognoscitivos, de participar más en clase, de hacer investigación, de interactuar entre ellos.
- El trabajo en equipo generó una atmósfera de confianza que facilitó la retroalimentación mutua y la integración de los alumnos a nivel intra e inter-grupos.
- La interacción asincrónica es todavía uno de los retos que tenemos que superar. La experiencia nos ha mostrado que la participación dentro del Course Room se limita a las aportaciones solicitadas en las tareas y pocas veces a iniciativa propia de los alumnos . Esto genera que los temas de discusión sigan emanando del profesor.
- La diversidad de actividades propició que los alumnos llevaran a cabo procesos mentales de diversos niveles cognitivos: la observación, la comprensión, la aplicación, el análisis y la síntesis. También coadyuvaron a generar el trabajo colaborativo, la automatización de algoritmos y la solución de problemas
- Los criterios que se incluyeron en los formatos para evaluar y autoevaluar el trabajo en equipo así como las autoevaluaciones individuales, sirvieron como directrices para la toma de decisiones tanto por parte del profesor como de los alumnos, ya que a partir de ellas se hicieron ajustes en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Espíndola Castro José Luis, *Reingeniería Educativa*, Editorial Trillas, (México, 1999)

Martín Pérez Marisa, *Rediseño de la Práctica Docente*,

Hitt Espinosa Fernando, *Visualizando la Función con la PC*, Grupo Editorial Iberoamericana, (México 1996)

ANEXOS

a) Ejemplos de algunas de las actividades propuestas en el curso
b) Formato de la carta compromiso para el trabajo en equipo
c) Formato para la evaluación del trabajo en equipo
d) Formato para la autoevaluación

CUESTIONARIO 4

Actividad para realizarse en equipo.

I. En la siguiente tabla aparece la cantidad "y" que puede ganar un obrero, trabajando "x" horas

x	2	4	5	6
y	12	24	30	36

a) Grafiquen en un plano cartesiano los pares ordenados de la tabla anterior e indiquen que representa el valor de las abscisas y el de las ordenadas, de acuerdo al enunciado.
b) A partir de la gráfica, calculen cuánto ganará un obrero trabajando 12 hrs.
¿Cómo les ayudó la gráfica para hacer el cálculo?
¿Podrían calcular fácilmente lo que ganaría un obrero si trabajara un número mayor de horas? ¿Por qué?
c) Modelen una ecuación que relacione los valores de y con respecto a los de x
d) Con la ecuación que obtuvieron, calculen cuanto ganará un obrero al año si trabaja 160 horas al mes
Qué consideran que es más útil para encontrar la respuesta al problema anterior. ¿su representación gráfica o su ecuación? ¿por qué?

II. En la siguiente tabla se muestra el valor "y" de una computadora con "x" años de antigüedad.

x	0	1	3	6
y	30,000	27,000	21,000	12,000

a) Grafiquen en un plano cartesiano los pares ordenados y únanlos
b) A partir de la gráfica, determinen el valor de la computadora a los 7 años de haberla comprado
c) Modelen una ecuación que relacione los valores de y con respecto a los de x
d) ¿A los cuántos años la computadora pierde totalmente su valor?

III. Hagan un listado de las diferencias que encuentren entre las tablas, gráficas y ecuaciones de los ejercicios I y II.

¿A qué conclusión pueden llegar después de observar la diferencia de signo del coeficiente de x en ambas ecuaciones? ¿Que significa?
¿A qué otras conclusiones pueden llegar?

LABORATORIO GRÁFICO.
Práctica 1.
Explorando las Gráficas de las Funciones Lineales, f(x)=ax+b

Objetivo de la práctica:

Se espera que al experimentar en el Laboratorio Gráfico con las gráficas de funciones lineales logren establecer la relación existente entre sus dos representaciones: la gráfica y la algebraica. Esta práctica la llevarán a cabo en equipo y requerirá aproximadamente de 90' para realizarla

Recomendaciones para llevar a cabo la Práctica

Es recomendable que una vez que ingresen la primera ecuación de una familia de funciones, no limpien la pantalla para que la secuencia de gráficas sea visible y de esta manera puedan tener la historia gráfica de la función. Esto les facilitará la formación de imágenes mentales que al transformarlas les permitan establecer la relación entre gráfica y ecuación de la función. Es importante que esta práctica la realicen en equipo, para que al compartir las interpretaciones individuales del análisis visual realizado, la discusión entre compañeros les permita llegar a conclusiones que fortalezcan su aprendizaje.

INSTRUCCIONES

1. Grafiquen en un mismo plano las siguientes funciones, observen como se comporta la gráfica de la función conforme varía el término independiente de la ecuación.

a)	b)	c)	d)
$y = x - 2$	$y = x + 1$	$y = -x + 1$	$y = 1$
$y = x - 1$	$y = 2x + 1$	$y = -2x + 1$	$y = 2$
$y = x$	$y = 3x + 1$	$y = -3x + 1$	$y = 3$
$y = x + 1$			
$y = x + 2$			

2. De acuerdo a sus observaciones contesten las siguientes preguntas:
   - ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función la variación del término independiente?
   - ¿Qué efecto produce en la gráfica de la función el hecho de incrementar el coeficiente de x?
   - ¿Qué efecto produce en la gráfica el hecho de decrementar el coeficiente del término x ?
   - ¿Cómo es la gráfica de y = b donde b es igual a cualquier número real?.
   - ¿Cómo se refleja gráficamente el cambio de parámetros a y b de la ecuación f(x)=ax + b?
   - ¿Cuál es la ecuación del eje de las abscisas?
   - ¿Bajo qué condiciones tienen un punto en común las gráficas?
   - ¿Qué características tienen la pendiente y la ordenada de las rectas que están en los cuadrantes I y III?
   - ¿Qué características tienen la pendiente y la ordenada de las rectas que están en los cuadrantes II y IV?
   - Si una recta está definida por la ecuación y = ax +b ¿Bajo qué condiciones de a y b pasará la recta por los cuadrantes I,III y IV?
   - Construyan una ecuación cuya gráfica pase por los cuadrantes I, II y III.
3. En máximo una cuartilla, documenten las respuestas que dieron a las preguntas del punto anterior y envíenlas al Course Room, dando un click en el Start Discussion de la parte superior de esta pantalla.
4. Revisen la aportación de otro equipo, comparen sus respuestas con las de ellos y en caso necesario háganles los comentarios que consideren pertinentes.
5. Una vez realizada la práctica evalúa tu trabajo y el de tus compañeros de equipo, utilizando el Formato de coevaluación y envíalo “privado” a tu profesor a través del Course Room en la carpeta de tu equipo. La evaluación por la calidad del trabajo la recibirán a través del Course Room en un Coment a su trabajo.
6. La evaluación de esta práctica incidirá en la calificación del portafolios, de acuerdo a lo estipulado en las políticas de evaluación del curso

APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

I. Con tus compañeros de equipo, resolver los siguientes problemas.

Es muy importante antes de intentar resolver un problema:

- Leer detenidamente el enunciado del problema hasta entenderlo claramente.
- Si es posible, representarlo gráficamente o con un tabla, que te permita visualizar tus datos conocidos y los desconocidos
- Modelarlo con una ecuación algebraica que relacione tus variables
- Comprobar tu resultado.

1. Encontrar dos números, uno el doble del otro que sumen 117.
2. Encontrar dos números, uno el triple del otro que sumen 76.
3. ¿Cuántos litros de jugo de piña, que valen 7 centavos por litro, deben mezclarse con 100 litros de jugo de coco, que valen 42 centavos por litro, para formar una mezcla que valga 35 centavos por litro?
4. Una educadora tiene 120 chocolates y 195 caramelos que va a repartir entre sus alumnos. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates. ¿Cuántos son los alumnos?
5. En una fiesta se vendieron boletos, los de dama costaron $8,000 pesos y los de caballero $12,000 pesos. Los boletos vendidos de dama fueron 100 más que los de caballero. La recaudación total fue de $3,000,000 de pesos. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada tipo?
6. En un corral hay pollos y conejos. Se cuentan las cabezas y son dieciséis; se cuentan las patas y son cincuenta y dos. ¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay en el corral?
7. Un grupo de alumnos tiene que hacer una colecta para pagar una visita guiada. Si cada uno de ellos aportara $6,200 pesos les faltarían $50,000 pesos. Si cada uno contribuyera con $8,200 pesos, entonces les sobrarían $50,00 pesos. ¿Cuántos alumnos constituyen el grupo?

II. Investigación

1. ¿Cuáles fueron las cantidades o datos conocidos de cada problema?
2. ¿Cuáles fueron las cantidades desconocidas o incógnitas de cada problema?
3. ¿Qué relaciones lograron establecer entre ellas?
4. ¿Qué es una ecuación ?
5. Explica qué es una incógnita en una ecuación
6. ¿ Qué nombre reciben las partes de una ecuación ?
7. ¿ Qué es un sistema de ecuaciones?
8. ¿ Cómo se determina el grado de una ecuación ?
9. ¿ Cuál es la relación entre el número de soluciones y el grado de una ecuación ?
10. Escribe las propiedades que se aplican para transformar una ecuación en otras que sea equivalente.

III. Lleven los resultados de este taller a la próxima clase para su discusión.

IV. Después de revisar con sus compañeros de grupo los resultados de este taller, evalúen su trabajo y el de sus compañeros de equipo contestando el Formato de evaluación del trabajo en equipo y envíenlo "privado" al profesor.

LABORATORIO NUMÉRICO-ALGEBRAICO - SALA 1
Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Variables

Se espera que al realizar este ejercicio, con tus compañeros de equipo, logren construir la Sala uno del Laboratorio Numérico-Algebraico, extrapolando el algoritmo de la regla de Cramer (por determinantes) a una hoja electrónica de cálculo Excel para encontrar las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

El algoritmo de la regla de Cramer es:

Si

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

entonces la solución del sistema esta dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c^1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a^1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Una vez que tengan su sala, prueben que funciona correctamente, encontrando en ella las soluciones de los sistemas de ecuaciones realizados algebraicamente en clase.

Cada integrante del equipo debe tener su disquete con la copia de la Sala del Laboratorio.

Características que debe tener cada una de las Salas del Laboratorio:

a) Cada Sala de trabajo debe tener título
b) La definición del tema de que se trate.
c) Instrucciones de uso
d) El algoritmo correspondiente
e) El nombre del equipo y
f) Mucho ingenio y creatividad para que sea funcional y atractiva

Ejercicios E_{32}

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_8 x + \log_8 y = 0$
b) $\log_2 y - 2\log_2 2x = 0$
c) $\log_5 (x-1) + \log_5 (x+3) = 1$
d) $\log_2 y - \log_2 x = 2$
e) $y = \log_7 \frac{1}{49}$
f) $y = \log_3 27^8$
g) $y = -2 \log_4 64$
h) $y = \log_2 \frac{1}{16}$
i) $y = \log_4 \frac{1}{2}$
j) $y = 2 \log_b b^{-5}$

TRABAJO EN EQUIPO
Carta compromiso

No. de Equipo:______ Matrícula ___________ Fecha: ___________________________
Título del trabajo: ____
Nombre del líder del equipo ____
Menciona las principales tareas que desempeñarás durante la ejecución del trabajo:
____
Menciona las principales tareas que desempeñarán cada uno de tus compañeros:

Nombre de tus compañeros de equipo: Tareas
1. ___________________________ ____________________________________
2. ___________________________ ____________________________________
3. ___________________________ ____________________________________

EVALUACIÓN DEL TRABAJO EN EQUIPO

Número de Equipo:________ Título del Trabajo_____________________________

Alumno calificador: ______________________________Matrícula: _____________

Fecha ____Grupo: _______________

Instrucciones: Evalúa lo mas justo posible las tareas que hasta el momento han desempeñado cada uno de los integrantes de tu grupo de trabajo.

AUTOEVALUACIÓN:

Actividades que has realizado:

____

Tu calificación es:

|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|_____|

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pésimo Excelente

EVALUACIÓN DE LOS MIEMBROS DEL EQUIPO:

Escribe el nombre de los miembros de tu grupo de trabajo en las columnas, y tomando la escala anterior, califícalos de acuerdo a su desempeño:

CRITERIOS A EVALUAR	NOMBRES DE LOS MIEMBROS DE TU EQUIPO		
¿Se compromete con el trabajo?			
¿Es capaz de plantearse y resolver un problema?			
¿Realiza las tareas encomendadas con responsabilidad?			
¿Asiste con puntualidad a sus reuniones?			
¿Hace aportaciones importantes al equipo?			
¿Entrega a tiempo su trabajo?			
¿Tiene una actitud de colaboración en el equipo?			
¿Es respetuoso con sus compañeros?			
¿Es limpio y ordenado para trabajar?			
LA EVALUACIÓN GLOBAL DE SU DESEMPEÑO ES			

AUTOEVALUACIÓN

Nombre:__________________________________ Matrícula:_________________

Fecha____________________________________ Parcial:____________________

Instrucciones:

Con la intención de saber cómo te percibes en clase y especialmente qué tanto reconoces tu aprendizaje, se requiere que con honestidad taches el valor que mejor reporte tu comportamiento durante este parcial.

NADA MUCHO

C R I T E R I O S	1	2	3	4	5
1. Asistí a clase con material investigado					
2. Mis participaciones estuvieron respaldadas con información consistente					
3. Usé diferentes fuentes de consulta					
4. Participé con frecuencia en clase					
5. Obtuve en clase información que no conocía					
6. Asistí con gusto a clases y dispuesto a aprender					
7. Colaboré para obtener respuestas a las preguntas generadas en clase					

Resignificación de la Segunda Derivada en un Contexto Físico.

María Isabel Flores Reyes, miflores@mail.cinvestav.mx
Ricardo Cantoral
Cinvestav, IPN
México

Superior - Cálculo

Introducción

Asumiendo como problemática aquella concerniente a la evolución del estudio de fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que influyen también a las relaciones que se establecen entre estudiante y profesor.

Además de que el pensamiento y lenguaje variacional trata del estudio del cambio a través de la variación, el cual se realiza desde una orientación múltiple que atiende a las distintas dimensiones humanas: la cultural, la individual y la social; lo cuál se manifiesta respectivamente en lo conceptual, lo cognitivo, lo didáctico y lo socioepistemológico [Cantoral 1997 - Cantoral y Farfán 1999].

Y a partir de la experiencia en el contexto físico que tiene el grupo, se observó que si bien la primera intuición sobre el fenómeno por estudiar es perceptible, esto no ocurre con su representación gráfica ni analítica, obteniendo tantas representaciones como respuestas. Ya que en realidad, al pedir una representación gráfica sé esta exigiendo un manejo versátil entre el contexto físico y el geométrico (que no se usa en la enseñanza e incluso se le evita). Además que en el contexto físico ha de tenerse una clara referencia para distinguir *lo que varía* respecto *a que* es lo que produce tal variación, para enseguida, *predecir* cuándo la variación que subsiste ha llegado a un estado estable, es decir, *la constantificación de lo variable*.

Justificación

Es relevante destacar que la variación de segundo orden ha adquirido gran importancia en la descripción de los fenómenos de la física clásica y cuántica, pues es postulada como Leyes a través de ecuaciones diferenciales de segundo orden. La importancia que adquiere la segunda derivada, en la descripción de la mayoría de los fenómenos que nos conllevan a muchas de las aplicaciones de la vida moderna, es la que me motivo a plantearme la hipótesis de que debe de existir un "común denominador", en lo que respecta a la presentación de la derivada y su significado, como una organización de las derivadas sucesivas, hasta una variación de segundo orden. En principio y en particular, intentaré darle una resignificación a la segunda derivada, en otras palabras, una interpretación basándose en este "común denominador", en el contexto de la física.

Problema de Investigación

¿De qué manera intervienen las representaciones (numérica, gráfica, analítica y verbal) de la variación, enmarcadas en un contexto físico para el proceso de formación de los conceptos de función y su derivada?

Para contestar a esta pregunta tomaremos en consideración que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparezca y se establezca un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas [González 1999].

Propósitos de la Investigación

A) Distinguir y clasificar los obstáculos que dificultan la forma de percibir las magnitudes que varían en un fenómeno y establecer las relaciones funcionales entre ellas. Desde un punto de vista cognitivo y epistemológico.

B) Establecer la(s) característica(s) común(es) existente(s) entre las ecuaciones que describen los fenómenos más importantes de la naturaleza (categorías relativas a la apropiación de una base de significados del pensamiento físico).

C) Utilizar la Ingeniería Didáctica para el análisis de los resultados.

Marco Teórico

Génesis del Concepto de Derivada

En los cursos de cálculo actuales se presenta estrechamente ligada, al concepto de derivada de una función, la noción de mejor aproximación lineal a una curva, es decir, la identificación de la relación entre tangente y derivada. Sin embargo, las ideas germinales en la construcción del cálculo, son las nociones de diferencias infinitamente pequeñas (dx y dy) y de variación de las variables asociadas a las curvas y no como se viene trabajando en curricula actual, en donde la expresión dy/dx, aunque es un objeto, no posee existencia propia, pero como cociente entre objetos (dx y dy) adquiere significado en el estudio de la variación de las variables asociadas a las curvas.

En lo que concierne a los inicios del cálculo, el estudio de las tangentes a las curvas no se conformo como un fin en sí mismo, sino en un eficaz recurso para el examen cualitativo de las propiedades de las curvas en un contexto local. Un ejemplo de este análisis local se encuentra en el "Analyse des infiniment petits" de L'Hospital.

Paradigma Newtoniano

Newton concibió y desarrolló la idea del método del determinismo mecánico. Éste consiste en determinar los valores de los parámetros para cualquier instante de tiempo, a partir del conocimiento de las condiciones iniciales y de sus sucesivas variaciones, en otras palabras, estudiando la variación de los parámetros se reconstruye un parámetro de interés. Además, establece vínculos relacionales elementales, al establecimiento de leyes invariables de la naturaleza, es decir; considera los problemas de la cinemática en particular y de la variación de los parámetros en general, de la siguiente manera: ciertos de estos valores en un sistema, en un momento y lugar dados, determinan la evolución ulterior del sistema, de ahí que el objetivo de la mecánica desde entonces sea ***predecir*** dicha evolución sin plantearse preguntas sobre las causas reales del movimiento.

El *Methodus Fluxionum,* a diferencia del *De analysi,* proporciona una exposición de los métodos de Newton del cálculo fluxional en su generalidad. En el prefacio, en su versión inglesa del *Methodus Fluxionum,* John Calson escribió:

"*El principio más importante sobre el cual se construye aquí el método de fluxiones, es muy simple, y esta tomado de la mecánica racional; que es aquella cantidad matemática, particularmente la extensión, que puede concebirse como algo generado por el movimiento continuo local; y que toda cantidad, al menos por analogía y acomodo, puede concebirse como algo generado posteriormente de manera semejante. En consecuencia debe haber velocidades comparativas de crecimiento o decrecimiento durante tales generaciones, cuyas relaciones son fijas y determinables y podrían por lo tanto, (con problemas) encontrarse.*

En el año de 1736 (ya muerto Newton), se publico su *Method of fluxions* en el cual se habla de lo que son hoy en día las derivadas.

Newton explica su método diciendo:

*"Las variables de fluentes se designan por **v,x,y,z,** etc., y las velocidades por las cuales cada fluente es incrementada por su movimiento generatriz (las que yo puedo llamar fluxiones, o simplemente velocidades o celeridad), las representaré por las mismas letras o puntos; así,*

$$\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, etc.,"$$

Así los infinitesimales de Newton son los llamados momentos de fluxiones los que se representan por

$$\dot{v}\phi, \dot{x}\phi, \dot{y}\phi, \dot{z}\phi, etc.,$$

donde ϕ *es una cantidad infinitamente pequeña.*

Acerca del desarrollo histórico de la función

Es posible iniciar una reflexión sobre el desarrollo histórico de una función, rastreando sus vestigios desde la antigüedad, donde se utilizaban tablas de datos de dos columnas para indicar la relación entre dos tipos de cantidades, en la Grecia Antigua se construyeron tablas con datos astronómicos y geodésicos. Desde mi particular punto de vista me remontaré a los tiempos de Aristóteles en donde él niega toda explicación variacional cuantificada de los fenómenos del movimiento sustituyéndolos con explicaciones cualitativas - posicionales, en donde las características del movimiento dependen de la naturaleza del cuerpo que se mueve, centrando la mirada en los ***atributos*** inherentes a los cuerpos y no en las medidas y comparaciones entre las relaciones de variables significativas del movimiento [Cantoral 1990]; por lo tanto, se puede decir que las ideas de cambio y de cantidad variable fueron ajenas al pensamiento de los griegos.

Desde este punto de vista se puede decir que el pensamiento matemático de la antigüedad no creó ninguna noción general, ni de cantidad variable, ni de función.

Por otro lado, el paso de los atributos a las relaciones requirió de la identificación y la cuantificación de los parámetros asociados con el movimiento [Cantoral 1990]; para poder establecer los vínculos funcionales que caractericen el estado de movimiento en todo tiempo (no solamente de realizar mediciones de dichos parámetros).

El problema de la cuantificación del cambio se dio en las escuelas de filosofía natural de París y Oxford bajo las ideas de pensadores tales como Robert Grosseteste y Roger Bacon durante el siglo XIV. Declararon que las matemáticas eran el instrumento principal para el estudio de los fenómenos naturales. Apartándose de la doctrina Aristotélica de la intención (intensidad) y disminución de las cualidades de las formas, y abordando el estudio matemático del movimiento no uniforme cuantitativo y local. Por su parte los filósofos naturales del colegio de Merton en Oxford, estudiaron las variaciones de la intensidad en la cualidad de un cuerpo, desde un punto a otro en el espacio, o desde un punto a otro en el tiempo y el resultado central derivado de estos conceptos fue la regla de Merton, de aceleración uniforme: "si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total $\boldsymbol{s}$ es aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial $\boldsymbol{v_o}$ y su velocidad final $\boldsymbol{v_f}$ (es decir, la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo)".

Según Bourbaki "...toda cinemática descansa en una idea intuitiva, y en cierto modo experimental, de cantidades variables con el tiempo, es decir, de funciones del tiempo..." En el estudio de la cinemática desarrollado por Nicole Oresme, en una dirección geométrica, propone que se representen las cosas que varían mediante un dibujo, señalando que "...todo lo que varía, se pueda medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo"

En la obra de Galileo(1638), se tienen indicios del nacimiento del cálculo infinitesimal y una profunda huella en la ciencia del movimiento (con su partición infinita de un intervalo finito). En su estudio de la caída de los cuerpos, no manipula directamente velocidades variables, sino que reduce los movimientos reales que varían en cada punto (mediante una expresión mental) a movimientos uniformes, lo cual solo puede ocurrir en un modelo del movimiento concebido puntualmente, es decir, en tanto que en realidad las velocidades varían en cada instante, la suposición adicional de la velocidad uniforme podría ser posible durante tiempos infinitamente pequeños.

Las aproximaciones al estudio de la variabilidad, el cambio y la dependencia son un primer eslabón en la concepción de lo que será a la postre *la noción de función,* ocurriendo como una necesidad funcional, que en el estudio de la variación se da en el análisis del elemento puntual y ello en la parte infinitesimal.

El paradigma científico contemporáneo elimina las preguntas acerca de la naturaleza de los cuerpos que caen y de la manera en que sus atributos se modifican; y establece relaciones entre variables asociadas con el movimiento (tiempo, posición, velocidad, aceleración).

Cauchy legó, en su condición de fundador del rigor dentro del análisis matemático, la desaparición de los infinitésimos y de los infinitamente grandes, que sobrevivirían, en todo caso, como maneras de hablar [Mathesis 9 (1993) 225-240, Hernández J.], pero no es así. Robinson lo justifica con detalle: [Robinson, A.1966] para él, Cauchy utilizó a la vez los infinitésimos y los límites, y Cauchy "usaba libremente cantidades infinitamente pequeñas o grandes tanto en las definiciones como en las pruebas". Y dice más adelante:

"Por tanto, Cauchy no aparece en la historia del cálculo como el hombre que rompe con la tradición, barriendo los antiguos y roídos fundamentos para dejar sitios a otros nuevos más sólidos, sino más bien como un puente entre pasado y futuro. Los elementos de su teoría se remontan hasta Newton y Leibniz (y aún más lejos), pero él ofrece una síntesis de la teoría de los límites por una parte y de la doctrina de las cantidades infinitamente grandes y pequeñas por otra, asignando un papel central a la noción de variable que tiende a un límite, en particular al límite cero. Y aunque su manera de proceder fue superada medio siglo después, el inmenso cuidado con que manejo sus instrumentos y el gran alcance y detalle de su obra en análisis fue un paso gigantesco en dirección de la solución final (aceptada hoy)."

Referencias bibliográficas

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de investigación del Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1998). La aproximación socio-epistemológica a la investigación en matemática educativa: *El caso del Pensamiento y lenguaje variacional.*

Cantoral, R. y Farfán, R.(1999) *Matemática Educativa: una visión de su evolución.* Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1983). *Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual.* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de funciones analíticas.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Cambray, R. (1993). *Procesos inherentes en la construcción del concepto de derivada.* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Avila, R. (1998). *El papel de las representaciones (gráfica, numérica, analítica y verbal) en la formación y desarrollo de los conceptos de función y derivada de una función.* Tesis doctoral, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN, México.

Contreras, L. (1999). *Interpretación Geométrica de las derivadas sucesivas de una función: Un estudio realizado con estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, subnodo regional de Matemática Educativa.

Piaget, J. y García, R. *Psicogénesis e historia de la ciencia.*

Bourbaki, N. *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza Universidad.

John Calson, versión inglesa del *Methodus Fluxionum.*

Resignificación de las Ecuaciones Diferencial de Segundo Orden

Ricardo Cantoral Uriza
Francisco Cordero Osorio
Héctor Márquez Martínez, hmarquez@mail.cinvestav.mx
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México

Resumen

Desde Lagrange al Análisis Matemático se ha producido gran cantidad de material que es de interés para las aplicaciones técnicas. Volterra y Hilbert con el cálculo funcional, proporcionaron nuevos métodos básicos; se creó el cálculo vectorial; se integraron diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, llegándose a definir nuevas e importantes funciones; las ecuaciones integrales no sólo demostraron su utilidad intrínseca sino que permitieron alumbrar con nueva luz la teoría general de las ecuaciones diferenciales; ecuaciones lineales y no lineales en las derivadas parciales.

Se escucha la opinión de que lo que el estudiante aprovecha en cuanto a matemáticas es únicamente conocer bien las fórmulas y saberlas emplear, tal es el caso, del cambio de variable en las ecuaciones diferenciales de segundo orden; esto implica que posea una idea clara de los principios básicos y una información general acerca de las teorías, pero deja sobreentender que todo lo que es aclaración rigurosa de conceptos, demostración de teoremas o razonamiento orientado hacia la obtención de las fórmulas es algo meramente especulativo, innecesario para quien no tenga intereses que no sean las aplicaciones y los significados de la teoría. A mi parecer esto no es correcto:

1º. Porque todo resultado matemático, como conclusión de una labor mental ordenada e intuitiva, difícilmente puede separarse de ésta sin menoscabo para una apreciación correcta y completa del resultado mismo.

2º. Porque los procesos conocidos de razonamiento matemático son de por sí una valiosísima herencia humana que estamos utilizando, de manera mas o menos consciente, cada vez que escudriñamos la naturaleza; en cuanto más lo hayamos asimilado, transformándolos en patrones de nuestro propio pensamiento, tanto más resultará multiplicada nuestra capacidad para la investigación.

Una ecuación diferencial es una ecuación cuyos términos contengan coeficientes diferenciales (derivadas) de una función desconocida. El campo de las ecuaciones diferenciales es muy vasto y se divide en: ecuaciones diferenciales ordinarias, por un lado y ecuaciones diferenciales parciales, por otro. Las ecuaciones diferenciales ordinarias sólo involucran derivadas ordinarias de una función de una sola variable independiente y las ecuaciones en derivadas parciales involucran derivadas parciales de una función que depende de dos o más variables independientes. La otra gran clasificación se efectúa por el concepto de orden; el orden de una ecuación diferencial, es el orden de la derivada de orden máximo en esa ecuación. Una ecuación es lineal si es de primer grado en la variable dependiente y sus derivadas; de otra forma no es lineal.

Se halla la solución de una ecuación diferencial bajo dos formas: solución analítica y solución numérica. Una solución analítica de una ecuación diferencial, presenta varias ventajas respecto a una solución numérica:

1. La solución analítica, si no es demasiado complicada, mostrará claramente el efecto sobre la solución de las constantes que aparecen en la ecuación (estas constantes suelen llamarse los parámetros de la ecuación). En un problema práctico estos parámetros representarán cantidades físicas, como la resistencia de un circuito, o la viscosidad de un fluido

2. Puede conducir a informar cualitativamente respecto a la solución, como el hecho de que sea oscilatoria o no oscilatoria, el conocimiento de su comportamiento cuando la variable independiente es muy grande o muy pequeña en valor, y la existencia de máximos, mínimos y valores infinitos

Las ecuaciones que aparecen en los diferentes campos de la física (tales como las ecuaciones del electromagnetismo, las de la mecánica de fluidos, de la teoría de la elasticidad, de la transferencia de masa y calor, de la teoría de los circuitos eléctricos, de las reacciones químicas y de las reacciones nucleares, la segunda ley de Newton) y aun en otras ciencias, son a menudo casi exactamente iguales, de manera que muchos fenómenos tienen analogías[1] en estos diferentes campos. Tan útiles son los resultados del análisis de estos fenómenos para encontrar significados de $y(x)$ y sus variaciones[2] de la ecuación diferencial

La enseñanza de la matemática (en particular de las ecuaciones diferenciales) se ha basado en la algoritmización como el medio ideal para acceder al conocimiento por muchos años; en la actualidad las formas de presentar los saberes ha cambiado, centrándose en la construcción de conocimientos matemáticos donde el alumno es el protagonista principal de este proceso tan complejo, jugando de esta forma un papel importante el quehacer del investigador en matemática educativa

Los errores que se observan en el aprendizaje del alumno se deben en gran parte a la metodología que se utiliza en la enseñanza de los contenidos matemáticos, generalmente se parte de la manipulación de objetos concretos, de la definición del objeto de conocimiento, tal suele ser el caso en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Algunas de las formas en que aparecen es el de relacionarlas con los campos de pendientes3. ¿Por qué no se presentan las ecuaciones diferenciales de segundo orden con los campos de pendientes?

A partir de aquí, no será difícil imaginar el desarrollo de un análisis teórico de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, preguntarse sobre la existencia de una solución a un problema dado de condición inicial y existencia de ecuaciones diferenciales qué ejemplifiquen el fenómeno de no unicidad de solución.

Sin embargo, la pregunta que nos orienta a la investigación es:

¿Cuál es el significado del manejo simultaneo de las derivadas sucesivas en las ecuaciones diferenciales de segundo orden?

Creemos que el estudio de esta pregunta puede contribuir a darle una resignificación al campo de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, por lo que nos orientan ver a la ecuación diferencial en varios fenómenos.

Agregamos un ejemplo extraído de algún libro de texto de física de uso corriente, donde se advierte la vigencia del empleo de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Buscando en este el significado que puede tener la ecuación diferencial.

De las teorías de las oscilaciones libres amortiguadas, consideramos por ejemplo, la ecuación del movimiento de una masa oscilante al extremo de un resorte, sumergida en un medio resistente al movimiento como se ilustra en la figura # 1.

---

[1] Estas analogías se presentan tanto para las ecuaciones diferenciales de primer orden como en las ecuaciones diferenciales de segundo orden

[2] Las variaciones mencionadas de la ecuación diferencial, son: $y'(x)$ e $y''(x)$

[3] La gran mayoría de los textos presentan el caso para las ecuaciones diferenciales de primer orden

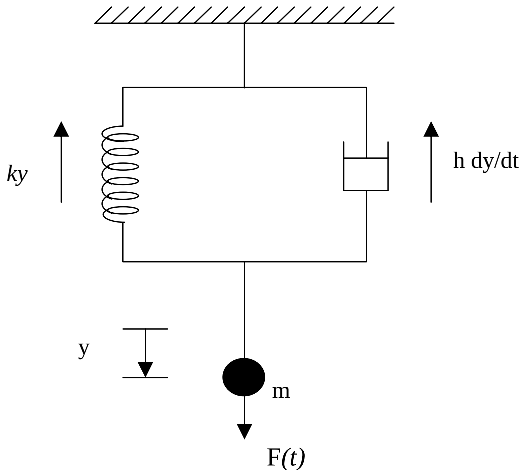


Figura # 1. *Oscilaciones de una masa suspendida de un resorte y sumergida*

Sea y el desplazamiento hacia debajo de la masa m a partir de la posición de equilibrio. El resorte ejerce una fuerza hacia abajo $-ky$ sobre la masa, y el medio ejerce una fuerza de resistencia (representada por un amortiguador) que se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad de la masa. En esta sección hacemos la fuerza $F(t)=0$, de modo que la ecuación del movimiento de la masa es

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-h\frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+h\frac{dy}{dt}+ky=0 \quad (1)$$

Por razones físicas, $m,\ h\ y\ k$ son números positivos en este problema. Para simplificar nuestra manipulación algebraica denotaremos

$$k/m=\omega^2,\quad h/m=2\lambda \quad (\lambda>0)$$

La ecuación del movimiento es entonces

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\varpi^2x=0 \quad (2)$$

Observación. Cuando el coeficiente del término dx/dt es igual a cero (es decir, $\lambda=0$) de la expresión (2) , se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \quad (3)$$

Se trata de una ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado, este movimiento es un tanto irreal, puesto que el movimiento descrito por la ecuación (3) supone que no actúan fuerzas retardadoras sobre la masa del movimiento. A menos que la masa esté suspendida en un vació perfecto, por lo menos habrá una fuerza opuesta debida al medio que lo rodea. Por ejemplo, cuando la masa m podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un mecanismo de amortiguación.

¿Cuánto sentido tiene hablar de un significado de la ecuación diferencial de segundo orden?, ¿Es necesario primero darle sentido a cada una de las variaciones de la ecuación diferencia?

Se muestra a continuación los significados que se pueden tener para primeras y segundas variaciones y las relaciones que entre ellas guardan:

Una de las cosas más importantes de estos fenómenos es que pueden obtenerse a partir de considerar sistemas sencillos, estudiando para ello sistemas completamente análogos (Feynman, 1963), por ejemplo tomemos el caso más simple posible. Tenemos un pedazo de alambre, que es una resistencia, y hemos aplicado a él una diferencia de potencial V. Ahora bien V tiene este significado:

- Si llevamos una carga q a lo largo del alambre desde un terminal al otro terminal, el trabajo realizado es qV. Cuanta más alta la diferencia de voltaje tanto más trabajo se realiza cuando la carga, como decimos, “cae” del extremo del terminal de potencial alto al extremo potencial bajo. De manera que las cargas entregan energía al ir de un extremo al otro. Ahora bien, las cargas no vuelan simplemente derecho desde un extremo hasta el otro; los átomos del alambre ofrecen alguna resistencia a la corriente y esta resistencia obedece la siguiente ley para casi todas las sustancias ordinarias: si hay una corriente I, o sea, tantas cargas por segundo tropezando, el número por segundo que atraviesa tropezando el alambre es proporcional a lo fuertemente que las empujan, en otras palabras, proporcional a cuánto voltaje existe:

$$V = IR = R\frac{dq}{dt}$$

Por supuesto hay otras propiedades interesantes de sistemas mecánicos, como la masa (inercia), y resulta que hay también una analogía eléctrica para la inercia.

- Es posible hacer algo llamado inductor que tiene una propiedad llamada inductancia tal que una corriente, una vez establecida en la inductancia no quiere detenerse. ¡Se necesita un voltaje para cambiar la corriente!. Si la corriente es constante no hay voltaje a través de una inductancia. Los circuitos CC no saben nada de inductancia; es sólo cuando cambiamos la corriente que se manifiestan los efectos de la inductancia. La ecuación es

$$V = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

y la unidad de inductancia, llamada henry, es tal que un volt aplicado a una inductancia de un henry produce un cambio de un ampere por segundo en la corriente. La ecuación anterior es la analogía de la ley de Newton para la electricidad, si así lo deseamos: ¡ V corresponde a F, L corresponde a m, e I corresponde a la velocidad.

Todas las ecuaciones siguientes para los dos tipos de sistemas van a tener la misma deducción, porque en todas las ecuaciones podemos cambiar cualquier letra análoga correspondiente y obtenemos la misma ecuación; cualquier cosa que deduzcamos va a tener una correspondencia en los dos sistemas.

Ahora bien, ¿qué cosa eléctrica corresponde al resorte mecánico, donde existía una fuerza proporcional al estiramiento?

- Si empezamos con $F = kx$ y reemplazamos $F \to V \quad y \quad x \to q$, obtenemos $V = \alpha q$. Resulta que existe tal cosa, de hecho es el único de los tres elementos de circuito que podemos entender realmente, porque hemos estudiado un par de placas paralelas y encontramos que si hubiera una carga de cierta cantidad igual y contraria en cada placa, el campo eléctrico entre ellas sería proporcional al tamaño de la carga. De manera que el trabajo realizado al mover una carga unitaria a través de la separación de una placa a la otra es precisamente proporcional a la carga. Este trabajo es la definición de diferencia de potencial y es la integral curvilínea del campo eléctrico de una placa a la otra. Resulta que por razones históricas, la constante de proporcionalidad no se llama C sino $1/C$. Pudo haber sido llamada C , pero no lo fue. Tenemos entonces

$$V = \frac{q}{C}$$

La unidad de capacitancia C es el farad; una carga de un coulomb en cada placa de un capacitor de un farad produce una diferencia de potencial de volt.

- Ahí están nuestras analogías y la ecuación correspondiente al circuito oscilante se transforma en lo siguiente, mediante sustitución directa de m por L , x por q , etc. :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma m\frac{dx}{dt} + kx = F$$

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

Este trabajo se encuentra ubicada a la línea de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional[4], la cual brinda una oportunidad de tender puentes entre la investigación y la realidad del aula, considera como necesidad básica el dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. En este sentido, el pensamiento y el lenguaje variacional es entendido como una línea de investigación que, ubicada al seno del tal acercamiento, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral, 1997)

Esta línea de investigación presenta varias ramas: sobre el diseño de situaciones didácticas - situaciones didácticas de resignificación, sobre el envejecimiento de situaciones de enseñanza, sobre la naturaleza del aprendizaje en un ambiente tecnológico, sobre el rediseño del discurso matemático escolar, sobre epistemología crítica, sobre variación contextual, sobre representación y cognición de las ideas variacionales, sobre la didáctica de antaño, (Cantoral, 1997). Nuestro estudio se ubica en la rama del diseño de situaciones didácticas - situaciones didácticas de resignificación.

[4] Estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema didáctico y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, 1997)

Hipótesis de investigación

1. Debido a la complejidad de los factores[5] que intervienen en las ecuaciones diferenciales, creemos importante investigar los significados que éstas ecuaciones pueden tener. Este aspecto es un tema aún abierto a investigación y no suficientemente tratado, pues la mayoría de los trabajos presentados hacen énfasis otras componentes[6].
2. La obtención de un significado para el conocimiento matemático, le permitirá al estudiante encontrar vida a este campo del análisis, las ecuaciones diferenciales. Además de comprender mejor el papel que juega la noción de variación en estas ecuaciones.

Tanto en los textos actuales y en obras originales, el tema de ecuaciones diferenciales[7] suelen esconder los significados de los términos (la primera y segunda variación), tal parece que el único objetivo que posee es ser comprendido por los estudiantes como una tarea algoritmica, por lo que se mantiene hasta el momento sólo como un proceso[8], dicho en el sentido de que aún no se ha llegado a construir un nuevo objeto, tal como se muestra en el siguiente problema de Euler (Institutiones Calculi Integralis, Vol. II)

Problema 101. Sea dx un elemento constante, en la ecuación propuesta de la forma

$$ddy + Pdxdy + Qydx^2 = 0 \qquad (1)$$

P y Q son funciones para ésta x, regresarla a una ecuación diferencial de primer grado

Solución.

Sean y, p, q tres variables tales que $dy = pdx$ *(2) y* $dp = qdx$

¿Qué se debe entender, que la primera variación de una función sea igual a la función? Resulta para la mayoría de los estudiantes y profesores no tener claro de un significado del cambio de variable

$$ddy = pddx + dxdp = pddx + qdxdx$$

sustituyendo esta expresión en (1), tenemos $pddx + qdxdx + Pdx.pdx + Qydx^2 = 0$ *, como* $ddx = 0$ *,* $d^2x\,(q + Pp + Qy) = 0 \;\Rightarrow\; q + Pp + Qy = 0$ *en la cual , si en el método [problema 100] antes expuesto establecemos* $p = uy$ *(3) &* $q = vy$ *, obtenemos la ecuación entre x, u y v*

$$0 = vy + uyP + Qy = y\,(v + Pu + Q) \Rightarrow v + Pu + Q = 0 \Rightarrow \boxed{v = -(Pu + Q)}$$

Lo cierto es que de (2) y (3), $dy = pdx = uydx$ $(\Rightarrow \frac{dy}{y} = udx)$ $\Rightarrow vydx = qdx = dp = udy + ydu$

$\Rightarrow udy = vydx - ydu = y\,(vdx - du) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u}$ *. Además como* $\frac{dy}{y} = udx = \frac{vdx - du}{u}$

$\Rightarrow uudx = vdx - du \Rightarrow du + uudx = vdx = -(Pu + Q)dx \Rightarrow du + uudx + Pudx + Qdx = 0$ *(Ecuación diferencial de primer grado)*

---

5 Los factores que intervienen en las ecuaciones diferenciales son derivación, posición, velocidad, aceleración, entre otros.

6 Los métodos y el comportamiento de la solución, entre otras.

7 Los conceptos de la Matemática Avanzada tienen una complejidad intrínseca, por ejemplo los estudiantes parece que no pueden comprender el significado de una ecuación diferencial a menos que hayan entendido los conceptos de diferenciación, ni pueden comprender las ideas detrás de los métodos de solución sin un entendimiento de integración ligado a ideas visuales y numéricas (Cantoral, 1997)

8 Los procesos están compuestos de operaciones sobre los objetos: las variables, las funciones y otros conceptos matemáticos. Muchas nociones pueden tomar el papel de procesos o de objetos, dependiendo de la situación problema y de la concepción del estudiante.

Se observa que sólo se trata de llevar la ecuación diferencial $ddy + Pdxdy + Qydx^2 = 0$ a una de primer orden. La razón es que las ecuaciones diferenciales de orden superior poseen un cierto tipo de indeterminación que se resuelve especificando la progresión de la variable; luego la ecuación está sujeta a esa restricción; llevarla a una de primer orden obedece a que ahí, la ecuación diferencial es independiente de la progresión de las variables, la solución de ella puede encontrarse con el recurso de la libertad de progresiones (Bos, 1974).¿Cuál es el significado de reducir una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden?

Referencias bibliográficas

Levi, E. (1980). Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas*. Edit. Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico*

Spencer, Parker, Berry, England, Faulkner, Green, Holden, Middleton, Rogers. Matemáticas para ingeniería*. Edit. Continental. México.*

Euler, L ( ). *Institutiones Calculi Integralis, Vol. II*. St. Peterburgo [Academy Press]

Pulido, R. (1997). Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar. *Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.*

Feynman, Leighton, Sands (1971). The Feynman lectures on Physics. Adisson-Wesley. California, EE. UU. (Traducido al español por Fondo Educativo Interamericano en 1971)

Benitez, L. (1993). Significación de los objetos matemáticos centrado en las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México*

Zill, D. (1998). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones Edic. 2da*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.*

Cantoral, R. (1997). Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis*. Departamento de Matemática Educativa. México.*

Cantoral, R. (1997). Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Seminario de investigación del Área de Educación Superior. México, Cinvestav – IPN*

Sobre la Naturaleza de las Convenciones Matemáticas: El caso del Exponente Cero •

Rosa María Farfán
Gustavo Martínez, gmartinez@mail.cinvestav.mx
Cinvestav-IPN
México

Resumen

El avance en la investigación que presentamos esta inmersa en una línea de investigación que busca el estudio sistémico de los fenómenos educativos con el objetivo de diseñar secuencias didácticas dirigidas a favorecer el desarrollo, en situación escolar, del pensamiento matemático avanzado de los estudiantes utilizando como metodología la Ingeniería Didáctica.

En una de las investigaciones de esta línea se ha diseñado una ingeniería didáctica que tiene por objetivo la construcción, en situación escolar, de la función exponencial. La puesta en escena de la secuencia didáctica ahí implementada ha llamado la atención sobre la naturaleza de ciertos obstáculos que impiden la construcción del concepto de función exponencial. Uno de ellos es la respuesta reiterada que dan los estudiantes sobre el valor de 2^0.

En esta ocasión nos centraremos en la naturaleza epistemológica y didáctica de la igualdad $2^0 = 1$. Esto lo haremos por dos razones: la primera se debe a que esta igualdad es el prototipo de las dificultades que tienen los estudiantes y profesores alrededor de la notación exponencial. La segunda razón es por que este ejemplo en particular sostiene nuestra hipótesis de que el origen de ciertas dificultades para el entendimiento de algunos conceptos matemáticos se deben a una característica propia de ellos: son el producto de una convención matemática que no es identificada como tal en el ámbito escolar.

Creemos que esta investigación da algunas evidencias de que las convenciones matemáticas debieran ser objeto explícito de enseñanza, y por ende construibles en el sentido que propone la Teoría de la Transposición Didáctica. Por otro lado y en lo que respecta a los niveles de explicitación en el funcionamiento didáctico de los saberes que propone la teoría, esta investigación llama la atención sobre la ausencia de explicación teórica de las convenciones matemáticas. Si consideramos que en el aula de matemáticas se usan las convenciones matemáticas, es pertinente poner nuestra atención en los fenómenos didácticos que estos ocasionan, así como el análisis de propuestas tanto teóricas como experimentales para su tratamiento.

Marco teórico

Las investigaciones sobre el fenómeno de la transposición didáctica dan cuenta que los objetos destinados a la enseñanza de ninguna manera pueden interpretarse como una simplificación de objetos más complejos, los cuales son proporcionados por una comunidad científica (saber erudito). Yves Chevallard es el que ha sistematizado estas ideas para las matemáticas en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997).

De acuerdo con esta teoría el saber a enseñar se presenta mediante textos de saber, estos tienen como una de sus características la de seguir un orden lógico (no siempre cumplido como lo demuestra este trabajo) en la presentación de los saberes. Todo el discurso

• Esta ponencia forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

tiene un principio y un fin y opera por un encadenamiento lógico de razones. Este mecanismo está presente en diversos niveles: desde el más "elemental" en donde se alude a cierto orden que es el adecuado en la presentación de los contenidos hasta el más "sofisticado" presente en la presentación axiomática de las matemáticas. Hoy sabemos un hecho fundamental para el matemático educativo: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que nos proporciona la llamada reforma de la matemática moderna).

Uno de los aspectos de interés para esta investigación es el funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la Teoría de la Transposición Didáctica. Esta teoría establece diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico (Chevallard,1997; Chevallard, et al., 1997) :

- **Nociones protomatemáticas**: Nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.
- **Nociones paramatemáticas**: Nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas.
- **Nociones matemáticas**: Objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto, objeto de estudio es sí mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos.

Cabe aclarar que estos niveles de explicitación no son de ninguna manera absolutos, pues a veces es posible llevar una noción a un nivel superior de explicitación, a este respecto Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática.

La problemática

La noción matemática de potenciación es presentada desde la educación secundaria (12 a 15 años), a^n, es definida como a multiplicada n veces. En cualquier libro de texto que introduzca el concepto de potenciación podemos encontrar una explicación muy parecida a la siguiente:

exponente

$$4^3 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{\text{3 veces}}$$

base

= 64 ← potencia

En la educación media (15 a 18 años) este concepto es ampliado, de manera típica, como se muestra a continuación (n es un natural y a distinto de cero):

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Estas definiciones son practicadas a través de múltiples ejercicios, que son resueltos en clase o bien son dejados como actividad complementaria y son causa de dificultades para muchos estudiantes para aprenderlas y para los profesores enseñarlas. En resumen podemos decir que finalmente estas dificultades son "resueltas" mediante la repetición de las definiciones hasta conseguir su memorización.

No obstante lo anterior diversas investigaciones han mostrado que la concepción de la potenciación como multiplicación repetida permanece presente aún en estudiantes que cursan el nivel universitario.

A título de ejemplo mostramos los resultados del estudio preliminar en el diseño de una ingeniería didáctica que tiene por objetivo la construcción, en situación escolar, de la función exponencial (Lezama, 1999). Dicho cuestionario se aplicó a estudiantes, tanto de bachillerato como de licenciatura, en su mayoría estudiantes del área de ingeniería. Los resultados de esta encuesta fueron:

- 2^x es una operación solo para los enteros, ya que interpretan 2^x como multiplicar 2 por si mismo "*x* veces".
- Cuando *x*<0 no hay una interpretación uniforme para 2^x como lo muestran las respuestas: $2^{-3} = .002$, $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.
- Si *x* no es entero, 2^x es solamente una notación ($2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, etc...$), 2^{π} es un número que no se puede calcular ya que carecen de un algoritmo para hacerlo y sólo se puede obtener una aproximación con el auxilio de la calculadora.

Esto mismos resultados se presentan en las múltiples puestas en escena de la situación diseñada en la misma investigación. Así nos encontramos diversas interpretaciones para la localización del punto $(0,2^0)$ (Lezama, 1999, p. 88):

- Para algunos no había duda que $2^0 = 1$.
- Algunos escribieron $2^0 = 0$ y explicaban, $2^0 = 2*0 = 0$, o bien se podía interpretar, dos elevado a la nada debe ser nada.
- Sólo hubo un caso donde se interpretó 2^0 como 2, que se podría interpretar como 2 elevada a nada, no afecta en nada al 2, por lo tanto queda 2.
- El único argumento de justificación de $2^0 = 1$, fue la definición, "todo número elevado a cero vale 1", en todos los equipos apelaron a la memoria o solicitaron la opinión del profesor.

Lo que la presente investigación quiere resaltar es que los estudiantes, al usar la definición de a^n como a multiplicado n veces, producen un argumento lógico correcto para establecer que $2^0 = 0$. En otras palabras, la coherencia lógica, en nuestro caso, no es garantía de generación de conocimiento aceptado socialmente. Dicha coherencia nos muestra que la dificultad para establecer que $2^0 = 1$ no es de naturaleza cognitiva.

Con el objetivo de proporcionar una explicación robusta de la dificultad mencionada, en lo que sigue profundizaremos sobre la naturaleza del exponente cero en los planos didáctico y epistemológico. En el didáctico realizaremos un análisis del contenido de algunos textos, teniendo en cuenta la influencia que estos tienen en el salón de clases. Por cuanto toca al epistemológico haremos un análisis, no exhaustivo, de la génesis histórica de la noción de exponente cero. Ambos análisis son llevados a cabo con el objetivo de someter a prueba nuestra hipótesis de que el exponente cero es una convención matemática y contestar las preguntas que surgen de ella: ¿La noción de exponente cero es una convención? ¿Si es así, en qué sentido lo es? ¿Cómo se ha llevado a cabo su transposición didáctica? Cabe recalcar que ambos análisis no los consideramos exhaustivos.

Elementos para el análisis didáctico del exponente cero

El análisis del contenido matemático de algunos textos, tanto de cálculo como de álgebra, nos revela que la introducción de exponentes distintos a los naturales se basa en el argumento de que su definición ha de ser de tal manera que las leyes de los exponentes (naturales) se conserven. Tal y como lo muestra la siguiente tabla no hay uniformidad sobre las leyes de los exponentes que deben seguirse cumpliendo. (Los textos siguientes han sido tomados a título de ejemplo por ser representativos en lo que respecta a sus argumentos).

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**	**Momento de la introducción del exponente cero**
Wentworth, J & Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. Editorial Porrúa, S.A. México.	"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos" $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo a^0 obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$; o, lo que es lo mismo, $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$; y por tanto, $a^0 = 1$. Así pues, Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1".*	Después de la introducción de los exponentes fraccionarios y negativos.
Rees, P. K., Sparks, F. W.& Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. McGraw-Hill. México.	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ Para el caso de los exponentes de la forma $\frac{1}{n}$ definen $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ sin que den algún argumento.	*"ley de los exponentes para la división: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si $m < n$ pero aquí se considerara el caso particular cuando $m = n$. En este caso, se obtiene $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ La definición es válida únicamente para el caso en que n sea un entero positivo por lo que a^0 no tiene sentido; sin embargo, $\frac{a^n}{a^n} = 1$ de donde es lógico definir a a^0 como el número 1".*	Inmediatamente después del tratamiento de los exponentes naturales y de la demostración de la *ley de los exponentes para la división.*
Stein, S. K.(1988). *Cálculo y*	"*Por sencillez escoge-remos el caso particular de $b = 2$.*	"*Si la ley básica de los exponentes ha de ser válida para cualquier exponente, entonces*	Todo el tema es desarrollado en un apéndice al

geometría analítica. McGraw-Hill. México	*Todas las ideas quedarán plasmadas en él [...] El exigir que* $2^{x+y}=2^x2^y$ *para todo par x e y de números reales nos dirá como ha de definirse* 2^x *".*	*en particular ha de ser* $2^{0+1}=2^0 2^1$ *por tanto* $2^1=2^0 2^1$. *Pero* $2^1=2$ *, luego* 2^0 *ha de satisfacer la ecuación* $2=2^0 2$. *No hay elección:* 2^0 *ha de ser 1".*	final del libro. Una particularidad de este texto es que utiliza un argumento gráfico para establecer que $2^{\frac{1}{2}}=+\sqrt{2}$, "*pues encaja muy bien en el gráfico*"

De una manera general estos textos presentan un método deductivo en la presentación de sus contenidos y en particular, para el asunto que nos interesa, apelan a un principio de permanencia; pues su justificación para introducir potencias no naturales presupone la aceptación de que ciertas leyes de los exponentes se conserven. Solo un texto da un argumento que trata de justificar ese principio (Wentworth y Smith, 1985, p. 287):
"*Sería ilógico y además incómodo dar al exponente fraccionario significado tal que estas leyes no se aplicasen*[leyes para los exponentes enteros]".

Lo que queremos destacar es que los argumentos presentes en los textos anteriores no son producto de un razonamiento lógico en el sentido estricto del término. En primer lugar el exponente cero no esta previsto por la definición inicial de potenciación por lo que nada garantiza el status como número de a^0. En segundo lugar lo que hemos llamado principio de permanencia es, en el fondo, la consecuencia de un principio exterior a la matemática (metamatemático) que postula que el cuerpo matemático, como disciplina científica, ha de estar libre de contradicciones; lo cual ocurriría si acaso $a^0 \neq 1$.

Elementos para el análisis epistemológico del exponente cero

Al parecer la *noción* de exponente cero, negativo y fraccionario surge con Chuquet (siglo XV) y con Stifel (siglo XVI). Al respecto Trujillo (1995) señala:

"Michel Stifel en su trabajo Arthmetica Integra *de* 1544 *utilizó la progresión aritmética de los numero naturales con otra geométrica, por ejemplo, el las coloco de la siguiente manera:*

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,

y propuso que la adición en la parte superior de la serie aritmética corresponde a la multiplicación de la serie de abajo (geométrica). Por ejemplo $2+3=5$ *corresponde a la multiplicación de* $4\times 8=32$ *, pero en esa época la notación exponencial con su ausencia no permitió a Stifel expresarla como se presenta en la actualidad:* $2^2\cdot 2^3=2^{2+3}$*, él nombró los números de arriba exponentes y a los de la parte inferior, números (progresión geométrica)..."*

Como complemento a lo anterior Klein (1972, p. 256) afirma:
"Stifel extendió esta conexión *entre dos progresiones para exponentes negativos y fraccionarios. Entonces la división entre* r^2 *y* r^3 *es* r^{-1}*, que corresponde con el término* -1 *con la progresión aritmética extendida"*

Algo semejante realizó Chuquet en su *La triparty en la Science des Nombres.* Al respecto Paradís (1993) señala:

"Chuquet explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo 12^0*,* 13^0 *para indicar 12 o13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así:* $12^1, 13^1, \ldots$ *, o bien número superficial cuadrado:* $12^2, 13^2, \ldots$ *, y así sucesivamente hasta el orden que se quiera (*12^0 *quiere decir doce;* 12^1 *indica* $12x$ *;* 12^2 *significa* $12x^2$ *,...)."*

En su escrito Paradís no deja entrever los motivos por los que Chuquet decide utilizar esta notación (el superíndice cero). Pero el siguiente párrafo, tomado de (Struik, 1986, pág. 61), muestra con claridad que era con la intención de que se conservara su algoritmo para la multiplicación:

"How to multiply a difference of number [une difference de nombre] by itself or by another similar o dissimilar to it.

Example. He who multiplies $.12^0.$ *by* $.12^0.$ *obtains.* $.144.$*, then he who adds* $.0.$ *to* $.0.$ *obtains* $.0.$*; hence multiplication gives* $.144.$*.*

Then He who multiplies $.12^0.$ *by* $.10^2.$ *has first to multiply* $.12.$ *by* $.10.$*, which gives* $.120.$ *and then* $.0.$ *must be added to* $.2.$*. Thus the multiplication will give* 120^2 *By the same reasoning he who multiplies* $.5^1.$ *by* $.8^1.$ *obtains the multiplication* $.40^2.$*."*

En resumen; la noción de exponente cero y negativo surge de la relación entre la progresión geométrica y la progresión aritmética que muestra la siguiente tabla.

A,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,

¿Qué valor debe tomar A para que la progresión aritmética se conserve?

Con lo anterior notamos que la noción del exponente cero no emerge de manera directa de la noción de potenciación sino surge de un principio de permanencia; en este caso de la progresión aritmética. Este principio de permanencia era una necesidad para que un algoritmo especifico se conservara: la adición de la parte superior de la tabla corresponde a la multiplicación de la parte inferior de la tabla. En otras palabras; el exponente cero surge como una convención matemática para que no exista contradicción con el aparato simbólico-algorítmico con que se contaba en esos momentos.

Es importante señalar otro eslabón que permitió la total aceptación del exponente cero y fraccionario, en donde también se percibe el principio de no contradicción del significado del exponente cero. Al respecto Confrey y Dennis (2000) señalan:

"Aunque no fue la primera persona[*Wallis (1606-1703)*] *en sugerir el uso de exponentes fraccionarios, su trabajo da razones de peso para su adopción. Después de leer a Wallis, el joven Isaac Newton (1642-1722) se inspiró para derivar su serie binomial general* [...] *Fermat, Roberval, Cavalieri y Pascal, habían hecho esta declaración acerca de que cuando* k *es un entero positivo, el área bajo la curva* $y = x^k$ *guardaba una proporción de* $\frac{1}{k+1}$ *respecto al rectángulo que la encierra. Pascal ha dado una prueba de inducción formal para este resultado. Wallis, sin embargo, asegura que si definimos el índice de* $\sqrt{x}$ *como 1/2, la afirmación sigue siendo verdadera. Debido a que el área bajo la curva* $y = \sqrt{x}$ *es el complemento del área bajo* $y = x^2$ [...] *debe tener una razón característica de*

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}$$

Lo mismo puede verse para $y=\sqrt[3]{x}$ *, cuya razón característica debe ser*

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}$$

Fue esta coordinación de dos representaciones separadas lo que dio a Wallis la confianza de afirmar que el índice apropiado de $y=\sqrt[q]{x^p}$ *debe ser* p/q *y que la razón característica debe ser*

$$\frac{1}{\frac{p}{q}+1}$$

Wallis continuó afirmando que esto era cierto incluso cuando el índice es irracional. Analizó un ejemplo así, cuando el índice es igual a $\sqrt{3}$ *."*

Esta misma interpretación le permite a Wallis darle un significado al exponente cero (Confrey y Dennis, 2000):

"Debido a que $y=x^0$ *debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Debido a que 1 elevado a cualquier potencia es 1, esta línea horizontal debe estar a la altura de 1"*

Conclusión

A grandes rasgos se puede notar que las explicaciones que encontramos en los libros de texto modernos, con respecto al exponentes negativos y cero, en el fondo corresponden con las ideas germinales de esos conceptos. Son necesarias para que no existan contradicciones en sus respectivos aparatos simbólicos-algorítmicos.

Con base a estos hechos apoyamos nuestra hipótesis sobre la dificultad por parte de estudiantes y profesores para dotar de significados al exponente cero. Consideramos que ello se debe a que la igualdad $a^0=1$ es considerada como un objeto matemático susceptible de ser deducido lógicamente y no se le identifica como convención matemática que resulta necesaria para que no existan contradicciones formales. En otras palabras, a no considerar que las explicaciones posibles no provienen del funcionamiento didáctico de los saberes y tampoco son consecuencia de deducciones lógicas formales de la misma matemática.

En lo que respecta a los niveles de explicitación en el funcionamiento didáctico de los saberes que propone la Teoría de la Transposición Didáctica, esta investigación llama la atención en la ausencia de explicación teórica de las convenciones matemáticas. Estás son objeto explícito de enseñanza pero no son construibles (en el sentido didáctico) como lo ha mostrado este reporte.

Si consideramos que en el aula de matemáticas se usan las convenciones matemáticas, es pertinente poner nuestra atención en los fenómenos didácticos que estos ocasionan, así como el análisis de propuestas tanto teóricas como experimentales para su tratamiento.

Bibliografía

Chevallard, Y., (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Ed. Aique. Argentina.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón J. (1997). Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Serie Cuadernos de Educación. Ed. ICE-HORSORI. España.

Confrey, J. y Dennis, D. (2000) La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México.3-1.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. New York.

Lezama J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial.* Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Chuquet. *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (Eds. Teresa Rojano, Luis Puig). Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia-PNFAMP. México.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. Princeton University Press, EEUU.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Tipos de *Mediación Social* en la Didáctica del Cálculo Integral: Relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Germán Muñoz Ortega,gmunoz@mail.cinvestav.mx
Depto de Matemática Educativa, CINVESTAV - IPN & Cimate
Universidad Autónoma de Chiapas
México.

Consideraciones Iniciales

Todo proyecto didáctico en tanto proyecto social (Chevallard, 1991) tiene asociado un contexto sociocultural contemporáneo específico, el cual por una especie de necesidad funcional intenta no sólo generar nuevo conocimiento científico sino también transmitir el conocimiento científico construido por generaciones anteriores. En ese sentido la Matemática Educativa en tanto disciplina científica se encarga de propiciar las condiciones para transmitir el conocimiento científico a través de la institución escolar. Sin embargo, esta tarea, tremendamente compleja, origina una serie de fenómenos que van desde la selección del conocimiento a enseñar hasta el predominio de ciertas relaciones entre profesor, estudiantes y saber matemático.

Una problemática fundamental en la Matemática Educativa consiste en caracterizar cuáles son las causas de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en el funcionamiento del sistema didáctico (estudiantes, profesor, saber matemático), con referencia al Cálculo integral (Muñoz, 1999c; Muñoz & Cordero, 1998a). Dicha problemática se ha convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en el campo conceptual del cálculo. También ha motivado numerosos proyectos de innovación de la enseñanza, en especial en los niveles de la educación media y el ciclo básico universitario. Se pueden citar casos como la renovación global del currículo en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de cada vez mayor amplitud en los Estados Unidos (Artigue & Ervynck, 1992; citado en Artigue, 1995, p. 98). De manera que este proyecto surge motivado por la problemática común en diversos países, incluyendo el nuestro, la cual se caracteriza por su importancia capital en la disciplina que desarrollamos. Para abordar la problemática ha sido necesario matizarla en dos posibles preguntas: ¿La separación es originada por ciertos factores del funcionamiento del sistema didáctico?; o ¿Existe esa separación en eldesarrollo sociogenético del Cálculo integral?.

Encontramos una evidencia de la imposibilidad de esa separación en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral (Muñoz, 1998c). Entonces, cuáles son las condiciones para propiciar que el funcionamiento del sistema didáctico permita garantizar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico inherentes al Cálculo integral. Identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa (Muñoz, 1996). La identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1999a). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (1990) y Cordero (1994), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990a); lo cual nos permitió realizar el análisis y la clasificación de las diversas situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral. Es necesario aclarar que la investigación está matizada por la perspectiva llamada *rediseño del discurso matemático escolar*, en la cual se ubica esta investigación.

Con el fin de que se pueda apreciar el papel de la mediación social en la didáctica del Cálculo integral, que nos ocupa en este escrito, es necesario mencionar algunos aspectos acerca de la epistemología, la cognición y la didáctica del Cálculo integral.

Nuestra investigación nos permitió percibir a *la epistemología del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual construido a partir de un marco epistémico. En Muñoz (1996, 1998a, 1998c & 1999a) se justifica, en cierto modo, porque seleccionamos en esta investigación el marco epistémico de Newton y presentamos la construcción del campo conceptual derivado de dicho marco epistémico. Una implicación tanto teórica como metodológica consiste en la posibilidad de construir otros campos conceptuales *pertinentes* a partir de otros marcos epistémicos, por ejemplo, si a partir del marco epistémico de Cauchy se construye un campo conceptual entonces es posible analizar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde otra perspectiva; sin embargo, lo importante son los mecanismos para pasar de un campo conceptual a otro. La pertinencia de los posibles campos conceptuales generados dependerá del contexto sociocultural específico de los estudiantes y los profesores que interactúan en la institución escolar y será un aspecto importante a considerar en el análisis del *rediseño del discurso matemático escolar.*

La cognición del Cálculo integral la investigamos a través de caracterizar la génesis contemporánea de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico como consecuencia de transponer el marco epistémico de Newton en un contexto sociocultural específico de la sociedad contemporánea (Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b); lo cual implica necesariamente analizar la relación entre el contexto sociocultural y los procesos mentales en donde los tipos de mediación social jugarán un papel crucial. *Y la didáctica del Cálculo integral* consistirá en identificar las condiciones para propiciar y controlar la génesis artificial, de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico (Muñoz, 1999c).

Para lograr todo lo anterior delineamos ciertos objetivos, así como la metodología de investigación, que están implícitos en el recorrido que seguimos para producir secuencias de actividades didácticas.

Producción de Secuencias de Actividades Didácticas

Por la naturaleza tan compleja de nuestra problemática ha sido necesario apoyarnos en varios supuestos teóricos y también ha sido necesario construir, en cierto modo, otros supuestos teóricos que nos están permitiendo tener una perspectiva cada vez más clara de dicha problemática y de la relevancia para la Matemática Educativa. En forma breve el recorrido que estamos siguiendo para producir secuencias de actividades didácticas consiste en:

a) Del marco epistémico de Newton: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994), constituido en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, se puede apreciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, por ejemplo, existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor*, en la cual subyace un procedimiento de derivación sucesiva (Cantoral, 1990). En breve, en la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico.

b) Construimos un campo conceptual del Cálculo, es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, con base en el marco epistémico de Newton y en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990a) así como en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994).

c) Enseguida realizamos algunos experimentos con estudiantes contemporáneos, inmersos obviamente en un contexto sociocultural contemporáneo específico, para estudiar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (Muñoz & Cordero, 1998a; Muñoz, 1998b; Muñoz, 1999b). Las situaciones específicas a tratar con los estudiantes son desprendidas del campo conceptual previamente construido. En pocas palabras, caracterizar la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico.
d) Después intentaremos controlar la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en la institución escolar vía un diseño adecuado de secuencias de actividades didácticas, es decir, el *control de la génesis artificial.* Todo lo anterior siempre estará matizado por la perspectiva del rediseño del discurso matemático escolar.

Partimos de un diseño inicial que consiste en una secuencia de seis hojas de actividades didácticas, y que servirá como punto de partida para rediseños posteriores con base en los experimentos que se desprenderán producto de la interacción entre investigadores y profesores en ejercicio.

A partir de la caracterización de un campo conceptual del Cálculo se pueden desprender experimentos del tipo que se han mencionado en el inciso c), que nos ayuden a precisar cada vez más las condiciones que permitan el control de la construcción de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico que exige necesariamente el funcionamiento del sistema didáctico (Brousseau, 1986). Lo anterior es un punto muy importante en tanto el sistema didáctico es un sistema abierto, es decir, está inmerso en un entorno social con el cual busca, en cierto modo, ser compatible (Chevallard, 1991).

Sin duda que los experimentos del tipo que se han mencionado en el inciso d) son de importancia capital, sin embargo, sostenemos que no debe darse primacía a los experimentos en situación escolar ni tampoco primacía a los experimentos en situaciones no escolares, lo cual nos permitiría propiciar dicha compatibilidad.

En todo el recorrido anterior nos estamos guiando por las siguientes hipótesis:

I. La relación entre lo conceptual y lo algorítmico que se presenta en la *génesis histórica* se conservará en lo que hemos llamado la *génesis contemporánea*, pero su naturaleza será distinta.
II. El caracterizar, en lo más posible, la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico permitirá identificar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial* de dicha relación, en el funcionamiento del sistema didáctico en tanto sistema abierto.

La primera hipótesis nos guiará en la pregunta: cómo se constituye un marco epistémico contemporáneo cuando los estudiantes interactúan con situaciones problema en tanto objeto de conocimiento derivado del marco epistémico de Newton. Por lo cual es indispensable analizar la contribución que proviene de la componente social; la cual estudiaremos a través de caracterizar las prácticas sociales comunicativas que implica considerar como unidad de análisis a la *acción mediada* (en el sentido de Wertsch, 1993). Y la contribución que proviene de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo; la cual estudiaremos a partir de analizar las interacciones entre el objeto de conocimiento común y los estudiantes, tomando como unidad de análisis al *esquema* (en el sentido de Vergnaud, 1990a) que implica centrar la atención en la *acción.* Sin embargo, no realizaremos un análisis por separado de la *acción* y la *acción mediada*, lo cual estaría en franca contradicción con nuestros supuestos teóricos, sino más bien pensamos que la noción de *mediación social* es la que nos permitirá analizar la interacción de la componente social con la componente intrínseca al sistema cognoscitivo, específicamente a través de caracterizar los tipos de mediación social (ver apartado siguiente).

Aun más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar. Para lo cual, la segunda hipótesis nos guiará en el sentido de que entre más precisemos los tipos de mediación social ganaríamos precisión acerca de: en que momento la intervención del profesor es necesaria, en que momento es necesaria la interacción estudiantes-situación problema y en que momento se le debe ceder el paso a los procesos comunicativos. Sin embargo, una pregunta obligada de importancia capital y tremendamente compleja es ¿Cómo llevar a cabo dichos tipos de mediaciones?.

Tipos de Mediación Social

Primero realizaré un análisis global desde la disciplina de Matemática Educativa y luego involucrando algunos aspectos de este proyecto de investigación específico.

En Matemática Educativa un punto muy importante es su carácter interdisciplinario, lo cual es una condición necesaria en tanto disciplina científica, por ejemplo, para construir una epistemología científica del conocimiento científico y para construir una psicología científica de la conciencia humana, como se propusieron Piaget y Vygotski respectivamente, era necesario luchar siempre contra los reduccionismos y fronteras disciplinares. Sin duda esa visión es uno de los aspectos más relevantes de estos dos acercamientos. Wertsch (1993) intenta llevar hasta sus últimas consecuencias esa visión, en particular al analizar la relación entre los procesos mentales y los escenarios socioculturales.

Una primera reflexión para la Matemática Educativa es que al intentar delimitar el objeto de estudio y construir una disciplina autónoma se puede correr el riesgo de aislar la disciplina, quiza implicitamente se tenga presente este riesgo, sin embargo, no está demás insistir en una interacción, en sentido estricto, entre la Matemática Educativa y las disciplinas limítrofes (Sociología, Psicología, Semiótica, Epistemología, Antropología, por citar algunas). En esta interacción obviamente la disciplina de referencia es la Matemática Educativa.

En el sentido anterior, la unidad de análisis[9] juega un papel crucial. Por ejemplo, Wertsch (1993) toma como unidad de análisis a la "acción mediada" lo cual permite que sea un puente entre la Psicología y la Semiótica y, a través de la Semiótica, entre la Psicología y las demás Ciencias Sociales; sin embargo, la disciplina de referencia es la Psicología. La pregunta obligada es ¿cuáles podrían ser unidades de análisis en Matemática Educativa que permitan tender puentes con las disciplinas limítrofes?.

Dentro de la Matemática Educativa un problema fundamental consiste en analizar las causas de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en el funcionamiento del sistema didáctico, con referencia al Cálculo integral. Y así poder investigar las condiciones para propiciar la relación. Al respecto la unidad de análisis nos advierte sobre el riesgo de realizar un análisis de lo conceptual y lo algorítmico por separado y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación, lo cual podría conducir a ciertos errores. Nuevamente la pregunta obligada es ¿cuál es la unidad de análisis que permitiría tender un puente entre lo Conceptual y lo Algorítmico?, o en otras palabras, ¿cuál podría ser el microcosmos de lo Conceptual y lo Algorítmico?. Estas preguntas implican mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica.

Nuestras investigaciones se han anclado fuertemente en la Epistemología Genética y desde allí nos ha conducido, en cierto modo, a la misma visión; es decir, nos ha permitido alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Más bien analizamos las relaciones a partir del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico (Muñoz, 1999a).

[9] "...Por *unidad* entendemos el resultado del análisis que, a diferencia de los elementos, *goza de todas las propiedades fundamentales características del conjunto* y constituye una parte viva e indivisible de la totalidad. No es la fórmula química del agua, sino el estudio de las moléculas y del movimiento molecular lo que constituye la clave de la explicación de las propiedades definitorias del agua. Así, la célula viva, que conserva todas las propiedades fundamentales de la vida, definitorias de los organismos vivos, es la verdadera unidad del análisis biológico..." (Vygotski, 1982, pp. 19-20).

Sin embargo, al analizar una aproximación sociocultural a la mente (Wertsch, 1993) es necesario describir algunos matices para la investigación de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, como consecuencia de considerar las prácticas comunicativas humanas:

a) Distinguir el papel de los instrumentos de conocimiento del papel de los instrumentos mediadores.
b) Distinguir mediación social vía la situación problema (en tanto objeto de conocimiento) de la mediación social vía la guia del profesor y la mediación social vía las interacciones de otros estudiantes con la situación problema.
c) La mediación social que se presenta de un escenario sociocultural (por ejemplo la educación formal) al plano interpsicológico y de allí al plano intrapsicológico.

Por ejemplo, para el inciso a) Los instrumentos de conocimiento son inherentes al sistema cognitivo, es decir, son engendrados por la asimilación y tienen su origen en la interacción entre estudiantes como sujeto cognoscente y situación problema en tanto objeto de conocimiento, por ejemplo, *abstracciones y generalizaciones* (ver Piaget y García, 1994, pp. 246-249). Sin embargo, los instrumentos mediadores no surgen asociados al sistema cognitivo sino que surgen más bien asociados directamente al escenario sociocultural, por ejemplo, *los géneros discursivos y los lenguajes sociales* como instrumentos mediadores; lo cual se puede apreciar en "...los instrumentos mediadores surgen con frecuencia como respuesta a otros requerimentos que a la eficacia de las funciones intrapsicológicas o interpsicológicas....los instrumentos mediadores que dan forma a la acción no surgen típicamente como respuesta a las demandas de la acción mediada, ya sea en el plano interpsicológico o en el intrapsicológico..." (Wertsch, 1993, p. 53).

Para el inciso b) la mediación social vía la situación problema se puede apreciar desde la Epistemología Genética, por ejemplo, "El remontarnos a los niveles precientíficos hasta el nivel mismo de las acciones no significa que debamos considerar solamente el desarrollo del sujeto frente a un objeto que está "dado" independientemente de todo contexto social... los objetos funcionan ya de cierta manera-socialmente establecida- en relación con otros objetos y con otros sujetos. En el proceso de interacción, ni el sujeto ni el objeto son, por consiguiente, neutros.... Que la atención del sujeto sea dirigida a ciertos objetos (o situaciones) y no a otros; que los objetos, sean situados en ciertos contextos y no en otros; que las acciones sobre los objetos sean dirigidas en cierta forma y no en otras: todo esto está fuertemente influido por el medio social y cultural (o por lo que hemos llamado el paradigma social). Pero todas estas condiciones no modifican los *mecanismos* que necesita esa especie biológica tan particular que es el ser humano para *adquirir* el conocimiento de dichos objetos, en dichos contextos, con todas las significaciones particulares socialmente determinadas que le hayan sido asignadas." (Piaget & García, 1994, pp. 244-245).

Por otra parte la mediación social vía la guia del profesor se puede apreciar en la obra de Vygotski, por ejemplo, "...El argumento general sobre el origen social de las funciones mentales superiores en el individuo, surge con más claridad en relación con la *zona de desarrollo próximo*, noción que ha concitado recientemente gran atención en Occidente...Esta zona se define como la distancia entre *el nivel de desarrollo efectivo (del niño), determinado por la resolución independiente de un problema,* y el nivel superior de *desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de problemas con la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capacitados*..." (Vygotski, 1978, p. 86; citado en Wertsch, 1993, p. 45).

Continuando con el inciso b), otro tipo de mediación social se puede apreciar en la obra de Ferreiro sobre la escritura en tanto objeto de conocimiento, en donde "...La escritura tiene una serie de propiedades que pueden ser observadas actuando sobre ella, sin más intermediarios que las capacidades cognitivas y linguísticas del sujeto. Pero además tiene otras propiedades que no pueden ser "leídas" directamente sobre el objeto, sino a través de las acciones que otros realizan con ese objeto. La mediación social es imprescindible para comprender algunas de sus propiedades..." (Ferreiro & Teberosky, 1995, pp. 363-364).

Para el inciso c) la mediación social que se presenta de un escenario sociocultural (por ejemplo la educación formal) al plano interpsicológico y de allí al plano intrapsicológico a través de los géneros discursivos y los lenguajes sociales como instrumentos mediadores, por ejemplo, "...Las ideas de Bajtín...hacen posible examinar el funcionamiento interpsicológico e intrapsicológico concreto sin perder de vista cómo este funcionamiento se ubica en escenarios históricos, culturales e institucionales. De hecho, la concepción de Bajtín sobre los lenguajes sociales y los géneros discursivos, y de los procesos dialógicos de los que ellos se apropian, garantizan, por lo menos, la centralidad de la relación entre el proceso psicológico y el escenario sociocultural." (Wertsch, 1993, p. 144). En este tipo de mediación se presenta una privilegiación, es decir, "La privilegiación se refiere al hecho de que un instrumento mediador, tal como un lenguaje social, se concibe como más apropiado o eficaz que otros en un determinado escenario sociocultural." (Wertsch, 1993, p. 146). Por otra parte, "...al centrarse en los géneros discursivos como instrumentos mediadores, uno recuerda constantemente que la acción mediada se encuentra inextrincablemente unida a escenarios históricos, culturales e institucionales, y que el origen social de las funciones mentales individuales se extiende más allá del nivel de funcionamiento interpsicológico..." (Wertsch, 1993, p. 166).

Todo lo anterior nos proporcionará referentes acerca de lo que ocurre cuando intentamos transponer un *marco epistémico* del siglo XVII en la sociedad contemporánea (el objeto de conocimiento común es derivado del marco epistémico de Newton) e investigar cómo se constituye un *marco epistémico contemporáneo*, lo cual implica ir desentrañando cómo los intrumentos mediadores (que no surgen asociados directamente con el sistema cognitivo) interactúan con los instrumentos de conocimiento (que son inherentes al sistema cognitivo), es decir, si consideramos a la *acción mediada* (en el sentido de Wertsch, 1993) y al *esquema* (en el sentido de Vergnaud, 1990a) en tanto unidades de análisis que podrían permitir estudiar las relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico cuando el marco epistémico contemporáneo está en vías de constitución. Aun más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar.

Consideraciones Finales

Con base en las consideraciones anteriores realizamos varios experimentos del tipo que se han mencionado en el inciso d) del apartado B de este escrito. Por ejemplo, en dos grupos del segundo semestre de la Licenciatura en Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas, se trabajó en algunas ocasiones de manera individual y en otras formando equipos; también se videofilmaron las discusiones entre los equipos y después se procedió al análisis. Un hallazgo de nuestro análisis consiste en evidenciar un tipo de mediación social que se ha mencionado en el inciso b) del apartado C, es decir, desentrañar las propiedades del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico que no pueden ser "abstraídas" por la interacción entre los estudiantes y el objeto de conocimiento común, y en donde es imprescindible la mediación social. Así, buscamos desentrañar los mecanismos que operan cuando se intentan llevar a acabo los diferentes tipos de mediación social en una institución escolar específica de un contexto sociocultural específico, con el fin de que nos permita ir generando las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico inherente al Cálculo integral.

De manera que, nuestros hallazgos implicarán para la Matemática Educativa una vez más la imposibilidad de construir métodos generales de enseñanza de la matemática porque la mediación social depende del objeto de conocimiento específico, de las prácticas sociales comunicativas específicas en un contexto sociocultural y de la naturaleza del proyecto didáctico en tanto proyecto social. También, permitiría llevar a otra dimensión más amplia el señalamiento de Vergnaud (1991) acerca de la necesidad de construir didácticas específicas de acuerdo al tipo de contenido matemático, dentro de la didáctica de la matemática. Es decir, estamos intentando sostener la necesidad de construir didácticas específicas de acuerdo al tipo de contenido matemático específico y de acuerdo a las prácticas sociales comunicativas características de un contexto sociocultural, con todo lo que esto implica. Por la naturaleza de este proyecto de investigación que trata sobre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del Cálculo integral ha sido necesario realizar una interacción, en sentido estricto, entre la epistemología genética y una aproximación sociocultural a la conciencia humana al seno de la Matemática Educativa, como se puede apreciar en el cuerpo del documento.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). "La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 97-140. México.

Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques". Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 7, No. 2, pp. 33-115.

Cantoral, R. (1990). "Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas". Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.

Chevallard, Y. (1991). "La transposición didáctica". *Del saber sabio al saber enseñado.* Ed. Aique. Argentina.

Cordero, F. (1994). "Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar". Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Ferreiro, E. & Teberosky, A. (1995). "Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño". Ed. Siglo Veintiuno. México. décimoquinta edición.

Muñoz, G. (1996). "Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en el Cálculo Integral". Tesis de Maestría en Ciencias, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (1997). "On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in kinematics". Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bloomington/Normal, Illinois, U.S.A. Vol.1, pp.63-64.

Muñoz, G. & Cordero, F. (1998a). "Epistemological and cognitive aspects of the link between the conceptual and the algorithmic in the teaching integral calculus". Proceedings of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. North Carolina State University Raleigh, North Carolina, USA. Vol. 1. pp. 157.

Muñoz, G. (1998b). "Lo conceptual y lo algorítmico en la integración: algunos aspectos cognitivos". Actas de la Decimosegunda *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame*. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 34-37. *México.*

Muñoz, G. (1998c). "Las Relaciones entre lo Conceptual y lo Algorítmico: el caso de la integración". Antología Número 3 del Programa Editorial del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Serie Antologías. pp. 185-222. México.

Muñoz, G. (1999a). "Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración". Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. pp. 14-15. México.

Muñoz, G. (1999b). "Relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde la perspectiva de la psicogénesis de la integral". Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. p. 53. México.

Muñoz, G. (1999c). "Análisis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el aprendizaje y la enseñanza de la integración". Actas de la Décima Tercera Reunión

Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 96-103. *México.*

Piaget, J. & García R. (1994). "Psicogénesis e Historia de la Ciencia". Siglo XXI, México, 6a. ed.

Vergnaud, G. (1990a). "La Théorie des Champs Conceptuels". Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 10, No. 13, pp.133-170.

Vergnaud, G. (1991). "El niño, las matemáticas, y la realidad". Ed. Trillas, México.

Vygotski, L. S. (1982). "Obras Escogidas II". Incluye Pensamiento y Lenguaje, y Conferencias sobre Psicología. Ed. Visor. España.

Wertsch, J. V. (1993). "Voces de la Mente: Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada". Ed. Visor. España.

Un Acercamiento al Entendimiento de la Regla de la Cadena.

Javier Barrera Angeles
Subnodo Regional de Matemática Educativa
Universidad Autonoma del Estado Hidalgo
México.

Resumen

Esta investigación tienen como Objetivo Principal mostrar los resultados obtenidos acerca de un estudio sobre el " Entendimiento de la Regla de la Cadena" en estudiantes de nivel Superior. Se parte de la Hipótesis de que no es necesario que los estudiantes entiendan el concepto de función compuesta para que puedan entender el concepto de "Regla de la Cadena". Esta hipótesis está fuertemente apoyada en los antecedentes históricos del origen del cálculo (por ejemplo el cálculo de fluxiones de Newton) desde la misma época de Newton y Leibniz. Se trazan dos rutas que muestran como se puede presentar al estudiante el concepto de "Regla de la cadena": La primera, marca la forma usual en que actualmente es enseñado este concepto en las escuelas y la segunda muestra que el cambio de variable puede conducir al mismo objetivo. Sin embargo, esto da motivo a la siguiente pregunta ¿qué apareció primero, la regla de la cadena o la función compuesta?. Por ultimo muestra las evidencias halladas en los estudiantes sobre la génesis del concepto de Regla de la Cadena.

Introducción

En esta investigación intentamos describir un estudio sobre el entendimiento de la regla de cadena (RC) con estudiantes de nivel superior (concretamente con estudiantes del instituto tecnológico de Pachuca; un caso) en donde resaltan dos aspectos que consideramos de vital importancia en el desarrollo de esta investigación, estos son: por un lado la forma tradicional en que es enseñado el concepto de regla de la cadena en Instituciones de nivel superior del estado de Hidalgo y sin temor a equivocarnos en México en general. Esta tendencia en la enseñanza de este concepto (RC) esta plenamente identificada en los textos de cálculo existente en los medios escolares como se mostrará más adelante. En segundo lugar, una mirada hacia la historia, nos permite suponer que existe una forma diferente de abordar este concepto (RC) y que se apoya fuertemente en lo que creemos fue la génesis de este concepto (RC) y que consiste precisamente a través de un cambio de variable (como lo muestran los trabajos de Newton acerca del cálculo de fluxiones) esta parte histórica es la que nos permite trazar una segunda ruta (la primera ruta es la que indica la forma tradicional en que es enseñado este concepto) sobre la enseñanza de este concepto (RC). La ubicación del problema genera la necesidad de recurrir a la aplicación de cierta metodología que permita precisar sobre el objeto de estudio. Esta metodología consiste principalmente en lo siguiente: 1) se elaboró una encuesta con información de carácter general sobre los antecedentes académicos de los estudiantes. 2) se aplico un cuestionario que fue tomado de cierto modo del articulo cuyo título es "construyendo un esquema: El caso de la regla de la cadena". 3) La revisión de textos fue otra de las actividades que permitieron aportar información pertinente en la ubicación del problema, para ello fue necesario trazar una secuencia cuyas características se describirán en forma detallada mas adelante. 4) De los antecedentes históricos en los cuales hemos puesto especial atención debido a que en esta parte descansa nuestra hipótesis, la cual establece que no es necesario que el estudiante entienda el concepto de función compuesta para que pueda entender el concepto de regla de la cadena.

El estado del arte hace pertinente nuestra investigación ya que permite justificar este trabajo. Y sobre el marco teórico, consideramos conveniente tomar algunos elementos muy importantes de la teoría APOE (Acción Proceso, Objeto, Esquema). También el comportamiento tendencial de funciones se tomo en cuenta debido a que este argumento establece relaciones entre funciones y esta compuesto de una colección coordinada de conceptos y vive en situaciones de cálculo donde se discuten aspectos globales de variación. El diseño de situaciones son un mecanismo que permiten a través de su aplicación y análisis la obtención de los resultados deseados. Por ultimo, en la implementación y el análisis consideramos relevantes los siguientes puntos: 1)Antecedentes del medio de los estudiantes, 2) Características de los estudiantes, 3) Descripción del escenario, 4) presentación del análisis; en esta parte fue trazada una secuencia que permitió entender los distintos estados del conocimiento. Por ultimo en la parte de conclusiones intentamos dejar en claro las aportaciones de esta investigación, de las cuales destacan las siguientes: Existen evidencias sobre el hecho de que apareció primero la regla de la cadena que la función compuesta. Donde el cambio de variable fue crucial en la construcción del concepto de regla de la cadena entre otros.

JUSTIFICACIÓN

En la enseñanza del cálculo al igual que cualquier otra disciplina están presentes ciertas dificultades que no permiten que el aprendizaje se de con cierta facilidad, y como consecuencia de esto, la mala comprensión y el poco entendimiento provocan en los estudiantes los niveles más bajos en aprovechamiento, esto desencadena una serie de problemas en los medios escolares y que se reflejan en la deserción de estudiantes en las escuelas. Esta es una de las tantas problemáticas que preocupan a profesores e investigadores responsables y conscientes de su actividad, quienes han tomado cartas en el asunto y con el desarrollo de investigaciones pretenden disminuir en parte esta problemática. En nuestro presentamos un estudio sobre el entendimiento de la “Regla de la cadena” en estudiantes del nivel Superior, apoyado nuestra investigación en los aspectos históricos e investigaciones realizadas al respecto.

MARCO TEORICO

Para el desarrollo de esta investigación hemos puntualizado básicamente en tres aspectos importantes que nos han servido como puntos de apoyo . Además, sustentan de alguna manera este trabajo, estos son: En primer lugar, los antecedentes históricos juegan un papel muy importante, debido a que es precisamente en esta parte en donde intentamos soportar esta investigación. Por ejemplo, los primeros trabajos sobre el desarrollo del cálculo permiten asumir cierto tipo de suposiciones acerca de la génesis del concepto de “Regla de la Cadena” (Villarreal, J. 1996). En segundo lugar, hemos considerado algunos elementos de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) que nos permiten poder explicar cierto tipo de procedimientos o describir determinados fenómenos. Por ultimo, hemos hecho uso del “Comportamiento Tendencial de las funciones: como una Categoría de Conocimiento del Cálculo” (Cordero, F. 1998), el cual nos ha permitido diseñar las situaciones que se implementaron en este estudio.

OBJETIVO PRINCIPAL

Tenemos como objetivo principal estudiar el entendimiento del concepto de “Regla de la Cadena” en estudiantes de nivel superior.

OBJETIVOS PARTICULARES DE LA INVESTIGACIÓN. Para abordar nuestro problema de investigación nos hemos planteados los siguientes objetivos:

1. Explicar el entendimiento de los estudiantes acerca del concepto de “Regla de la Cadena.
2. Describir la situación actual acerca de cómo el concepto de “Regla de la Cadena” es presentado en los contenidos actuales; así como el manejo del concepto en el discurso matemático escolar.
3. Encontrar evidencias en los estudiantes acerca de lo ocurrido en el desarrollo histórico conceptual de la “Regla de la Cadena”.
4. Explorar otra ruta para analizar el entendimiento en los estudiantes acerca del concepto de “Regla de la Cadena”.

HIPÓTESIS DEL TRABAJO

En los antecedentes históricos, a los cuales nos hemos referido con anterioridad nos permiten trazar una segunda forma de abordar el concepto de “Regla de la Cadena” debido a que nuestro problema de Investigación consiste en un estudio sobre el entendimiento del concepto de “Regla de la Cadena” en estudiantes de nivel superior. En este concepto podemos decir que la “Regla de la Cadena” puede ser abordada a través de una segunda ruta o trayectoria. Esta ruta nos permite establecer las siguientes Hipótesis:

H1. No es necesario que los estudiantes entiendan el concepto de “función compuesta” para que puedan entender el concepto de “Regla de la Cadena”.

H2. Es posible que los estudiantes aborden el concepto de “Regla de la Cadena” con solo hacer uso del cambio de variable.

Para probar las hipótesis planteadas (H1,H2) anteriormente, hemos diseñado un conjunto de situaciones para que el estudiante interactué con ellas.

Debido a que el cambio de variable no puede verse por separado, es conveniente crear situaciones que permitan observar en el estudiante en que momento hacen uso del cambio de variable; es decir, en que momento el cambio de variable se vuelve necesario para obtener el diferencial.

DE LOS RESULTADOS

En el desarrollo de esta investigación hemos obtenido algunas evidencias acerca de nuestra hipótesis planteadas, además hemos cumplido de alguna manera con los objetivos planteados sobre nuestro problema de investigación el cual consistió en explorar una ruta diferente para analizar el entendimiento del concepto de regla de la cadena en estudiantes de nivel superior.

Un primer elemento fue identificar de la revisión de textos la siguiente ruta: $f \rightarrow (f \text{ o } g) \rightarrow (f \text{ o } g)'$ de la cual se puede analizar el entendimiento de los estudiantes cuando se intenta que aborden situaciones que propicien el seguimiento de la ruta anterior. Por ejemplo RUMEC analiza el entendimiento “de la regla de la cadena” centrando su atención en la composición de funciones para luego abordar la derivada de esta composición (Clark.,et al, 1997). [Citado por Rumec].

Después de revisar algunos trabajos de investigación que en su análisis usan la historia para encontrar evidencias acerca de la construcción del concepto de “Regla de la cadena” (por ejemplo, Villarreal, 1996); encontramos que:

- La regla de la cadena apareció antes que la composición de funciones.
- El cambio de variable fue crucial para la construcción del concepto de regla de la cadena.

Por lo anterior pudimos identificar la siguiente ruta fig. 1.

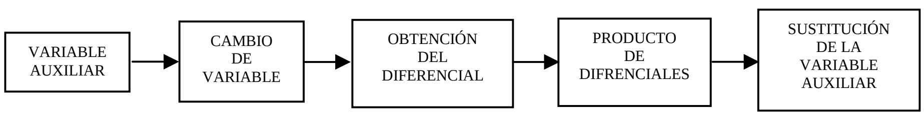


Fig.1

Lo cual nos permitió explorar el entendimiento de los estudiantes acerca de la regla de la cadena desde otra perspectiva.

Además, incorporamos fuertemente la componente gráfica debido a que hoy en día la calculadora gratificadora nos provee ambientes gráficos que le dan ciertas características a las construcciones de los estudiantes. Por lo cual, un problema importante es cómo usa la aritmética gráfica de funciones para el análisis de los conceptos de cálculo cuya naturaleza es de carácter local y las ventanas usadas en el ambiente gráfico son de carácter global.

Una de las aproximaciones a este problema, fue realizado por Villarreal (Villarreal, 1996) y otra aproximación consiste en mirar los comportamientos tendenciales de las gráficas de las funciones a partir de cambiar el tipo de problemas en donde la solución de dichos problemas dejan de ser importantes, lo importante ahora es la simulación a través de los coeficientes de las funciones (Cordero, 1998).

A partir de las consideraciones anteriores realizamos un diseño de situaciones que intentaban incorporar los siguientes aspectos:

- Como un estado de conocimiento de partida se intentó situar al estudiante en un ambiente gráfico.
- Que el cambio de variable fuera necesario para analizar el comportamiento de la gráfica de la derivada, y así llegar al nuevo estado de conocimiento.

A través de la entrevista clínica recogimos la siguiente información:

Cuando se le pregunta sobre la gráfica de la derivada de las dos funciones siguientes:

$F(x) =(x+2)^2 +2$, y $f(x) = (x+3)^2 +2$, el estudiante (M) responde de forma verbal y de acuerdo a su experiencia en el desarrollo de la entrevista siguiente.

M: Como se trata de dos parábolas, al derivar, el coeficiente de la derivación, va a ser 2, el coeficiente de ambas derivadas se parece mucho van a tener la misma inclinación, pero el desplazamiento en "y" es diferente, va a depender de los valores de "a" y "b" en la función original.

J: ¿ Porqué de "a" y "b" ?.

M: No, depende de "a" por lo que al derivar "b" se hace cero .

Donde se puede observar que de alguna manera la pregunta planteada le creo al estudiante la necesidad de recurrir a un cambio de variable en el sentido siguiente: Identifica un cambio de variable al considerar a los coeficientes del proceso de derivación como muy parecidos y que van a tener la misma inclinación, porque esta analizando a 2(x+2) y a 2(x+3), además para el estudiante (x+2) y (x+3), los considera como un paquete, es decir, los considera como variable auxiliar (ya que no realiza los productos de 2 por lo que aparece en los paréntesis) y luego centra su atención en la variable auxiliar como se observa en la frase siguiente: "pero el desplazamiento en "y" es diferente, lo cual permite evidenciar que está considerando a x+2 = "y" y a x+3 = "y" para después observar el comportamiento de "y" ("y" = variable auxiliar); y reconoce que el afecto del coeficiente de "y" le permite predecir el comportamiento de la gráfica de la derivada cuando argumenta: que el desplazamiento en "y" (se refiere a la gráfica de la derivada) depende de "a" (esta mirando el efecto en la expresión de la derivada $f'(x) =2(x+a)$, de la función $f(x) = (x+a)^2 +b$). En otras palabras, el estudiante mira que: si la variable auxiliar esta multiplicada por un coeficiente entonces la gráfica de la derivada conserva su pendiente. También si dentro de la variable auxiliar sucede una traslación vertical entonces la gráfica de la derivada sufre una translación vertical.

Estos datos nos proporcionaron una evidencia de que la segunda ruta alternativa es posible, y no solamente la plausibilidad es importante en términos de su existencia, sino su importancia más bien radica en términos del tipo de análisis del entendimiento de los estudiantes, acerca de la regla de la cadena.

Referencias bibliográficas

Agustín Anfossi, M.A. Flores Meyer. (1984). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Progreso S.A. México. Sexta Edición.

Arango, C., González S., Pedroso, B. (1995). "Como Consolidar los Cimientos Matemáticos en los Alumnos". Editorial Academia. La Habana.

Cantoral, R. (1992). Acerca de la Intuición del Rigor; Notas Para Una Reflexión Didáctica. ITAM, CINVESTAV-IPN. PNFAPM. Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigadores en Matemática Educativa. **v. 1**, p-24.

Cantoral, R. (1994). Los textos de Cálculo: "Una Visión de las reformas y contrarreformas". Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. pp. 11 -20. San José, Costa Rica.

Cantoral, R. (1998). Hacia una Didáctica del cálculo basada en la Cognición. Serie de Antologías, N. 1. Cinvestav-IPN.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. St. John. D., Vídakovíc, D. & Tofias, G. (1996) "Mental Constructs Used in Understanding the Chain Rule Concepf"'. Ponencía en la sección de reportes de investigaci0n. Eighteenth Annual Meeting North American Chapter of the Intemational Group for the Psichology of Mathematics Education del 12 al 15 de octubre de 1996. Florida State University.

Cordero F. Solís M. (1997). Las Graficas de las Funciones Como Una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial Iberoamericana**.** México Segunda Edición.

Cordero, F. (1992). "Un mapa conceptual, juntar y separar, sumar y restar, integrar y derivar". Cinvestav. IPN

Cordero, F. (1992). "Una base de significados en la enseñanza, de la matemática avanzada". Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Vol. 2**. pp 267-296. Cuernavaca, Morelos. México.

Cordero, F. (1998). " El comportamiento Tendencial de las Funciones como una categoría del conocimiento del cálculo". CINVESTAV-1PN.

Cordero, F. (1998). "El Entendimiento de Algunas Categorías del Conocimiento del Cálculo y Análisis: El caso del Comportamiento Tendencial de las Funciones". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. **Vol. 1**. pp. 56-74. México. Intemational Thomson Editores.

Cordero, F., (1993). "Epistemología, cognición y didáctica del Cálculo una visión de conjunto". Memorias del Quinto Simposium Intemational sobre Investigación en Matemática Educativa. Escuela de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán, Noviembre 18-20, pp. 175-180.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). ""The nature of process conception of function". In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). The Concept of Function. Washintong, DC: Mathematical Association of America."

Dubinsky, R. (1991). "Reflexive abstraction in advanced mathematical thinking". In D. Tall (De.) Advanced Mathematical Thinking (Chap. 7, pp. 95-126). Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C.H. Jr. y David E, Penny. Cálculo con Geometría Analítica. Prentice-Hall Hispanoamericana. 1989.

Farfán, R. (1991). "El Curso de Precálculo. un enfoque gráfico". Publicaciones Centroamencana 5(1): 206-211.

Farfán, R. (1998). El Concepto de Función Hasta la Mitad del Siglo XIX. Serie de Antologías. N. 1. CINVESTAV-IPN.

Granville, William A. Cálculo Diferencial e Integral. Quinta Edición. México, Editorial Limusa. 1982.

Hernández, Román. (1995). "Transformaciones de la Ecuación de la Derivada a Partir de sus Transformaciones Geométricas en el Contexto de un Taller de c-6. Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato". Tesis de Maestría, Cinvestav.

K. E, Hirst. "Derívates and Tangents. Educational Studies in Mathematics". **v.4**., 1971-1972.

Mexico. 1987.

Penia, Fco. (1984). "Estudio Paralelo de la Presentación de la Derivada en Diversos Textos de Cálculo". Tesis de Maestría, Cinvestav.IPN.

Piaget y Garcia. (1996). Psicogénesis e Historia de las Ciencias. Siglo XXI Editores. México Séptima Edición.

Piskunou, N.S. Cálculo Diferencial e Integral. Tomo 1. México, Editorial Quinto Sol. 1983.

Purcel Edwin y Dale Varberg. Cálculo con Geometría Analítica. Edito Prentice-Hall Hispanoamericana.

Roland E. Larson y Robert P. Hostetler. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Me. Graw-Hi11. México. 1993.

Serge, Lange. (1990). Cálculo. Addson-Wesley Iberoamericana. México, Primera Edición.

Sherman, K. Stein. (1984) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill. México. Tercera Edición.

Sierpinska, A. (1994). "Undertanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education". Series: 2, The Flamer Press

Sierpinska, A., (1994). "On undertanding the notion of function". In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). The Concept of Function. (pp. 25-58). Washintong, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska., A. (1994). "Understanding in Mathematies". Prited in Great Britain by Burgess Press

Swokoski, E. W. (1993). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. México, Segunda Edición.

Tall & Vinner, (1981). "Concept image and concept definition in mathematics eith particular reference to limits and continuity". Educational Studies in Mathematics, 12(l), 151-169.

Villarreal, J. (1996) "La composición de cunciones: el caso de la regla de la cadena".Tesis de Maestria. CINVESTAV-IPN.

Vergnaud, G. (1991). El niño las matemáticas y la realidad. Ed. Trillas. México.

Wenzelburger, E. (1994). Didáctica del Cálculo Integral. Grupo Editorial Iberoamericana. México

ZILL, D.(1985). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamericana. México, Segunda Edición.

Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*

*Rosa María Farfán M. y Javier Lezama***
Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México

Resumen

La puesta en escena de situaciones didácticas en el medio escolar enfrenta problemas teóricos que requieren ser estudiados. Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica es establecer explícitamente los elementos que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la situación, al repetirla en distintos escenarios. Pregunta de investigación: ¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar se reproduzcan, cuando la misma situación de clase es implementada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios?

Objetivos de la investigación: Para poder responder a nuestra pregunta nos proponemos: a)identificar el tipo de fenómenos a reproducir en la puesta en escena de una situación didáctica y, b) plantear un posible modelo, en términos de la actividad de la comunicación del escenario

Método a seguir: El desarrollo de mi investigación consistirá en llevar a cabo con un grupo de profesores el proceso de comunicación del escenario y puesta en escena de una situación didáctica, a través de los siguientes pasos: a) Realización de actividades dirigidas al conocimiento de la situación didáctica a reproducir, resolviéndola, discutiéndola, identificando dificultades al resolverla. b) Profundización en su contenido matemático y didáctico, para ello se sugerirá hacer una revisión amplia del contenido matemático de la situación profundizando hasta donde lo consideren necesario los profesores, así como discutir ampliamente la estructura de la situación. c) Identificación de los elementos que denotan la intervención del profesor en el proceso de adopción de la situación, propiciar que los profesores cuestionen la situación, señalando posibles errores, que valoren la viabilidad del propósito didáctico. d) Comunicar a los profesores el sentido de reproducir la situación. e)Identificación de los elementos que denotan la intervención del profesor en el proceso de preparación de la puesta en escena, este es el espacio donde el profesor puede hacer las modificaciones pertinentes a la situación en términos de las características de sus estudiantes. Experimentación y reporte de resultados: en esta parte se desarrollará una estrategia para poder seguir la dinámica de la clase, interacciones entres los estudiantes e interacciones con el profesor.

Esta investigación se encuentra actualmente en desarrollo y pretende continuar y profundizar la investigación sobre la reproducción de una situación didáctica (1999 a) y el papel que desempeña el profesor en la actividad de reproducir situaciones didácticas (1999 b). Para la reunión de Panamá estaremos condición de presentar resultados referentes a la comunicación del escenario de una situación didáctica.

Lezama, J. (a) (1999). Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN.

Lezama, J. y Rosa María Farfán M. (b) (1999) Papel del profesor en la actividad de reproducir una situación didáctica. *Resúmenes de la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. p. 159, Santo Domingo, República Dominicana.

---

* Este artículo forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología; Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado, Estudio sobre el Pensamiento y Lenguaje Variacional: 26345-S
** Becario de Conacyt

Introducción

La puesta en escena de *situaciones* didácticas en el medio escolar enfrenta problemas teóricos que requieren ser estudiados.

Es en la actividad poner en funcionamiento una situación didáctica con varios grupos de estudiantes donde se erige el problema, o fenómeno didáctico que se ha denominado con el nombre de *reproducibilidad*. Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica es establecer explícitamente los elementos que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la situación, al repetirla en distintos escenarios.

La investigación de este fenómeno adquiere especial relevancia en los propósitos de generar productos de enseñanza que puedan ser utilizados en el sistema escolar y en el desarrollo de la teoría, ya que nos permitirá identificar las principales variables a tomar en cuenta en una experimentación didáctica, con el fin de obtener cierto rango de estabilidad en los resultados, siendo éste un aspecto importante en la discusión teórica sobre lo que es o no es un resultado en matemática educativa.

Esta investigación se encuentra actualmente en desarrollo y pretende continuar y profundizar la investigación sobre la reproducción de una situación didáctica (1999 a) y el papel que desempeña el profesor en la actividad de reproducir situaciones didácticas (1999 b). Hasta el momento se ha desarrollado actividad experimental dirigida a observar la actividad de los estudiantes cuando se reproduce una situación, las dificultades de los estudiantes frente al contenido matemático, la estructura de la situación, la manera en que se gestiona la actividad de los estudiantes, las interacciones con sus profesores en este aspecto la literatura relacionada del tema de la reproducibilidad ha resaltado la importancia de la intervención del profesor en la actividad de llevar situaciones didácticas a diferentes escenarios. Es sobre la actividad del profesor que hemos centrado gran parte de nuestra atención, con el fin de analizar el papel mediador de éste y tratar de identificar aquellos elementos que le ayuden en el proceso de apropiación del contenido de las situaciones y para abrir una zona de intervención del profesor donde se adueñe de la situación entendiendo cabalmente su sentido y así permitir el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes con una intervención controlada por parte del maestro.

Para lograr lo dicho anteriormente, hemos precisado nuestra pregunta de investigación y los propósitos de la misma, así mismo señalamos aquellas nociones o categorías que será necesario construir o ampliar en base a experimentación y que nos permitan explicar de una mejor manera el significado de la reproducibilidad de las situaciones didácticas

Pregunta de investigación

¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar se reproduzcan, cuando la misma situación de clase es implementada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios?

Aquí es importante preguntarse por el término fenómenos, lo identificamos asociado con los siguientes asuntos: llegarán los estudiantes a las mismas conclusiones, tendrán los mismos problemas, los enfrentarán y salvarán de la misma manera. Se puede casi inmediatamente afirmar que no, pero la pregunta que surge tomando en cuenta las múltiples posibilidades de desarrollo de una actividad, cuáles son aquellos fenómenos susceptibles de reproducirse y que permitan el logro didáctico establecido para la situación.

Objetivos de la investigación

Para poder responder a nuestra pregunta nos proponemos:

- Identificar el tipo de fenómenos a reproducir en la puesta en escena de una situación didáctica y,

- Plantear un posible modelo, en términos de la actividad de la comunicación del escenario

Nuestra actividad de investigación centra su atención al establecimiento de los fenómenos susceptibles de reproducirse y probar experimentalmente que efectivamente lo hacen, para que con esta información, intentar crear algún tipo de modelo que pueda ser empleado en la actividad de llevarlo a otro escenario por uno mismo u otro profesor.

Fenómenos podemos esperar observar y describir

En términos de Brousseau (Artigue, 1995)

Identificar aquellos aspectos que determinan la reproducibilidad externa e interna.
Externa:

- Constituida por las producciones públicas del estudiante. Lo dicho y hecho en el desarrollo de la actividad.

Los autores están de acuerdo en que la reproducibilidad externa es la más común de lograr, hacer transitar a todos los estudiantes por las mismas actividades y lograr hacerlos llegar al mismo resultado por difícil que parezca, puede alcanzarse si bien de una manera artificial.

La parte más compleja es lograr la reproducibilidad interna, ya que involucra la construcción de significados y aprendizajes y para establecerlos se requiere de estrategias más finas para su detección y establecimiento; éstas se pueden detectar en los siguientes aspectos:

- El involucramiento del estudiante con la situación
- Identificación de sus contradicciones en el desarrollo de la misma
- Modo de convencerse de la corrección de sus resultados, es decir el aprendizaje del estudiante

En términos de Artigue (1984), se establece que:

- Debemos describir el tipo de fenómenos que necesitamos provocar y observar pero también las condiciones para su aparición
- Entre ellas está una precisa especificación del papel del profesor.

Es decir no basta con describir los fenómenos a repetir, sino que el estudio debe ser capaz de decir como provocarlos identificando las condiciones que los provocan.

En ese sentido, uno de los resultados más importantes en la tesis de Artigue, es el papel del profesor en el proceso de reproducir una situación didáctica, en muchos casos él es responsable de la reproducción o no de la situación didáctica

Aspectos relacionados con el análisis de la situación

Un elemento fundamental a establecer con el fin de reproducir una situación didáctica es identificar de manera precisa, los elementos que la componen, como se describe a continuación:

a) Contenido de la situación, en el que se identifica el propósito didáctico, el contenido matemático que se trabaja
b) Escenario de la situación: El escenario es una noción fundamental, pues contiene toda la información de la situación y por eso resulta indispensable su conocimiento para intentar reproducirla. Los elementos que componen el escenario son:

    - Estructura de la situación, en la cual se contempla el contenido matemático, los requerimientos matemáticos para poder desarrollarla, la modalidad como está estructurada la situación (resolución de un problema, secuencia de actividades, actividad dirigida por el profesor, etc.), establecimiento de las diversas vías de solución, establecimiento de lo que Artigue (1984) llama órbitas, que son como pequeños segmentos de desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes y que pueden ir cambiando para constituir las historias de clase, la identificación de la principal historia de clase, identificación de los puntos de desviación y bloqueo en la secuencia, etc.

- Actividades del estudiante, determinar cuál es el modo de participación del estudiante, las dificultades que enfrentará, las posibles salidas a esas dificultades.
- Actividades del profesor, determinar si el profesor dirigirá u observara la actividad de los estudiantes, el tipo de intervenciones que tendrá (preguntas, observaciones sobre el trabajo de los estudiantes), establecimiento de su actuación en la actividad de institucionalización.
- Tiempo asignado (de la clase y del año o semestre escolar), el aspecto del tiempo es importante pues según Artigue, el tiempo es uno de los factores que afectan en mayor medida la intervención del profesor, ya que si se está agotando el tiempo asignado para la actividad y los estudiantes no avanzan en la actividad, el profesor se siente obligado a intervenir.
- Organización social de la clase, en este caso debe establecerse si los estudiantes trabajarán individualmente o en grupos, o si habrá diferentes etapas, si discutirán el producto de su actividad con el grupo o con el profesor y las estrategias para validar los resultados.

Aspectos relacionados con la comunicación del escenario y aparición de la zona de intervención del profesor

A manera de hipótesis podemos decir que para comunicar una situación a otro profesor a fin de que la reproduzca poniéndola en escena, se deberá tomar en cuenta el proceso de adopción de la situación por parte del profesor, con ello quiero indicar que es necesario llevar al profesor a un alto nivel de familiarización con la situación, de tal forma que no le resulte ajena, de no ser así, la puesta en escena de la situación por parte del profesor resultará mecánica y con una baja probabilidad de obtener el logro didáctico esperado.

Como hemos dicho anteriormente para comunicar una situación a reproducir es necesario comunicar un escenario, pero la recepción de tal escenario no es pasiva por parte del profesor, cundo se inicia tal comunicación se entra que a un espacio que llamado la zona intervención del profesor, el interpreta desde su cultura matemática, desde su experiencia docente, desde su sistema de creencias. Él se adentrará en los aspectos que a continuación se indican y producirá modificaciones que deberán ser observables la dinámica de reproducción

+ Estructura de la situación
+ Contenido matemático
+ Naturaleza de las actividades
+ Claves de construcción de significados

El estudio de reproducibilidad de una situación didáctica deberá:

Establecer de manera amplia, ligas, interacciones y compatibilidad entre contenido y escenario.

Método a seguir

El desarrollo de mi investigación consistirá en llevar a cabo con un grupo de profesores el proceso de comunicación del escenario y puesta en escena de una situación didáctica, a través de los siguientes pasos:

- Realización de actividades dirigidas al conocimiento de la situación didáctica a reproducir, resolviéndola, discutiéndola, identificando dificultades al resolverla.
- Profundización en su contenido matemático y didáctico, para ello se sugerirá hacer una revisión amplia del contenido matemático de la situación profundizando hasta donde lo consideren necesario los profesores, así como discutir ampliamente la estructura de la situación.
- Identificación de los elementos que denotan la intervención del profesor en el proceso de adopción de la situación, propiciar que los profesores cuestionen la situación, señalando posibles errores, que valoren la viabilidad del propósito didáctico.
- Comunicar a los profesores el sentido de reproducir la situación
- Identificación de los elementos que denotan la intervención del profesor en el proceso de preparación de la puesta en escena, este es el espacio donde el profesor puede hacer las modificaciones pertinentes a la situación en términos de las características de sus estudiantes.
- Experimentación y reporte de resultados, en esta parte habrá que desarrollar una estrategia para poder seguir la dinámica de la clase, interacciones entre los estudiantes e interacciones con el profesor.

Referencias bibliográficas

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. Moreno, J. (1997) Un estudio didáctico de la función 2^x. *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Morelia, Michoacán, México.

Artigue, Michèle. y Robinet, J (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recrerches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), (pp.5-64).

Artigue, Michèle. (1984). *Contributions à l'étudede la reproductibilité des situations didactiques –Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'état. Université Paris VII. Sin publicar.

Artigue, Michèle. (1986). Ètude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recrerches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), (pp.5-62).

Artigue, Michèle. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 33-59). Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica.

Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. *(1992)* Teacher's role and reproducibility of didactical situations*. Educational Studies in Mathematics* ***23:*** *5 29.*

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, Sánchez, E. y Zubieta, B. G. (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa*. DME, Cinvestav-IPN. México. Traducción de: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques 7(2), (pp. 33-115), (1986).

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Edit. Aique. Argentina.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17, No. 3, pp. 17-54.

Espinosa Salfate, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "Límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos del estudio*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 18, No. 1, pp. 7-34.

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), (pp197-220).

Lezama, J. (a) (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN.

Lezama, J. y Rosa María Farfán M. (b) (1999) Papel del profesor en la actividad de reproducir una situación didáctica. *Resúmenes de la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. p. 159, Santo Domingo, República Dominicana.

Margolinas, C., Perrin-Glorian, M.J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. (Editorial). *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17, No. 3, pp. 7-16.

Mingüer, Luz María (1999) *Incorporación de las situaciones didácticas en la formación docente*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los Cursos Preparatorios al Cálculo

Ciria Salinas López, csalinas@mail.cinvestav.mx
Ricardo Cantoral Uriza,
ÁES - Matemática Educativa, Cinvestav - IPN
México

Es un hecho conocido que el cálculo diferencial e integral trata sobre el estudio de ciertos fenómenos de cambio. Las investigaciones recientes sobre aprendizaje del cálculo o del análisis matemático han centrado su atención en el esclarecimiento de las dificultades que muestran los estudiante cuando deben manejar objetos matemáticos como la derivada, la integral, el límite, la función o el número real.

En este escrito estamos interesados en mostrar nuestras exploraciones sobre cómo es que estos conceptos tienen un tratamiento preparatorio en los cursos de aritmética, álgebra, trigonometría, geometría analítica o propiamente de precálculo. Pues queremos entender cuales habilidades han sido potencialmente preparadas para iniciar con el estudio del cálculo. Se ha reportado que para iniciar con el cálculo se requiere de un rompimiento con los modos algebraicos de pensamiento y del desarrollo de ideas variacionales.

Por nuestra parte hemos puesto atención en el aprendizaje de los conceptos del cálculo bajo la consideración de que los procesos que en esa labor intervienen están ligados a la variación de diversos órdenes y al estudio de la evolución del comportamiento cambiante. Para ello hemos caracterizado algunos elementos que intervienen en la construcción de tales conceptos.

Inicialmente, nuestra tarea consistió en revisar la presentación que de algunas ideas variacionales hacían ciertos libros de texto paradigmáticos del precálculo, en esa etapa encontramos que aun desde la aritmética elemental aparecen ciertas ideas variacionales que serán posteriormente utilizadas, implícita o explícitamente en cursos posteriores, tales como la *seriación* y la *comparación*, por ejemplo se puede mencionar la distinción del tamaño de segmentos, tomando como referencia la cantidad de veces que cabe un patrón en cada segmento. De otra manera se podría considerar una comparación del tamaño si los segmentos se colocan en forma vertical uno detrás del otro.

Pensamos por ejemplo en colocar los segmentos en forma vertical. En esos casos, se suele hablar de "subir" o "bajar"; en caso de subir se asciende (aquí aparece una etapa primitiva de la noción de crecimiento utilizada en cálculo) de igual manera en caso de bajar, descendemos. Imaginemos ahora que colocamos el segmento más pequeño y luego colocamos segmentos más grandes alrededor de este, una vez colocados, iniciemos un análisis del tamaño comenzando desde la izquierda, entonces nos damos cuenta que íbamos descendiendo y en algún momento comenzamos a ascender, puede entenderse este segmento como el más bajo de los demás (en el sentido del cálculo se hablaría de un mínimo).

Otra tarea realizada en esta etapa fue la revisión de algunos textos de precálculo para observar cómo se presentan, en caso de que los consideren, aspectos que involucren nociones variacionales y cómo esas se llevan a la enseñanza. Un hallazgo importante fue el considerar por ejemplo que los problemas relacionados a máximos y mínimos pueden resolverse solo con cálculo haciendo uso de los criterios establecidos, sin embargo encontramos en el libro (Swokowski, 1997) algunos problemas de máximo en los cuales aparece como función un polinomio de grado dos y como sabemos este tipo de funciones tienen por gráficas a las parábolas, de modo que pueden abrir hacia arriba (en este caso se hablaría de un mínimo) o hacia abajo (un máximo).

Ahora una tarea pendiente consiste en analizar los libros de cálculo el tipo de funciones que aparecen en los problemas de optimización y tratar de explicar si en tales problemas se podrían determinar con precisión sus valores máximos o mínimos.

> *Un propósito del análisis de textos en diferentes niveles, es hacer un estudio de algunas nociones variacionales, identificar que hay ciertas nociones que pueden aparecer desde etapas tempranas y caracterizar como estas evolucionan en algún nivel, que se conserva de ellas o como se modifican a medida que se pasa de la matemática básica a la matemática universitaria.*

Problema de investigación

Una de las dificultades que tienen los estudiantes para aprender los conceptos del cálculo esta relacionada con la pobre o escasa evolución de ideas variacionales vistas desde la aritmética.

Antecedentes de nuestro estudio

Las investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo afirman que sus conceptos están ligados de algún modo a la noción de variación.

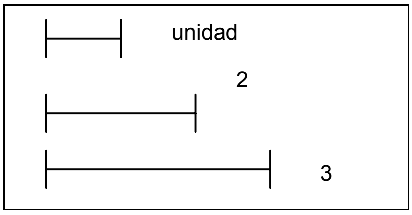
En el grupo de investigación del Área de Educación Superior se han tratado cuestiones del aprendizaje enfatizando fenómenos ligados al discurso matemático escolar.

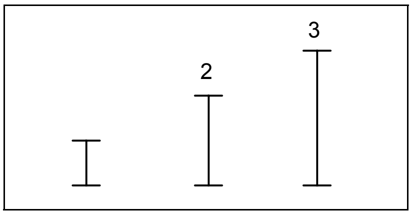
Se ha planteado también que para aprender los conceptos y procesos del cálculo se requiere que los estudiantes desarrollen el pensamiento y lenguaje variacional, por ello haremos una nueva caracterización que nos permita intervenir en el desarrollo de tales estrategias variacionales entre los alumnos.

Analizando textos de precálculo, hemos encontrado que aparecen ideas variacionales que son importantes en cálculo. Por ejemplo analicemos dos situaciones en donde se utiliza la idea.

<u>Álgebra (aritmética)</u>

Damos los números naturales 1,2 y 3 representándolos como segmentos.

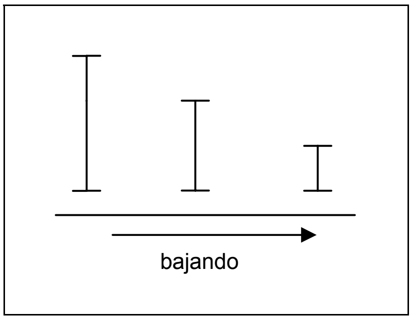




La unidad me indica que $3>2$
pues cabe más veces en 3

¿Qué me va ha indicar quien es más grande?

3 esta mas alto que 2
3 esta mas arriba que 1
$2<3$

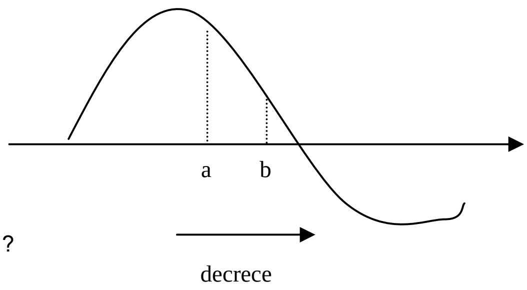


Cálculo

Dada la gráfica analizar:

¿Quien es mayor a ó b?

¿Quien es mayor $f(a) ó f(b)$?



Nuestra investigación ofrece un panorama general de algunas nociones de variación, en este momento abordamos la estrategia de comparación y analizamos el tratamiento que se le da en los textos de precálculo y como va evolucionando en los temas del cálculo y el análisis.

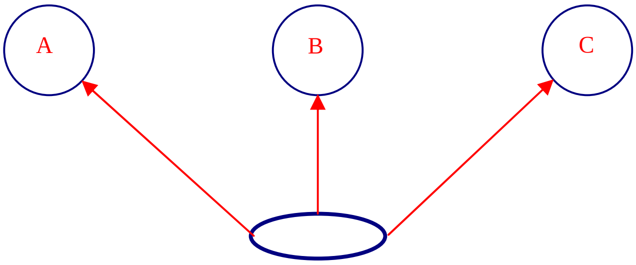
Todo esto tiene la finalidad de diseñar una secuencia (situación didáctica) que nos permita ver esta evolución.

Esta secuencia será implementada y analizada con estudiantes de tipo A, B y C.

A ⟶ Estudiantes de precálculo (aquellos que están por llevar cálculo).

B ⟶ Estudiantes de cálculo (aquellos que en su momento lleven cálculo).

C ⟶ Estudiantes de pos-cálculo (aquellos que hayan llevado cálculo y con la posibilidad de que lleven en ese momento otros cursos tales como ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, etc.).



Hipótesis:

Creemos que los estudiantes no desarrollan estrategias variacionales en sus clases de cálculo a causa de que no existe una verdadera evolución de las estrategias variacionales en el curso de su enseñanza, desde la educación básica hasta la superior, en la que se incluyan aspectos básicos de aritmética, geometría, trigonometría, analítica y estadística

Hoy día se sabe que hay estrategias consideradas como propiamente variacionales:

- *comparación*
- *predicción*
- *seriación*
- *estimación*

Nuestra investigación se centra en el estudio de una posible ruta para la evolución de una de dichas estrategias en la solución de problemas matemáticos adecuadamente elegidos

Problema de investigación: Una de las dificultades que tienen los estudiantes para aprender los conceptos del cálculo esta relacionada con la pobre o escasa evolución de ideas variacionales vistas desde la aritmética.

Objetivo: Identificar algunas causas que impidan la evolución de estas ideas.

Referencias bibliográficas

Baldor, A. (1985). *Álgebra*. Publicaciones culturales S. A. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, Núm. 42 / vol. *14*(3): 353-369.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*. España: Horsori.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamericano: México.

Lehmann, Ch. (****). *Geometría Analítica*. México: Editorial Limusa. ***Gómez, P. (ed.)*** (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

González R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría. Cinvestav IPN.

Miron, H. (1985). *Aplicaciones de la derivada a diferentes ramas de la ciencia*. Tesis de Maestría. Cinvestav IPN.

Rider, P. (1962). *Geometría Analítica*. España: Editorial Montaner y Simón.

Salinas, C. y Cantoral, R. (1999). Nociones variacionales en precálculo caracterizadas en cálculo. *Memorias de las Jornadas Estudiantiles 2000.* Cinvestav - IPN.

Saquimux, J. (1995). *Estudio exploratorio sobre el modelo de enseñanza habitual para resolver problemas de máximos y mínimos en cálculo diferencial.* Tesis de Maestría. Universidad de San Carlos de Guatemala.

Smith, S. et al. (1996). *Álgebra.* México: Adison Wesley Iberoamericana.

Swokoswski, E. & Cole, ?. (1997). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Diseño de Unidad Didáctica Integrada para un Curso de Calculo Diferencial con miras a incrementar el uso de patrones de razonamiento formal.

Carmen Morales de Mendoza
Departamento de Matemática
Universidad de Panamá

Resumen

En este trabajo se hace un estudio investigativo sobre el Uso de Patrones de Razonamiento Formal. Para ello se hace un tratamiento de los Patrones de Razonamiento Formal y la Teoría del Cálculo Diferencial. Se especifican las características más significativas de las variables de estudio. Se hace un análisis e interpretación de los resultados con respecto al Rendimiento Académico en relación con el Uso de los Patrones de Razonamiento Formal de los estudiantes de primer ingreso en las facultades de Arquitectura y Odontología.

Dicho estudio nos condujo a caracterizar una propuesta metodológica Diseño de Unidad Didáctica Integrada cuyo objetivo es incrementar el Uso de Patrones de Razonamiento Formal.

Introducción

En la actualidad la teoría del Cálculo es enseñada en casi todas las Facultades de la Universidad de Panamá. Hacen uso de esta disciplina las facultades del Área Científica, las Ciencias Económicas y Humanísticas.

En virtud de este aumento de carreras y licenciaturas que han incorporado en sus programas de estudio, cursos de Cálculo Diferencial e Integral, nos preocupa la calidad del aprendizaje de los conceptos y sus procedimientos ya que por su naturaleza estos son de carácter abstracto, para su comprensión se requiere un grado elevado de abstracción.

Igualmente nos preocupan las dificultades cognitivas que confrontan los estudiantes, ya que no han logrado el desarrollo de un razonamiento formal requerido para comprender los conceptos del Cálculo.

Tomando en consideración estos hechos, nos mueve el interés de realizar un estudio sobre el Uso de Patrones de Razonamiento Formal y diseñar una propuesta metodológica Diseño de Unidad Didáctica Integrada.

Justificación

La importancia de investigar sobre el Uso de los Patrones de Razonamiento Formal y como afecta esto, el rendimiento académico en un curso de Cálculo Diferencial se justifica con las siguientes situaciones:

- Cada vez van en aumento las dificultades para razonar con los conceptos del Cálculo Diferencial y resolver problemas con un sentido analítico, reflexivo, combinatorio.
- Se requiere proponer alternativas metodológicas que le permitan al estudiante la adquisición de los conceptos del Cálculo Diferencial y a su vez lograr el Uso de los Patrones de Razonamiento Formal.

El propósito de investigar esta temática, es la de lograr cambios significativos en los estudiantes en cuanto a su forma de pensar, de utilizar patrones de razonamiento formal, que le permitan solventar las dificultades que tengan al momento de resolver problemas de Cálculo Diferencial.

Objetivo General

Desarrollar un Diseño de Unidad Didáctica Integrada, para un curso de Cálculo Diferencial, con miras a incrementar el Uso de Patrones de Razonamiento Formal.

Marco Teórico

Hemos considerado tomar en cuenta para la fundamentación teórica de esta investigación, las ideas y conceptos tratados por Jean Piaget. Nos ayudarán a complementar esta fundamentación las opiniones y conclusiones a la que llegan Robert Karplus y Anton E. Lawson en su estudio investigativo sobre la Enseñanza de la Ciencia y el Desarrollo del Razonamiento.

Jean Piaget brinda explicaciones sobre el aprendizaje prestando atención a las operaciones cognitivas formalizadas en términos lógicos y en cuanto a los cambios que se producen en las formas de pensar del individuo, hechos que se dan en las respectivas etapas del desarrollo.

Piaget concibe que en la etapa de las operaciones formales el sujeto es capaz de:

- Operar con conceptos abstractos
- Razonar acerca de problemas hipotéticos y deducir conclusiones lógicas.
- Generalizar a partir de situaciones específicas
- Combinar juicios que se expresan por medio de las operaciones proposicionales.

Piaget, igualmente trata el tema de los conceptos científicos. Para su concepción toma en cuenta.

- La estructura lógica de los conceptos
- La adquisición de las formas generales del pensamiento operativo

Su concepción nos ayudó a clasificar en concreto y abstracto los conceptos del Cálculo Diferencial.

Robert Karplus, Anton E. Lawson estos autores comprueban las diferencias que existen en las habilidades de pensamiento de los estudiantes para comprender los conceptos científicos. Ellos introducen dos conceptos Patrones de Razonamiento y la Auto-Regulación, vista esta última como una estrategia de enseñanza – aprendizaje.

Para estos dos autores se denomina **Patrón de Razonamiento** al conjunto de procesos sucesivos continuos de pensamientos que se pueden identificar, reproducir y que el individuo utiliza para la realización de una tarea o problema definido.

Karplus y Lawson presentan los siguientes patrones con la finalidad de interpretar la conducta de los estudiantes.

F.1 **Razonamiento Teórico**: capacidad de entender conceptos en términos de otros conceptos, teorías, modelos idealizados o relaciones abstractas.

F.2 **Razonamiento Combinatorio**: capacidad de combinar juicios por medio de las operaciones proposicionales tales como la implicación, disyunción, exclusión.

F.3 **Razonamiento Funcional y Proporcional**: capacidad de reconocer, establecer e interpretar relaciones funcionales en términos matemáticos.

F.4 **Control de Variables:** capacidad de separar los efectos de distintas variables al variar solo una de ellas a la vez.

Las experiencias alcanzadas al dictar cursos de Cálculo Diferencial nos autorizan a señalar que para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de esta teoría se requiere de un dominio en el uso de los Patrones de Razonamiento Formal y reconocer la estructura lógica de los conceptos.

Procedimiento Metodológico

La investigación se ubicó en el marco de los estudios descriptivos, específicamente como una investigación diagnóstica. Nos apoyamos en el enfoque sistémico para el análisis de la situación problema y presentar una propuesta de solución.

Se tomó una muestra probabilística de más de 80 estudiantes reunidos en dos grupos: el de Arquitectura con una matrícula de 40 estudiantes y el de Odontología con 46 estudiantes.

Las variables que se manejaron en este trabajo de investigación son:

1. **Incrementar el Uso de Patrones de Razonamiento Formal:** Se entiende esta variable como el progreso en la utilización de los procesos mentales apropiados al pensamiento formal con miras a mejorar el rendimiento académico en un curso de Cálculo Diferencial.
2. **Rendimiento académico:** constituye el conjunto de procedimientos que caracterizan y distinguen las actividades u operaciones que deben realizarse para medir dicha variable.
3. **Diseño de Unidad Didáctica:** Se entiende el diseño de unidad didáctica como la propuesta de trabajo creativa, concreta, delimitada y con calidad, cuya finalidad es la de cubrir los contenidos de un módulo, integrados con Patrones de Razonamiento Formal.

Para la recolección de la información, utilizamos como instrumentos de medición dos pruebas escritas, una Diagnóstica y la otra Formal. La aplicación de ambas pruebas nos permiten detectar la frecuencia con que los estudiantes usan los patrones de razonamiento al resolver problemas de Cálculo Diferencial.

Resultados

De acuerdo a las Pruebas Diagnóstica y Formal, estas señalan que:

- El rendimiento académico de los estudiantes es **Deficiente,** es la categoría con mayor frecuencia, con 35 estudiantes que representan el 40.70% de la muestra.
- Los patrones de razonamiento menos utilizados por los estudiantes son Razonamiento Funcional y Proporcional (F.3) con 22 estudiantes que representan el 25.58% y el Razonamiento Teórico (F.1) en la categoría Reversiblidad con 15 estudiantes que representan el 17.44%
- La media aritmética que guarda relación con el Rendimiento Académico, para la Prueba Diagnóstica es de 29.82 y para la Prueba Formal 30.35, esto es indicativo de que la muestra está ubicada en la categoría **Puede ser mejor.**

Propuesta: Unidad Didáctica Integrada

Para solucionar la carencia o poco dominio en el Uso de Patrones de Razonamiento Formal, proponemos como mejor alternativa un modelo de Unidad Didáctica Integrada.

El modelo se fundamenta en argumentos de carácter **filosófico** (favorece el uso de patrones de razonamiento) **psicológico** (permite un aprendizaje basado en la teoría constructivista), **sociológico** (estimula la participación activa del estudiante), **pedagógico** (integra conceptos científicos con patrones de razonamiento).

Para conceptualizar el modelo le hemos atribuido las siguientes características: es integrado, flexible, funcional y operativo.

La Unidad Didáctica Integrada presenta los siguientes componentes:

- Introducción: para señalar su propósito, estructura lógica y carácter funcional.
- Modalidades de Integración: en base a conceptos y patrones de razonamiento, por áreas de conocimiento, por disciplinas.
- Objetivos Contenidos Conceptuales: se identifican los objetivos y contenidos determinando en forma ordenada las áreas de conocimiento.
- Estrategias Metodológicas: su función es la de especificar las orientaciones que se darán en las actividades de enseñanza- aprendizaje.
- Evaluación: las actividades de evaluación que se determinan deben valorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, el rendimiento académico, el uso de patrones de razonamiento y el uso de procedimientos de aprendizaje.

Conclusiones

Partiendo de las reflexiones efectuadas sobre las variables de estudio, llegamos a las siguientes conclusiones.

- El desempeño de los estudiantes muestra fuertes limitaciones en el Uso de Patrones de Razonamiento.
- Se requiere incrementar el Uso de Patrones de Razonamiento Formal, ya que los mismos constituyen la principal "abertura" para la adquisición de conceptos que están estructurados dentro de un sistema abstracto como lo es el Cálculo Diferencial.

Recomendaciones

Hacer efectivo el conocimiento y divulgación del modelo de **Unidad Didáctica Integrada** como una estrategia metodológica favorable que permite **incrementar** el uso de patrones de razonamiento formal en un curso de Cálculo Diferencial.

Referencias bibliográficas

Ander Egg, E. (1995) La Planificación Educativa. Editorial Magisterio del Río de la Plata. Colección Respuestas Educativas. Libro de Edición Argentina. Pp.298

Briones, G. (1995). Preparación y Evaluación de Proyectos Educativos Editora Guadalupe Ltda.. Santa Fé de Bogotá D.C. Colombia. Pp163

Castorina, J.A. et (1996). Piaget-Vigotsky: Contribuciones para Replantear el Debate. Editorial Paidos. Buenos Aires. Argentina pp139.

Gagné, R.M. (1977). Principios Básicos del Aprendizaje para la Instrucción Editorial Diana. México.pp200.

Leithold, L.(1973). El Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla, S.A. de C.V. México D.F. Segunda Edición pp1005

Levin, J. (1979). Fundamentos de Estadística en la Investigación Social. México: Harper & Row Latinoamérica pp 305.

Mendoza, C.E. (1986). Temas Matemáticos y su Relación con Patrones de Razonamiento. Apuntes Multigrafiados. Universidad de Panamá pp15.

Ontoria, A. (1996) Mapas Conceptuales. Una Técnica para Aprender. Editorial Narcea, S.A. de Ediciones Madrid. Sexta Ediciones Madrid. Sexta Edición pp203.

Pozo, J.I. (1993). Teorías Cognitivas del Aprendizaje Ediciones Morata S.L. Colección Psicologías Manuales. Segunda Edición pp254.

Evaluación del Pensamiento Lógico-Formal en Estudiantes de un Curso de Geometría Métrica.

Juan M. Nole, M en C.
jmnole@sinfo.net
CIMECNE, Universidad de Panamá
Panamá

Introducción:

Como en la formación matemática del alumno de una carrera de Licenciatura en Matemática se requiere que la metodología que se utilice en el desarrollo de cada curso, conlleve a desarrollar diferentes formas de pensamiento (análisis, síntesis, generalización, abstracción, concreción, comparación y particularización) se planteó la necesidad de una metodología de la enseñanza orientada en ese sentido, para impartir el curso de Geometría I (Geometría Métrica). Con el propósito de comprobar si esta metodología que se propuso fue apropiada para desarrollar el pensamiento lógico-formal, se aplicó un instrumento (test Tolt), que permitió evaluar la presencia del pensamiento hipotético-deductivo o lógico-formal al inicio y al finalizar dicho curso.

Objetivos:

Proporcionar un cambio en la enseñanza de la geometría a nivel superior que contribuya al desarrollo de las destrezas de pensamiento de los estudiantes.
Evaluar el pensamiento lógico-formal de los estudiantes de un curso de Geometría Métrica.

Metodología:

Al inicio del curso de Geometría I (Geometría Métrica), se aplicó el test Tolt a dieciséis (16) estudiantes y se obtuvo como resultado, que solamente dos (2) operan lógico-formalmente. Luego abordamos la problemática de la enseñanza del mismo curso de Geometría I para el desarrollo de las destrezas del pensamiento. Utilizamos como modelo Didáctico, Estremera [3], en el que se señala aspectos relevantes que contribuyeron al diseño de la Metodología de la Enseñanza en el curso de Geometría I para el desarrollo de las destrezas de pensamiento.

La planificación de la enseñanza del curso se hizo siguiendo los enfoques: larga y corta. La planificación larga es el Programa del curso de Geometría I y la planificación a corto plazo es la planificación por módulos del programa. En ese sentido el diseño del curso de Geometría I es consistente con los componentes de la planificación a largo y a corto plazo, según Estremera[3]. En el programa de este curso aparecen redactados objetivos de enseñanza para el desarrollo del pensamiento. Estos objetivos intruccionales incluyen el tipo de conducta que se pretende generar (destreza) y el contenido o situación en la cual se le aplica la conducta (concepto).
Además el diseño de estos objetivos incluye un verbo de acción que denota la destreza y el concepto. Al inicio del curso a cada estudiante se le entregó el programa correspondiente, para que sepan al inicio de cada clase el tipo de objetivo que deben alcanzar con el propósito de que una vez finalizada la clase pueda el alumno evaluar si lo logró o no.

Otro aspecto que se completó al planificar la enseñanza fue el de los métodos o actividades a ser utilizadas para lograr los objetivos de enseñanza. En esta parte del plan se incluyeron tipos de preguntas que se formularon en clase y la secuencia para desarrollar el concepto a través de destrezas.

Entre los métodos de enseñanza sistemática de las destrezas de pensamiento propuestos por Estremera en [3], aplicamos una combinación de dos de ellos (el método de enseñanza indirecta y el método de enseñanza directa).

La enseñanza indirecta del pensamiento va dirigida a que el profesor active el pensamiento en los alumnos por medio de formulación de preguntas, la cual permite, se desarrolle el pensamiento desde los niveles simples a los más complejos.

Formulamos preguntas oralmente y/o escritas en los exámenes parciales con el propósito de recibir una respuesta que con llevara a activar uno de los siguientes niveles de pensamiento: cognitivo-memoria y convergente.

Las preguntas cognitivas memorias fueron dirigidas a promover el nivel más simple del pensamiento. Este tipo de pregunta se hace con el propósito de que los estudiantes puedan recordar datos (terminología, formulas), medios (criterios y metodologías) y los fundamentos (axiomas o postulados, conceptos, proposiciones o teoremas y estructuras) más relevantes del curso de Geometría I. Las preguntas cognitivas memoria tiene como función el promover en los estudiantes que recuerden información esencial para desarrollar un concepto. Por lo tanto deben ir dirigida a que los estudiantes recuerden, definan, identifiquen, observen, nombren y describan información ya estudiada.

En base a lo anterior incluimos en las pruebas parciales las nociones o conceptos para que los alumnos los definieran, así como los teoremas, postulados, proposiciones, propiedades para ser enunciados.

Las preguntas tienen como finalidad, que el estudiante brinde contestaciones que lo lleven a relacionar datos medios (metodología) o conceptos y que les permita explicar estos últimos en sus propias palabras. A través de este tipo de preguntas es estudiante demuestra mayor dominio sobre el concepto de estudio debido a que puede relacionar ideas, y compararlas.

Además solicitamos a los estudiantes que expusieran las razones por qué son ciertas las aseveraciones dadas. Con este tipo de preguntas esperamos que el estudiante sea capaz de justificar mediante alguna argumentación no necesariamente una demostración, las afirmaciones propuestas.

Luego aplicamos el método de Enseñanza directa del pensamiento que persigue entrenar a los estudiantes en los atributos básicos de las destrezas del pensamiento (analizar, inferir, razonar, demostrar) y los métodos y técnicas más adecuadas para su ejecución, tales como:

- Modelar destrezas.
- Dar explicaciones.
- Orientar las actividades de los alumnos (trabajo individual y trabajo en grupo).
- Organizar sesiones de prácticas guiadas.

Para contribuir al desarrollo de las destrezas de pensamiento, presentamos también problemas y teoremas graduados en orden de dificultades en los ejercicios de prácticas. Por lo tanto en las pruebas parciales se incluyeron la resolución de problemas y la demostración de proposiciones o teoremas.

Al finalizar el curso se aplicó nuevamente el test Tolt a once (11) estudiantes y se obtuvo como resultado, que cuatro (4) de los estudiantes razonan a un nivel lógico-formal.
Se adoptó como criterio estipulado para asignar la presencia del nivel lógico-formal del pensamiento, que el 70% de la muestra opere en dicho nivel.

A continuación presentamos algunos criterios fundamentales con relación al procedimiento metodológico, utilizado en Montanari [4] para la aplicación del test Tolt.

"El Test Tolt, evalúa la presencia de cinco (5) esquemas de conocimiento a través de diez (10) problemas: dos (2) para cada operación o esquema.

Para considerar presente un esquema cognoscitivo particular, los dos problemas vinculados a él deben resolverse favorablemente. Tal resolución favorable incluye la selección correcta de la justificación pertinente. Si ambos problemas vinculados con un esquema en particular, son incorrectamente resueltos (respuesta y justificación incorrecta), se considera que la operación correspondiente aún no ha sido construida, por lo tanto se manifiesta la ausencia de esquema.

Si el sujeto resuelve adecuadamente sólo uno de los problemas vinculados a una operación, se considera que dicha operación se está construyendo, es decir se encuentra en etapa de transición.

Se adoptó el criterio según el cual tres (3) estructuras presentes y una (1) en construcción o transición son suficientes para estimar que el sujeto opera lógico-formalmente".

Según se observa en el segundo cuadro del Pre-Test y del Post-Test, el esquema de conocimiento más accedido con respuestas lógico formales presente, es el relacionado con el razonamiento combinatorio. Le siguen en orden de dificultades, el razonamiento proporcional; correlacional; control de variables y el razonamiento probabilístico.

Este orden de dificultad se observa en el cuadro número cuatro (4).

A medida que aumenta la edad, se observa en el cuadro número dos (2) del Post-Test, las siguientes tendencias:

1. Aumento del porcentaje de respuestas lógico-formales presentes correspondiente al razonamiento proporcional, hasta la edad de 19 años y luego se mantiene constante.
2. No hay respuestas lógicos-formales presentes, para el razonamiento probabilístico.
3. Aumento de las respuestas lógicos-formales presente correspondientes al razonamiento correlacional de los 17 a los 18 años y luego disminuyen a un valor constante.
4. Las respuestas lógicos-formales presentes correspondientes al razonamiento combinatorio, toman valores oscilantes.

En el cuadro número tres (3), se observa una tendencia de crecimiento, para después mantenerse constante, de la presencia de la estructura lógico formal de pensamiento, con el aumento de la edad.

Es importante señalar, que tanto en la prueba de Pre-Test, excepto en un caso, como la del Post-Test se observa que no hay ausencia de los cinco esquemas evaluados.

RESULTADOS DEL TEST TOLT

Resultados del Pre-Test

Cuadro N°1

TAMAÑO MUESTRAL DEFINITIVO SEGÚN EDAD							
Edades	17	18	19	20	21	22	23
Alumnos	2	6	2	3	1	1	1

Cuadro N°2

PORCENTAJES DE RESPUESTAS LÓGICO FORMALES PRESENTE EN LOS CINCO ESQUEMAS DE CONOCIMIENTOS SEGÚN LA EDAD							
Edades							
	17	18	19	20	21	22	23
Respuestas lógico formales presentes							

Proporcionales	50%	33.33%	100%	66.6%	100%	100%	0
Control de variable	0	0	0	33.3%	100%	0	0
Probabilidades	0	0	0%	0	0	0	0
Correlación	50%	33.33%	50%	66%	0	0	0
Combinatoria	50%	83.3%	100%	66%	0	100%	0

Cuadro N°3

PORCENTAJES DE PRESENCIA Y AUSENCIA DE LA ESTRUCTURA LÓGICO FORMAL DE PENSAMIENTO, SEGUN EDAD.							
Edades							
	17	18	19	20	21	22	23
Estructura lógico formal de pensamiento en estudiantes del turno diurno							
Presente	0	0	50%	33.33 %	0	0	0
Ausente	100 %	100%	50%	66.67 %	100 %	100 %	100 %

Cuadro N°4

PORCENTAJES DE RESPUESTAS LÓGICO FORMALES PRESENTES, SEGÚN ORDEN ASCENDENTE DE DIFICULTAD	
ESTRUCTURA	**PORCENTAJE**
Combinatoria	68.75%
Proporcionales	56.25%
Correlación	37.5%
Control de Variable	12.5%
Probabilidad	0%

Resultados del Post-Test

Cuadro N°1

TAMAÑO MUESTRAL DEFINITIVO SEGÚN EDAD				
Edades	17	18	19	20
Alumnos	2	5	2	2

Cuadro N°2

PORCENTAJES DE RESPUESTAS LÓGICO FORMALES PRESENTE EN LOS CINCO ESQUEMAS DE CONOCIMIENTOS, SEGÚN EDAD.				
Edades				
	17	18	19	20
Respuestas lógico formales presentes				
Proporciones	50%	60%	100%	100%
Control de Variable	0	0	50%	50%
Probabilidades	0%	0%	0%	0%
Correlación	50%	60%	50%	50%
Combinatoria	100%	80%	100%	50%

Cuadro N°3

PORCENTAJES DE PRESENCIA Y AUSENCIA DE LA ESTRUCTURA LÓGICO FORMALES DE PENSAMIENTO, SEGÚN EDAD							
	Edades						
	17	18	19	20	21	22	23
Estructura lógico formal del pensamiento en estudiantes del turno diurno							
Presente	0	40%	50%	50%			
Ausente	100%	60%	50%	50%			

Cuadro N°4

PORCENTAJES DE RESPUESTAS LÓGICO FORMALES PRESENTES, SEGUN ORDEN ASCENDENTE DE DIFICULTAD	
ESTRUCTURA	**PORCENTAJE**
Combinatoria	81.81%
Proporciones	72.72%
Correlación	54.54%
Control de Variable	18.18%
Probabilidad	9.09%

Conclusión:

Solamente cuatro (4) estudiantes de once (11), lo que equivale al 36% de la muestra, operan lógico formalmente y por lo tanto acceden al pensamiento lógico formal.

Al terminar el curso de Geometría Métrica con un enfoque axiomático formal, en el primer semestre del año académico 1998, los estudiantes a pesar de la formación adquirida, todavía presentaban dificultades en el razonamiento, donde había que hacer uso de operaciones tales como: correlación, control de variables y probabilidades. Por lo tanto el entrenamiento que adquirieron , en dicho curso no contribuyó lo suficiente para desarrollar los razonamientos mencionados. Sin embargo observamos un cambio positivo en el porcentaje de respuestas lógico formales presentes en el Post-Test con respecto al Pre-Test, lo que nos indica el efecto que haya podido tener el desarrollo del curso de Geometría I en el aumento de la presencia de niveles lógico formal del pensamiento.

Referencias bibliográficas

[1] BALLESTER Pedroso, Sergio y Otros. Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Ministerio de Educación de Cuba. Editorial Pueblo y Educación, 1992.

[2] CORREA GUZMÁN, Alberto. "Hacia la excelencia en la enseñanza de la matemática usando Pensamiento Crítico". Artículo publicado en la Universidad Interamericana de Puerto Rico, 1995.

[3] ESTREMERA, Rubén. "Enseñanza Orientada al Desarrollo del Pensamiento". Memoria del Séptimo Encuentro Nacional de Educación y Pensamiento. Universidad de Puerto Rico, 1995.

[4] MONTANARI, Maria Rosa. Estudio Descriptivo acerca de la Edad en la que el Adolescente Panameño accede al Pensamiento Lógico Formal. Ministerio de Educación, Departamento de Investigación y Diagnóstico, Panamá, 1992.

Influencia de la Percepción y Actitudes en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática

Lic. Massiel Sarasty
massielsarasty@mixmail.com
Depto. Matemática, CRU-Azuero, Universidad de Panamá
Panamá

Nivel Educativo Medio Básico y Superior

Definición del problema.

Tradicionalmente, las actitudes de los estudiantes hacia la matemática no han sido siempre las más favorables. Gran parte del estudiantado llega a esta asignatura condicionado desde el punto de vista emocional y del aprendizaje matemático. Es evidente que existe un problema en la educación matemática: cada año las estadísticas reflejan un creciente número de fracasos en matemática de los estudiante de colegios secundarios, en todo el país.

Justificación e importancia del estudio.

La problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática no es algo desconocido en la comunidad educativa panameña. A pesar de ello, no hemos visto un auge en investigaciones que estudien este problema en el contexto de nuestra población educativa. Todos tenemos distintas percepciones acerca de la matemática, percepciones que nos llevan a tomar ciertas actitudes hacia la misma.

¿Qué tanto pueden influir dichas percepciones y actitudes a la hora de estudiar o enseñar matemática?. Encontrar la respuesta al cuestionamiento anterior fue uno de los motivos de este estudio. Puesto que la problemática en la educación matemática existe y consideramos sería muy beneficioso para la solución del mismo investigar la relación que existía entre el aprendizaje-enseñanza de la matemática y las percepciones y actitudes que se tienen de ella.

Marco Teórico.

Síntesis comparativa.

Comparativamente, los resultados tanto porcentuales como los obtenidos por la estadística aplicada, se inclinan hacia la afirmación de la hipótesis de investigación. Si se observan los comportamientos de las variables, se pueden despejar los siguientes resultados significativos. Al hacer el estudio comparativo entre los dos grupos establecidos: el de estudiantes y el de profesores a los cuales se les aplicó los cuestionarios, puede observarse que existe una influencia de la toma de percepción y las actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En base a los resultados que arrojaron los distintos análisis de dicha investigación, podemos decir que a los estudiantes en su mayoría no les agrada la matemática, pues se les hace difícil su estudio. Un dato importante es el siguiente: un alto porcentaje de los estudiantes reprobados son los que respondieron estar expuestos a opiniones de persona que dicen que el estudio de la matemática es más difícil que el de otras asignaturas. Podemos decir entonces, que las opiniones negativa escuchadas por los estudiantes acerca de la matemática en cierta forma lo predisponen al fracaso en la asignatura. Los profesores que consideran que existe un rechazo hacia los profesores de matemática por parte de los estudiantes, no presentan buena disposición para enseñar matemática a sus estudiantes.

Definición del problema.

Tradicionalmente, las actitudes de los estudiantes hacia la matemática no han sido siempre las más favorables. Gran parte del estudiantado llega a esta asignatura condicionado desde el punto de vista emocional y del aprendizaje matemático.

El evidente que existe un problema en la educación matemática: cada año las estadísticas reflejan un creciente número de fracasos en matemática de los estudiante de colegios secundarios, en todo el país. Igualmente se nota cómo el producto que sale de la mayor parte de los centros educativos hacia las universidades, presenta deficiencias en el campo del razonamiento matemático. Todo esto lleva a los estudiantes que confrontan problemas en el aprendizaje matemático a desarrollar una "fobia" hacia esta materia.

La matemática es una asignatura cuyo aprendizaje requiere del estudiante, un nivel de atención especial y por ende, su enseñanza reclama niveles óptimos de operabilidad por parte del docente, quien influye grandemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Esta dificultad para llevar a feliz término el proceso de la enseñanza y del aprendizaje matemático, ha sido el motivo que nos ha impulsado a realizar este estudio, que se centra sobre la influencia de la percepción y actitudes hacia la matemática en la enseñanza y el aprendizaje de la misma.

Justificación e importancia del estudio.

La problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática no es algo desconocido en la comunidad educativa panameña. A pesar de ello, no hemos visto un auge en investigaciones que estudien este problema en el contexto de nuestra población educativa.

Siendo la enseñanza y el aprendizaje matemático puntos sumamente relevantes en la educación en nuestros colegios y que ellos generan diversos tonos y emociones cuando de sus dificultades se trata, ya sea al ser estudiada la materia o bien al ser enseñada.

Consideramos una importante y necesaria vía de investigación para indagar tanto al estudiante como el profesor.

Todos tenemos distintas percepciones acerca de la matemática, percepciones que nos llevan a tomar ciertas actitudes hacia la misma.

¿Qué tanto pueden influir dichas percepciones y actitudes a la hora de estudiar o enseñar matemática?.

Encontrar la respuesta al cuestionamiento anterior fue uno de los motivos de este estudio. Puesto que la problemática en la educación matemática existe y consideramos sería muy beneficioso para la solución del mismo investigar la relación que exista entre el aprendizaje-enseñanza de la matemática y las percepciones y actitudes que se tienen de ella.

Objetivos.

Toda investigación necesita plantear de manera precisa las metas a las que aspira llegar. En esta dirección los objetivos como intención, aspiración o metas a alcanzar juegan un papel decisivo.

Por lo expuesto, esta investigación plantea objetivos a dos niveles: generales y específicos, los cuales quedan declarados en los siguientes términos:

Objetivos Generales:

Hacer un estudio sobre la influencia de la percepción y actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Objetivos Específicos:

Explorar la variable afectiva y actitudinal de los estudiantes respecto a los profesores que enseñan matemática.

- Explorar la variable afectiva y actitudinal del profesor de matemática hacia el estudiantado.
- Determinar si la concepción que tiene el estudiante del profesor de matemática influye o no en el proceso de aprendizaje de la materia.
- Verificar si la concepción que tiene el profesor de matemática hacia sus estudiantes influye en la enseñanza de la misma.
- Diagnosticar las causas y orígenes de las distintas percepciones y actitudes hacia la matemática.
- Cuantificar las repercusiones de las distintas percepciones y actitudes de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
- Justificar la importancia de la percepción y actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Hipótesis.

Hipótesis de Investigación:

Hi: La forma de percepción y actitudes influyen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Hipótesis Nula:

Ho: La forma de percepción y actitudes no influyen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Limitaciones.

Durante esta investigación nos hemos enfrentado a diversas limitaciones como las siguientes:

- Poca bibliografía existente sobre el área de nuestro estudio.
- Factor tiempo, determinado por la cantidad de estudiantes encuestas en los distintos colegios.
- La tendencia del profesor a influir en las respuestas de los estudiantes.
- El temor de los estudiantes encuestados a contestar objetivamente algunas preguntas, porque su profesor tomara represalias contra ellos.
- Dificultad para el procesamiento de la información por la diversidad de respuestas de los estudiantes encuestados.

Marco Teórico.

Consulta de la Literatura.

Al llevar a cabo una revisión de la literatura referente a nuestro estudio, con la finalidad de verificar la existencia de algunos trabajos en la misma línea de nuestra investigación pudimos constatar que no hay escritos que enfoquen el problema en estudio desde la perspectiva que se requiere.

Existen muchas investigaciones que enfocan el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática sólo en los contenidos de la asignatura, sin tomar en cuenta otra parte importante de la problemática en educación matemática: la influencia de factores como la percepción y actitudes por parte del docente y el estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje de matemática. Conscientes del interés que este estudio presenta para la educación secundaria, se realizó una revisión exhaustiva a los trabajos efectuados en la carrera de Educación (Pedagogía), donde se observó que todos, en su mayoría, son orientados en forma general sin tomar una línea específica de la educación matemática.

Marco Metodológico.

Consiste en decidir y proponer una estrategia por medio del cual se pretende obtener los resultados requeridos en la investigación. Comprende decisiones sobre las personas en las cuales se hizo el estudio, la manera de recoger la información, de ordenar y analizar los datos.

Descripción del área de estudio.

El estudio se lleva a cabo en la provincia de Herrera con docentes y estudiantes de III año de educación secundaria de ocho centros públicos existentes.

Centro	Distrito
1. Colegio José Daniel Crespo	Chitré
2. Colegio Secundario de Monagrillo	Chitré
3. Primer Ciclo de Las Minas	Las Minas
4. Primer Ciclo de Los Pozos	Los Pozos
5. Colegio Rafael Quintero Villarreal	Ocú
6. Colegio Secundario de Pesé	Pesé
7. Primer Ciclo de Santa María	Santa María

Tipo de Investigación.

El estudio es de carácter explicativo porque intenta analizar muchas interrelaciones (entre las cuales tenemos las relaciones entre las variables: actitudes, percepción, enseñanza y aprendizaje). Además porque intentamos comprender el fenómeno de la problemática de la educación matemática desde una perspectiva personal y emocional tanto del estudiante como del educador.

Desde este punto de vista, la investigación procura comparar y correlacionar las consideraciones del docente y estudiantes en una asignatura crítica, como lo es la matemática.

Población y Muestra.

En toda investigación, es imprescindible determinar con exactitud la población objeto de examen que se tomará como marco de referencia para recoger la información necesaria.

En investigación, la población se define como: "Un conjunto de individuos que comparten por lo menos una característica.

Esto indica que el grupo seleccionado presenta características en común que pueden proporcionar informaciones que sirven como marco de referencia para comprobar las hipótesis planteadas.

En nuestra investigación, la población estudiantil de tercer año de los ocho (8) centros educativos escogidos de la provincia de Herrera, se cifra en mil doscientos veintidós (1222) unidades aproximadamente.

En vista de que la población resulta numerosa para nuestro propósito, se optó por el estudio de un tercio (1/3) de la población, que estadísticamente es significativa, y sus resultados pueden gozar de confiabilidad para explicar el comportamiento de la totalidad poblacional.

Técnica.

La técnica empleada en este estudio fue la encuesta.

Instrumento.

Por la naturaleza de este estudio se utilizó el cuestionario como instrumento para la obtención de los datos.

Resultados.

Con respecto a las respuestas del cuestionario tipo A para profesores de tipo B para alumnos, se observan las siguientes consideraciones:

1. En lo que concierne a la disposición tanto para aprender, como para enseñar matemática, ambos estamentos coinciden (el 60% de los profesores y el 57% de los estudiantes), que lo que lleva a no tener una buena disposición ya sea para aprender o para enseñar matemática, es la dificultad de enseñar o aprender ciertos temas debido a su contenido.
2. En cuanto a la falta de motivación, los profesores consideran que ésta se debe principalmente a condiciones del aula, clima y a la falta de materiales didácticos, coincidiendo con los estudiantes, lo que muestra las posibles causas de la falta de motivación por parte de los profesores y de los estudiantes por el estudio y la enseñanza de la matemática.
3. Un alto porcentaje de los profesores respondió que no les aburre enseñar matemática específicamente el 60% y el 40% respondió que casi nunca, porcentajes que demuestran el deseo de los profesores de enseñar la asignatura. Pero en el estamento de los educandos, tenemos que un alto porcentaje sí les aburre el estudio de la matemática. Se observa así una grave situación reflejada por las respuestas de ese cuestinamiento por parte de los estudiantes y su “aburrimiento” por el estudio de matemática.
4. Los profesores consideran que sí se preparan lo suficiente en su materia (100% respondió afirmativamente). Coincidiendo con los estudiantes (98%) quienes contestaron que consideran que su profesor conoce y se prepara científicamente en su materia. Por lo que podemos observar que no existen diferencias significativas de opinión con relación a ambas propuestas.
5. Refiriéndose a las causas del problema de la enseñanza-aprendizaje en matemática, los profesores consideran que éste se debe principalmente al poco tiempo asignado a las clases de matemática (60%) y a la falta de comprensión del estudiante (26.2%). Dejando ambos estamento evidencias de sus consideraciones, con respecto al problema de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
6. Los profesores no les desagradan las críticas y sugerencias de otras personas acerca de metodologías y formas y actitudes didácticas. De igual forma tenemos que el profesorado no le desagrada que le pregunten sus estudiantes, lo que muestra que el profesor de matemática en su gran mayoría, es una persona consciente de sus actos didácticos, debilidades y bondades.
7. Los profesores se consideran pacientes con sus alumnos y tratan de ocuparse de los alumnos con desventajas o con dificultad en la materia. De la misma forma que consideran inspirarle confianza a sus alumnos. Todo indica que el profesor de matemática pone empeño en su labor, para que sea bien recibida por sus alumnos.
8. Los profesores en su gran mayoría (70%) se desesperan cuando un alumno no progresa en clases, refiriéndose al dominio de sí mismo. Se manifiesta entonces que en esta situación, los profesores de matemática en su gran mayoría, son incapaces de dominarse y que a veces muestran un grado de desesperación.
9. Los estudiantes no les agrada la realización de tareas en casa, afirmación sustentada por un alto porcentaje de respuestas de comparación con las otras alternativas para escoger. En cuanto a las actividades que sugiere el estudiante, éste opina que debe

haber más participación de ellos en clase (44.5%) y también más explicación del docente (41.1%).

10. Los estudiantes consideran importante el estudio de la matemática. Unos creen que les ayudará para futuros estudios, otros consideran que su estudio les ayuda en su diario vivir, ya que la consideran parte de su rutina diaria al utilizarla para jugar, comprar y muchas otras actividades.

11. Un alto porcentaje de los estudiantes, el 66.9%, ha escuchado por las personas que le rodean (padres, vecinos, amigos, etc.) que la matemática es muy difícil con respecto a otras materias. Opinión que tienen de ella. Se observa así que existe una opinión negativa acerca de la matemática en el ambiente y que dicha opinión influye en el concepto que tienen los estudiantes de la materia.

12. Los estudiantes consideran que el profesor trata de mantener una buena relación con sus estudiantes. De igual forma los profesores consideran no establecer distancias marcadas en la relación con sus alumnos. Respuestas que coinciden y dejan evidencias de que los profesores de matemática en su gran mayoría ponen empeño en la eliminación de obstáculos, en crear las condiciones de un clima de trabajo favorable sobre la base de las buenas relaciones educando-educador.

13. Los profesores de matemática en su gran mayoría (60%) consideran recibir algún tipo de rechazo por parte de sus estudiantes, justificado (25%) y tolerado (15%). Todo indica que los profesores se sienten en muchas ocasiones rechazados, debiéndose tal vez al trato que se dispensa sobre ellos por parte de sus alumnos. Existe una concepción altamente negativa sobre cómo son tratados por sus alumnos, situación ésta que, ocasiona ciertos signos de malestar por parte de los profesores.

Referencias bibliográficas:

CANTORAL , R.. Pensamiento y Lenguaje Variacional en la Enseñanza Contemporánea. Resúmenes del Tercer Congreso Nacional de Matemática Educativa. Universidad de Panamá. 1999.

FREUDENTHAL, H. Problemas Mayores de la Educación Matemática. Estudios de Matemática Educativa. Vol 12. 1981

RAMÍREZ S., S.. La Profecía Autocumplidora en el Aula de Matemáticas. Memorias de la Décima Primera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 1997.

RICO, L.., Complejidad del Currículo de Matemática como herramienta profesional. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa (RELIME). Núm. 1. México ,1998.

Zona de Desarrollo Próximo y Mediatizadores en la Construcción del Conocimiento

Edwin Morera González
edwinmorera@yahoo.com
Universidad de Puerto Rico en Cayey
Puerto Rico

Introducción

El conductismo fue la fuerza dominante en la psicología estadounidense hasta la década del 1960, cuando el campo sufrió lo que ahora se conoce comúnmente como "la revolución cognoscitiva"(Good & Brophy, 1995). Las descripciones del aprendizaje como acondicionamiento de asociaciones y respuestas por medio del refuerzo dieron paso a los puntos de vista cognoscitivos que describían el aprendizaje como algo que implicaba la adquisición o reorganización de las estructuras cognoscitivas por medio de las cuales se procesa y almacena información. Actualmente las teorías cognoscitivas más populares son las llamadas teorías constructivistas, de las cuales el constructivismo socio cultural es el que más ha influenciado la educación.

Las ideas constructivistas sociales han sido influenciadas mucho por los escritos del psicólogo del desarrollo ruso, Lev Vygotsky(1962, 1978). Vygotsky sugirió que el aprendizaje procede de manera más eficiente cuando los aprendices son expuestos en forma consistente a la enseñanza en la *zona de desarrollo próximo*. La zona de desarrollo próximo se refiere a la extensión de conocimiento y habilidades que los estudiantes todavía no están listos para aprender por su cuenta pero que podrían aprender con ayuda de los profesores. Los aprendices ya conocen cosas que están "debajo" de la zona o pueden aprenderlas con facilidad por su cuenta sin ayuda. Sin embargo no pueden aprender cosas que están ″encima" de la zona, incluso con ayuda.

La teoría de la zona de desarrollo próximo se parece en algunas formas a las ideas conectadas con la noción de disposición para el aprendizaje (Good y Brophy, 1996). Sin embargo, la disposición es pasiva en sus implicaciones, sugiriendo que los profesores pueden hacer poco más que esperar hasta que los niños están listos para aprender algo (se presume que debido a la maduración de las estructuras cognoscitivas necesarias) antes de intentar enseñarlos. La teoría de la zona de desarrollo próximo asume que la disposición de los aprendices para aprender algo depende mucho más de su conocimiento anterior acumulado acerca del tema que de la maduración de las estructuras cognoscitivas y que los avances en el conocimiento serán estimulados sobre todo por medio de la construcción social que ocurre durante el discurso sostenido, más rápido por medio de la enseñanza en la zona de desarrollo próximo (Moll, 1990; Newman, Griffin y Cole, 1989; Rogoff y Wertch, 1984; Tharp y Gallimore, 1988; Wertsch, 1985, 1991; Wertsch y Tulviste, 1992).

Nuestro estudio tiene como base teórica la zona de desarrollo próximo. En éste pretendemos indagar sobre las ayudas que el maestro puede ofrecer al estudiante para que éste construya su conocimiento. Estas ayudas las definimos como mediatizadores y aprendizaje mediatizado al aprendizaje que se obtiene de éstas. Algunos autores piensan que el aprendizaje mediatizado sugiere un nuevo paradigma para la educación(Presseisen & Kozulin, 1992).

Los salones de clases son escenarios heterogéneos, podríamos decir que cada estudiante es diferente. El maestro cada día que presenta un material nuevo se enfrenta con esta realidad. Se encuentra con 30 estudiantes, todos diferentes, a los cuales se espera que le enseñe dicho material. Si entendemos que el estudiante construye su conocimiento y que esta construcción es más eficiente cuando trabaja en la zona de desarrollo próximo la labor del maestro, más que enseñar, es mediatizar el aprendizaje de los estudiantes. Obviamente para que tal construcción ocurra el estudiante tiene que tener el deseo(las ganas) de aprender y segundo tener las destrezas necesarias para tal construcción.

Preguntas de Investigación

Sin lugar a dudas son muchas las interrogantes que este tema plantea pero definitivamente no pudimos investigarlas todas. Las preguntas que guiaron este estudio son las siguientes:

1. ¿Cuáles son los mediatizadores necesarios para que el estudiante construya el conocimiento en matemáticas?
2. ¿Cómo ayudan los mediatizadores al proceso de aprendizaje del estudiante?

Metodología

El estudio fue uno descriptivo que utilizó la técnica conocida como estudio de casos. La participante fue una estudiante de 18 años que cursaba el cuarto año de escuela superior en un colegio privado de Puerto Rico y tomaba el curso de precálculo con el investigador. A la joven se le pidió autorización para participar en el estudio y se le hicieron los señalamientos pertinentes. La joven es una estudiante sobresaliente en todas las materias.

Los datos fueron obtenidos a través de la observación participativa, análisis de documentos y la entrevista mediatizada. La observación se llevó a cabo durante cuatro semanas en el salón de clases mientras la estudiante trabajaba en grupos, hacía la tarea del día e interactuaba con el maestro. La entrevista mediatizada se llevó a cabo luego de cada clase durante 10 a 15 minutos. Esta entrevista no es estructurada y en ella el entrevistador trata de ayudar al estudiante a comprender el material bajo estudio a la vez que obtiene información para la investigación, es por esta razón que la llamamos entrevista mediatizada. Los temas discutidos durante este periodo fueron funciones exponenciales, funciones logarítmicas, ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas y aplicaciones.

El análisis de los datos se llevó a cabo de la siguiente forma: los datos que se obtuvieron de las pruebas se analizaron utilizando el promedio. Los datos de las observaciones y las entrevistas se analizaron utilizando las técnicas propias para el análisis de datos cualitativos.

Hallazgos

El investigador pudo documentar cinco mediatizadores que permitieron a la estudiante aprender los temas discutidos. El primer mediatizador fue el *Modelamiento Cognoscitivo*, este se define como la verbalización abierta de las estrategias que utiliza el profesor o el estudiante para resolver cierto problema. En este contesto definimos problema como cualquier situación a la cual no se conoce un algoritmo para resolverlo, al momento que se conoce el algoritmo se convierte en ejercicio. Por ejemplo, el investigador explicó como se trazaba la gráfica de una función exponencial o como se resolvía una ecuación exponencial. Se requería que el estudiante no escribiera y solamente atendiera, entonces el investigador describía en voz alta lo que estaba pensando. Luego pedía que la estudiante resolviera un problema similar y que mencionara lo que estaba pensando.

El segundo mediatizador fue el *Apoyo Personal*, se refiere al elogiar al estudiante cuando estaba llevando a cabo un buen desempeño. Este apoyo fue esencial para que la estudiante profundizara el tema y lo comprendiera mejor. A continuación un diálogo entre el investigador y la estudiante que muestra este mediatizador.

Profesor: Vez que puedes lograrlo.
Estudiante: era que no había visto el error…ahora voy a tratar otro sin su ayuda.

El tercer mediatizador documentado fue *Focalización del Error*, se refiere a cuando el estudiante está cometiendo un error y no puede encontrarlo. En tal caso el investigador trata de focalizar la atención del estudiante al lugar específico donde se encuentra el error. A continuación un diálogo que lo muestra.

Profesor: …qué propiedad de los logaritmos utilizaste.
Estudiante: La segunda

Profesor:	Qué nos dice la propiedad.
Estudiante:	Que el logaritmo de un producto es la suma de logaritmos.
Profesor:	En este caso es el logaritmo de un producto.
Estudiante:	No… aaa…

El *Cuestionamiento Cognoscitivo* es el cuestionar al estudiante acerca de los temas discutidos, de tal manera reflexione sobre éstos y trate de conectarlos a otras situaciones.

Profesor:	Menciona un ejemplo donde creas que el crecimiento sea exponencial.
Estudiante:	Usted nos explicó que las infecciones son ocasionadas por bacterias y que éstas crecen exponencialmente.
Profesor:	Ese fue el ejemplo que utilizamos en clase pero podrías ofrecerme un ejemplo de tu vida diaria.
Estudiante:	Bueno yo creo que los conejos.
Profesor:	¿Porqué?
Estudiante:	Los conejos paren mensualmente y los que nacen este mes pronto comenzarán a tener más conejos.

El último mediatizador documentado fue el *Establecimiento de Principios o Generalizaciones*, estos ayudan al estudiante a conectar un tema con otro de tal manera que la construcción sea más profunda. Esto se puede hacer mientras se enseña un contenido o cuando el estudiante esta llevando a cabo una actividad.

Profesor:	La función logaritmo es la función inversa de la función exponencial, es por tal razón que si el $\log_2 8=3$ implica que $2^3=8$.
Estudiante:	Profesor, entonces la función exponencial es la inversa de la función logaritmo.
Profesor:	Si es cierto, porqué.
Estudiante:	El semestre pasado usted nos dijo que las inversas vienen en parejas…que una es la inversa de la otra.
Profesor:	Recuerda que al resolver las ecuaciones exponenciales puede encontrar dos casos, el fácil o el menos fácil. En el caso fácil trata de igualar las bases para aplicar la propiedad que le permita establecer una ecuación y en el menos fácil no se pueden igualar las bases por lo tanto aplicamos logaritmo en ambos lados de la ecuación.
Estudiante:	Este es el caso menos fácil, verdad profesor.

Conclusiones

Entendemos son muchos los mediatizadores que pueden ayudar al estudiante sobrepasar esos contenidos que por si sólo no podría hacerlo. En esta investigación fueron cinco los que el investigador pudo documentar con esta estudiante y en los temas discutidos. Entendemos que podríamos encontrar más si tratáramos otros temas y/o otros estudiantes. Estas ayudas cumplirán su cometido siempre y cuando estemos trabajando en la zona de desarrollo próximo. En este estudio la estudiante con la que el investigador trabajó era una estudiante sobresaliente en matemáticas y tenía los conocimientos necesarios para aprender los temas discutidos. Sería interesante investigar que encontraríamos si trabajáramos con estudiantes que no mostraran ser sobresalientes en el curso de la matemática. Además, será posible clasificar los estudiantes a partir de la zona de desarrollo próximo en que se encuentren, encontraremos mediatizadores diferentes según esta clasificación. Son interrogantes que faltan por contestar.

La forma en que los mediatizadores ayudaron al estudiante a aprender el objeto de aprendizaje es diferente para cada uno de los mediatizadores documentados, aunque en algunos casos uno complementa a otro. Al estudiante focalizar el error y corregirlo aprende el material, pero si además modela cognoscitivamente el error, la comprensión del material es más profunda. De esta forma la construcción del objeto de aprendizaje es más completa. Mientras, apoyar positivamente estimula al estudiante a tratar nuevamente, resolver problemas más complicados y de esta forma construir el objeto de aprendizaje.

Referencia

Good, T. y Brophy, J. (1996). Psicología Educativa Contemporanea, Quinta Edición. Longman Publishing Group, New York.

Moll, L. (Ed.). (1990). Vygotsky and education: Instructional implications and applications of sociohistorical psychology. Cambridge: Cambridge University Press.

Newman, D., Griffin, P. y Cole, M. (1989). The construction zone: Working for cognitive change in school. Cambridge: Cambridge University Press.

Presseisen, B. Z. y Kozulin, A. (1992). Mediated Learning: The Contribution of Vygotsky and Feuerstein in Theory and Practice. Office of Educational Research and Improvement. Washington, DC.

Rogoff, B. y Wertsch, J. (Eds.). (1984). Children's learning in the "zone"of proximal development. San Francisco: Jossey-Bass.

Tharpe, R. y Gallimore, R. (1998). Rousing minds to life: Teaching, learning, and schooling in social context. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1985). Vygotsky and the social formation of mind. Cambridge: Harvard University Press.

Wertsch, J. (1991). Voices of mind: A sociocultural approach to mediated action. Cambridge: Harvard University Press.

Wertsch, J. y Tulviste, P. (1992). L.S. Vygotsky and contemporary developmental psychology. Developmental Psychology, 28, 548-557.

Vygotsky, L. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes (editado por M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner y E. Souberman). Harvard Unicersity Press.

Cálculo Integral en Ingeniería: ¿qué entendemos por aplicaciones?

Víctor Martínez Luaces
victor@bilbo.edu.uy, victor@saddle.fing.edu.uy
Facultad de Química. DEQUIFIM. Universidad de Montevideo
Uruguay

Incidencia: enseñanza superior
Temática: Cálculo Integral

Resumen

Es un hecho señalado por varios autores, que la Matemática se aprende a través de la resolución de problemas. Si dichos problemas provienen de otras asignaturas o de situaciones de la vida real, entonces la motivación es mucho mayor para los estudiantes. Esto a su vez permite una valoración más positiva por parte de los mismos, en lo que hace tanto a la asignatura como al docente.

En este trabajo se discuten aplicaciones reales del Cálculo Integral, vinculándolo a problemas de otras asignaturas que integran la curricula de las carreras de Ingeniería. Estas aplicaciones y otras son presentadas habitualmente por algunos docentes. Otros en cambio, las evitan o al menos no las exponen frecuentemente. Se comparan aquí los resultados obtenidos por distintos docentes, basándose para ello en cuestionarios anónimos propuestos a estudiantes de la misma institución.

Estos resultados están en concordancia absoluta con los obtenidos en otros cursos de Matemática a nivel universitario tanto en el grado, como en el postgrado.

En base a todo lo anterior se formulan conclusiones que en principio pueden extrapolarse a otros cursos de Cálculo Integral en una variable.

Introducción

Habitualmente en los cursos en los que se dicta el Cálculo Integral en una variable, al finalizar la exposición teórico – práctica, tanto los profesores como la mayoría de los textos incluyen algunas aplicaciones ([1], [2] y [3]).

En la mayoría de los cursos esas aplicaciones son aplicaciones geométricas (área bajo la curva, longitud de arco, volúmenes de sólidos de revolución, etc.) y los ejemplos suelen ser áreas limitadas por parábolas y rectas, volumen de la esfera de radio R, longitud de un segmento de parábola, etc.

Estos ejemplos y aplicaciones de tipo geométricas tienen indudablemente cierta relación con algunos problemas de Ingeniería, pero no son precisamente aplicaciones ingenieriles que vinculen la Matemática con los problemas que se presentan en otras asignaturas y tampoco con las situaciones de la vida real y profesional.

Sin embargo, aún en cursos de primer año es posible presentar problemas reales, en versiones simplificadas, que permiten ilustrar la enorme aplicabilidad del Cálculo Integral en las carreras de Ingeniería. Para ello los pre – requisitos son mínimos en lo que hace a los conocimientos de Física, Química y materias afines, lo que facilita la exposición tanto para el estudiante como para el docente.

En el desarrollo de este trabajo vemos algunos ejemplos concretos y luego analizaremos algunos resultados obtenidos a partir de encuestas de evaluación docente realizadas en forma anónima entre los alumnos del curso de primer año a nivel universitario, en la Facultad de Química (Universidad de la República, Montevideo, Uruguay).

Algunos Ejemplos Concretos

1.- Cálculo de áreas.

La integral surgió como una respuesta al problema del cálculo de áreas que de alguna forma ya había sido estudiado por los griegos. En efecto, en el método de exhaución de Arquímedes [3] ya aparecían las ideas que luego con herramientas más poderosas, permitieron llegar al desarrollo actual.

Tal vez por ese motivo el cálculo de áreas suele ser la primera aplicación que se presenta en los cursos y en los textos ([2] y [3]).

Sin embargo, es mucho más interesante para un estudiante de Ingeniería, si el área a calcular tiene alguna conexión con el problema concreto. La corriente eficaz en un circuito de corriente alterna y el trabajo de expansión – compresión de un gas son dos claros ejemplos que vale la pena analizar.

a) Corriente eficaz en un circuito de corriente alterna.

Si una corriente continua de intensidad ip pasa por una resistencia de magnitud R, la potencia disipada es P = R ip2. Si dicha corriente pasa entre un tiempo inicial ti y un tiempo final tf , entonces la energía resulta:

$$\varepsilon = R\, ip2\, \Delta t \qquad \text{siendo obviamente} \quad \Delta t = tf - ti$$

Dicha energía coincide con el área bajo la curva de intensidad versus tiempo en el intervalo [ti , tf], ver por ejemplo Halliday – Resnick – Krane [4].

Si en lugar de una corriente continua se tiene una corriente alterna, de intensidad

$i(t) = i_p \operatorname{sen} \omega t$ entonces la energía vendrá dada por $\varepsilon = \int_{t_i}^{t_f} R^2\, i_p^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt$

y si se iguala con la energía correspondiente a una corriente continua de intensidad i_e (la intensidad eficaz), o sea:

$$R\, i_e^2\, \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} R^2\, i_p^2 \operatorname{sen}^2 \omega t\, dt$$

entonces se puede obtener la clásica fórmula $i_e = \frac{i_p}{\sqrt{2}}$ [5]

Para llevar a cabo lo anterior es necesario obtener la primitiva $\int \operatorname{sen}2\, \omega t\, dt$ que puede realizarse utilizando integración por partes o aplicando igualdades trigonométricas.

Una integral similar aparece en problemas elementales de oscilaciones forzadas [6] y cualquiera de estas opciones permite darle al tema un contexto más motivador que un simple cálculo de áreas. Es más, en general el estudiante llega de cursos anteriores manejando el concepto de intensidad eficaz, pero sin haber visto nunca una demostración de la fórmula antes mencionada. Esta es una excelente oportunidad para llenar ese hueco utilizando el Cálculo Integral.

b) Trabajo de expansión – compresión de un gas.

El trabajo de expansión – compresión de una gas viene dado por

$$W = \int_{V_i}^{V_f} PdV \qquad [7]$$

Lo que a su vez se puede obtener de la fórmula habitual de trabajo de una fuerza

$$W = \int_{l_i}^{l_f} Fdx$$

realizando simplemente un cambio de variable (y recordando que la presión representa la fuerza por unidad de superficie).

Si se trata de un gas ideal y el trabajo se realiza en condiciones isotérmicas y cuasiestáticas resulta

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \log \frac{V_f}{V_i} \qquad [7]$$

Este ejemplo permite trabajar con cambio de variables en un contexto diferente al habitual, más relacionado con los temas de la carrera.

2.- Longitud de arco de una curva.

Otra aplicación frecuente en los textos de cálculo es la obtención de la fórmula para la longitud del arco de una curva, la que luego se ejemplifica calculando longitudes de arcos de parábolas, circunferencias, cicloides, etc. ([1], [2] y [3]). Si bien es una aplicación interesante del punto de vista geométrico no queda bien claro la relación que pueda tener con los problemas de la vida real. Un ejemplo muy interesante que permite dar una aplicación más concreta es el que sigue:

c) Cable colgado:

Si se tiene un cable colgado entre dos postes (como un cable de transmisión de energía eléctrica) y el cable tiene una densidad lineal conocida *e* (por ejemplo en Kg/m) entonces eligiendo los ejes adecuadamente e igualando las fuerzas (peso y tensiones en los extremos del cable) resulta la ecuación:

$$y' = \frac{e}{T_1} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad [8]$$

que por derivación da

$$y'' = \frac{e}{T_1} \sqrt{1 + y'^2}$$

con las condiciones $y(0) = a$ e $y'(0) = 0$ que surgen de la geometría del problema y de la posición de los ejes.

Esta ecuación diferencial sencilla se puede resolver por variables separables, luego de hacer el cambio de variable $u = y'$ y el resultado es obviamente una catenaria.

Además de involucrar temas como Ecuaciones de Variables Separables, Condiciones Iniciales y Cambio de Variables en Ecuaciones Diferenciales (temas que pueden darse más adelante), en la deducción de la primera ecuación (es decir la que relaciona y' con una integral) se usan dos conceptos muy importantes: la relación entre la derivada y el coeficiente angular de la tangente a una curva y la fórmula de longitud de un arco de curva [8].

Estos dos conceptos geométricos ahora aparecen vinculados en un motivador problema de Estática.

3.- Cálculo de volúmenes de sólidos.

Una aplicación geométrica que aparece siempre en los cursos es el cálculo de volúmenes por secciones [2] que conduce a la clásica fórmula $V= \int_a^b A(x)\, dx$ donde A(x) representa el área de la sección perpendicular al eje Ox. Esta idea se puede ejemplificar pensando al volumen como un recipiente y la sección de área A(x) como si fuera el espejo de agua (ver el ejemplo del vaso clínico que presenta Stein [2] en su página 472).

Sin embargo, con muy poco esfuerzo más se puede usar esa misma idea para presentar un problema concreto de aplicación en Ingeniería, como es el vaciado de un tanque.

d) Vaciado de un tanque:

La velocidad con que sale un líquido (agua, por ejemplo) de un tanque con un agujero de área A_0 en su base es $v = \sqrt{2gh}$ donde g es la aceleración de la gravedad y h es la altura del espejo de agua. Esta ley, debida a Torricelli [8] sale de igualar las energías Cinética y Potencial Gravitatoria.

Si el espejo de agua tiene área A_e constante es fácil ver que se cumple la ecuación

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_e}\sqrt{2gh}$$

Si A_e varía con la altura h, entonces vale una ecuación similar

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_e(h)}\sqrt{2gh} \qquad [8]$$

cuya deducción utiliza las mismas ideas que para calcular volúmenes se sólidos, a los cuales se divide por secciones cuyas áreas dependen de la altura del corte realizado.

Además permite llegar a una interesante ecuación de Variables Separables y plantea un motivador problema de modelado.

Finalmente, se suele presentar la alternativa del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución por el método de las capas concéntricas [2]. Es interesante observar que la misma idea se utiliza en el cálculo de algunos momentos de inercia que se utilizan en cursos de Física.

Un ejemplo interesante es el siguiente:

e) Momento de Inercia de un cilindro respecto de su eje:

Una masa "m" que gira con velocidad angular "ω" a una distancia "y" de su eje tiene energía cinética igual a $\frac{1}{2}\, m\, (y\omega)^2 = \frac{1}{2}\, (my^2)\, \omega^2$ y se llama momento de inercia al coeficiente de $\frac{1}{2}\, \omega^2$, i.e., en este caso al número my^2. Se generaliza lo anterior a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i^2 \qquad \text{para n masas} \quad [1]$$

Un tratamiento similar puede verse en Feynman [9]

Ahora bien, si se trata de un cilindro de radio R, densidad e y altura h(o de un disco si el espesor es despreciable), entonces se puede calcular el momento de inercia, por el método de capas concéntricas, sin necesidad de utilizar integrales múltiples [10].

En este caso resulta:

$$I = \int_0^R 2\,\pi\, e\, h\, r^3\, dr = \tfrac{1}{2}\,\pi\, e\, h\, R^4$$

y las ideas que se utilizan son exactamente las mismas que en la deducción de la fórmula de volumen de un sólido de revolución [2], pero en un contexto más interesante y que sirve también para calcular centros de masa y otros problemas físicos [10].

Sin duda se pueden mostrar muchos más ejemplos, pero éstos bastan para ilustrar cómo utilizando las mismas ideas que se usan en problemas geométricos, se pueden dar verdaderas aplicaciones a la Ingeniería o a otras asignaturas como Física y Termodinámica.

Resultados Obtenidos

Algunos de estos ejemplos y otros que no fueron aquí mencionados se han utilizado en una experiencia con alumnos de diversas carreras, fundamentalmente Ingeniería Química, Ingeniería de Alimentos y Química Farmacéutica que comparten todos ellos un primer curso de Cálculo en una variable en la Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

A estos alumnos se les propone una evaluación docente en la que deben responder a un total de 25 preguntas y la misma se realiza bajo estrictas condiciones de anonimato. Más aún, los resultados se procesan por “scanneo” de respuestas, estando toda esa operación a cargo de funcionarios no docentes de la facultad [11].

De las 25 preguntas hay algunas que son particularmente importantes para este trabajo, estas son las que llevan los números 7, 11, 12 y 15, cuyo contenido es:
7.- Presenta ejemplos que ilustran adecuadamente los conceptos introducidos en el curso.
11.- Establece conexiones con los contenidos de otras asignaturas.
12.- Da a la asignatura un enfoque aplicado, ofreciendo ejemplos y aplicaciones a la vida real y profesional.
15.- Consigue que los alumnos estén motivados por la asignatura.

A su vez las respuestas se evalúan según la siguiente escala:

0	totalmente en desacuerdo
2.5	más bien en desacuerdo
5	indiferente
7.5	más bien de acuerdo
10	totalmente de acuerdo

y aquellas que son del tipo “no sabe/no contesta” no son computadas. Los resultados de toda la clase son promediados dando un número de 0 a 10.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos por 3 docentes diferentes en el mismo curso y en el mismo rol de profesor de teórico de Matemática de primer año para las carreras antes mencionadas. Los perfiles de los docentes son:

A Este docente posee formación en Matemática y en Ingeniería y en sus clases motiva la introducción de nuevos conceptos con problemas concretos de aplicación de acuerdo a lo que se propuso en los ejemplos anteriores.

B – Este otro docente también posee una doble formación como el anterior, pero su exposición es más tradicional y los problemas que dan origen a la introducción de los nuevos conceptos suelen ser problemas típicamente matemáticos. De todos modos, en ocasiones aparecen en la exposición referencias a problemas reales y/o de otras asignaturas.

C Este último docente tiene formación en Matemática y en Didáctica, pero no en Ingeniería o en áreas relacionadas y por lo general las motivaciones para presentar conceptos provienen de la propia Matemática.

A continuación se presentan los resultados obtenidos por los docentes A, B y C en las preguntas antes mencionadas

		Preguntas			
		7	11	12	15
Docentes	A	9.52	8.87	9.03	8.39
	B	8.00	7.50	6.44	6.50
	C	6.48	4.22	4.19	5.16

Resultados similares se han registrado en otras asignaturas y en diferentes años [11] y [12].

Conclusiones

Los estudiantes de Ingeniería suelen tener facilidad e interés por la Matemática, pero no desean ser matemáticos sino ingenieros. En función de ello, si bien es posible lograr cierto grado de motivación a partir de problemas "autocontenidos" (es decir, problemas puramente matemáticos), la motivación aumenta notoriamente si la Matemática aparece asociada a problemas reales de sus carreras.

Los resultados anteriores coinciden con lo obtenido en otras ocasiones mediante cuestionarios directos y entrevistas a expertos [13]. En efecto, se puede observar que al aumentar los ejemplos de aplicación concreta, también se incrementa la motivación y mejora la valoración que los alumnos realizan de los cursos, en lo que refiere a la utilidad de la Matemática para su formación.

Al plantear problemas reales de aplicación estamos haciendo intervenir tres elementos importantísimos: la resolución de problemas, el modelado y la recuperación de los escenarios en que los conceptos matemáticos fueron creados [14].

Respecto a la resolución de problemas, decía C. Gaulin que se puede enseñar para la resolución de problemas, a través de la resolución de problemas o sobre cómo resolver problemas. En trabajos anteriores vimos que los verdaderos problemas, tomados a veces de otras asignaturas y en ocasiones de la propia vida real, permiten hacer las tres cosas a la vez con el consiguiente beneficio [15].

En lo que refiere al modelado, para ver su importancia bastaría citar las palabras del actual Presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática, Dr. Carlos Vasco, que en la conferencia de clausura del décimo Congreso Inter Americano de Educación Matemática (X CIAEM) dijo: "...Por eso, una de las más importantes tareas de la Matemática del siglo XXI va a ser estar a la caza de situaciones reales en las cuales se empiece a notar un esquema que se repite y tratar de encontrarle el modelo matemático más ajustado..."

Finalmente, como se dijo en el Grupo de Trabajo sobre Enseñanza de Matemática en la Educación Superior, en Chile [14]: "es muy difícil poder enseñar temas como la ecuación del calor y su resolución, sin recuperar los escenarios en donde esos conceptos fueron creados". De igual modo resultaría muy complicado enseñar algo sobre la ecuación de ondas a un estudiante que nunca tuvo experiencias con fenómenos ondulatorios, o enseñar Cálculo Vectorial a un alumno que no sabe lo que es el Trabajo realizado por una fuerza o el Flujo de un Campo Eléctrico o de un Campo Magnético.

Muchos conceptos Matemáticos (por no decir casi todos) tienen una directa “correlación” con un problema Físico, Químico, Termodinámico, etc. y a menudo su creación fue motivada por dichos problemas. Resulta en cierto sentido “antinatural” pretender entonces sacarlos de ese contexto y que sin embargo los alumnos lleguen a comprenderlos cabalmente.

En definitiva, si no hacemos un auténtico esfuerzo por recuperar los escenarios, modelar matemáticamente situaciones reales y resolver verdaderos problemas, entonces solamente estaremos enseñando técnicas aisladas, previamente elaboradas por otros, con lo cual vamos a fomentar aún más la falta de creatividad y la dependencia.

Tenemos entonces que plantearnos claramente cual es nuestro objetivo, es decir, si buscamos obtener un profesional dependiente de la ciencia y la tecnología que viene del extranjero o un profesional creativo, audaz y seriamente capacitado para resolver los verdaderos problemas de su país.

Referencias bibliográficas

[1] Courant, R. y John, F. "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Vol. 1, primera edición, México (1993), Editorial Limusa S.A.

[2] Stein, S. K. "Cálculo y Geometría Analítica", tercera edición, España (1984), Editorial Mc. Graw Hill S.A.

[3] Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) "Análisis Matemático I", primera edición, Uruguay (1991), Oficina de Publicaciones del Centro de Estudiantes de Ingeniería.

[4] Halliday, D., Resnick, R. y Krane, K. "Física", Vol. 2, cuarta edición, México (1996), Compañía Editorial Continental S.A., Cap. 32, páginas 286-287

[5] Brophy, J.J., "Electrónica fundamental para científicos", edición en español, España (1974), Editorial Reverté S.A., Cap. 2, páginas 57-58.

[6] Crawford, F.S. "Berkeley physics course" , Vol 3, edición en inglés, EEUU (1968), Cap. 3, página 106.

[7] Resnick, R y Halliday, D. "Física", Vol. 1, edición en español, México (1992), Compañía Editorial Continental S.A., Cap. 23, páginas 515-516.

[8] Zill, D. "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado", México (1997), International Thomson Editores, páginas 24-25 y 237-238.

[9] Feynman, R. Y Leighton, R. "Física", Vol.1, edición en español (1987), Addison-Wesley Iberoamericana, Cap. 19, Sección 19-6.

[10] Kittel, C., Knight, W.D. y Ruderman, M.A. "Mecánica.Berkeley physics course", Vol. 1, edición en español, España (1996), Editorial Reverté S.A., Cap. 8 , página 253.

[11] Martínez Luaces, V. "Matemática como asignatura de servicio: algunas conclusiones basadas en una evaluación docente", *Números. Revista Española de Didáctica de Matemáticas* .Vol. 36, España ,1998, páginas 65-74.

[12] Martínez Luaces, V. "Dos visiones complementarias sobre la Enseñanza de la Matemática en las carreras de Ingeniería" *Conferencia de Clausura de la VIII EMCI (Encuentro Argentino de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería)*, Olavarría, Argentina, 1999.

[13] Martínez Luaces, V. y Casella, S. "La Educación Matemática en las diferentes ramas de la Ingeniería en el Uruguay hoy", *Memorias del II Taller sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura"*, La Habana, Cuba, 1996, páginas 386-391.

[14] Martínez Luaces, V., Díaz Moreno, L., Suárez, M., Lacués, E. y otros "Informe del Panel y del Grupo de Trabajo sobre Enseñanza de Matemática en la Educación Superior", *V Congreso de Didáctica de Matemática del Cono Sur,* Santiago de Chile, enero del 2000.

[15] Martínez Luaces, V. "Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas", *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 11)*, Morelia, México, 1997.

[16] Vasco Uribe, C. "Las Matemáticas Escolares en el año 2010" Conferencia pronunciada en la X CIAEM, Maldonado, agosto de 1999. *Boletín especial No. 1 de SEMUR (Sociedad de Educación Matemática Uruguaya)*, Uruguay, septiembre de 1999.

El Significado en Matemática: Un Problema Didáctico

Walter O. Beyer K.
wbeyer@ciiuna2.una.edu.ve, wbeyer@euler.ciens.ucv.ve
Universidad Nacional Abierta
Venezuela

Superior
Cálculo

Resumen

La comunicación en matemáticas presenta algunas de las características y problemas que acompañan o son intrínsecas a cualquier proceso de comunicación. Pero, tiene además algunos elementos que le son propios y que la diferencian de otros procesos de comunicación.

En años recientes, especialmente en esta década, se han incrementado los estudios acerca de la dinámica comunicacional en el aula. Esta afirmación puede ser constatada revisando los programas de los últimos congresos internacionales en didáctica de la matemática; los artículos de revistas especializadas, e INTERNET.

Un reflejo de esta situación, lo constituye el hecho de que en Los Estándares, el "Estándar 2" precisamente es "Matemática como Comunicación".

Existe, sin embargo, una línea de trabajo que se remonta a autores como Skemp, Glaeser y lingüistas como Halliday y Eco; la cual ha tenido continuidad a través de Pimm, Godino, Rico, Batanero y Gómez por citar sólo algunos.

Uno de los temas menos explorados es el del significado en el contexto del aula de matemáticas.

Remarcables son los aportes en esta dirección dados por Freudenthal, Kieren, Kaput, Filloy, Vergnaud, Pimm, Laborde, Skemp, Godino, Cobb, Bauersfeld, por citar sólo algunos.

En el estudio de esta temática confluyen varias disciplinas: la didáctica de las matemáticas, la matemática, la lingüística, las teorías de la comunicación, la psicología.

En la ponencia se presentan algunos antecedentes de esta problemática; se ejemplifican situaciones de aula; se esbozan algunos de los problemas asociados: la polisemia, la sinonimia; Se muestran algunos resultados de las investigaciones; y se delinean algunos temas de investigación junto con algunas herramientas que cabrían ser exploradas para atacar los problemas de esta área.

Se hace referencia a la complejidad que trae aparejada la interacción, en el aula de matemática, de un lenguaje (el lenguaje matemático) y un metalenguaje (el español). Se comentan, en particular algunas características del registro matemático del castellano.

Finalmente, también se discuten las implicaciones que están asociadas al significado y que tienen grandes repercusiones para el acto didáctico.

Desarrollo:

Halmos (citado por Callejo, 1994) afirmaba, refiriéndose a N. Wiener que:

hablaba maravillosamente -gramaticalmente, con palabras precisas y elegantes, casi con poesía- pero cuando se trataba de encadenar frases de una manera lógica y psicológicamente comprensible lo que producía era un caos.

Hemos comenzado esta ponencia con esta cita, por cuanto ella refleja -en esencia- el problema central del tema que nos ocupa: la comunicación y, muy particularmente el acto comunicativo en el aula de matemáticas.

Aunque dicha en otro contexto, la afirmación de Halmos -quien es uno de los grandes matemáticos del siglo XX- expresa de manera sucinta lo difícil que resulta la comunicación y ello particularmente cuando se trata del aula. Es precisamente ese el lugar en el cual es frecuente encontrar un proceso de comunicación plagado de ruidos, lleno de abusos de lenguaje, de sobreentendidos, contextos poco claros, y en fin, un sinnúmero de elementos que traen como resultado un discurso caótico y poco comprensible para el alumno.

El producto, en la gran mayoría de los casos, lo constituye un alumno con pocas competencias comunicativas en lo que a matemática se refiere.

La comunicación en matemáticas presenta algunas de las características y problemas que acompañan o son intrínsecas a cualquier proceso de comunicación. Pero, tiene además algunos elementos que le son propios y que la diferencian de otros procesos de comunicación.

Son de reciente data las preocupaciones por investigar a profundidad la dinámica comunicacional del aula de matemáticas. Puede situarse en las dos últimas décadas el período en el cual esta área ha tenido, a nivel de investigación, un verdadero impulso.

Remarcables son los aportes de Freudenthal, Kieren, Kaput, Filloy, Vergnaud, Pimm, Laborde, Skemp, Godino, Cobb, Bauersfeld, por citar sólo algunos.

Al respecto, Rojano (1994) señala que

> la nueva tendencia a relacionar el aprendizaje de la matemática con los procesos de adquisición y uso de dicho lenguaje [matemático], más que con su construcción concepto a concepto, conduce a reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y de los fenómenos que hay que observar en el campo de la investigación. [...] Por cierto que muchos de tales enfoques parten también de una visión constructivista del conocimiento matemático; lo cual quiere decir que la matemática como lenguaje no es necesariamente una concepción que se contraponga a las concepciones enraizadas en el constructivismo. (p. 46)

Este punto de vista (conciliar las visiones lingüística y la constructivista), es el adoptado por Vergnaud, (citado por Rojano, 1994, p. 47) quien afirma que "el conocimiento es activamente construido por el sujeto organizador quien, en un proceso adaptativo e interactivo con su medio ambiente, organiza su mundo de experiencias." Lógicamente, ese proceso adaptativo e interactivo con su medio ambiente ha de estar intermediado por un sistema comunicacional complejo, el cual obliga al estudiante a adquirir destrezas para leer y escribir matemáticas.

Cualquier proceso de comunicación esta centrado en el **signo**, elemento este que desde Saussure (1857-1913) se ha convertido en la unidad básica de análisis de lingüistas y semiólogos.

El **signo**, de acuerdo al punto de vista sausuriano, está conformado por dos elementos indisolublemente ligados: **el significante** y el **significado**.

En relación al **signo**, Eco (1988) afirma que

> un signo se explica en su propio significado solamente remitiéndolo a un interpretante, el cual se refiere a otro interpretante y así sucesivamente hasta lo infinito, estableciéndose un proceso de semiosis ilimitada, en el curso del cual el destinatario descodifica el signo originario sólo en aquello que le sirve para los fines de la comunicación emprendida, o de los usos de referencia a los que se pretende aplicarlo. (p. 174)

Así, hemos de recalcar que cualquier **código** o **lenguaje**[10] está basado en un conjunto de signos elementales o atómicos, los cuales constituyen su **alfabeto**, mediante el cual se construyen nuevos signos de mayor grado de complejidad (**supersímbolos)**, los cuales frecuentemente son llamados **palabras**.

Proporcionemos un ejemplo para ilustrar lo antes dicho. Consideremos como alfabeto el conjunto **A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}** y el sistema de numeración posicional de base diez que comúnmente usamos. Este sistema de numeración constituye un lenguaje cuyo alfabeto es el conjunto **A**. **12** y **45982** son **palabras** dentro de este lenguaje.

Algunas características **específicas** de este lenguaje son:

Cualquier palabra formada con este alfabeto está **bien formada**; esto es, posee "significado".

Se pueden crear infinitas palabras, por cuanto el conjunto de los números naturales es infinito.

No existe **sinonimia**. Es decir, no existen dos representaciones distintas (dentro del mismo lenguaje) las cuales posean el mismo significado.

Tampoco existe **polisemia**. Esto es, que una misma representación posea más de un significado.

Sin embargo, a la hora de enfrentar la actividad de aula, el proceso de comunicación empieza a ser muy complejo.

El **lenguaje natural** (el español, por ejemplo) actúa con una **función metalingüística**; es decir, un lenguaje que se emplea para describir y estudiar otro lenguaje. Así, por ejemplo, el profesor de matemáticas usa el español para enseñar matemáticas; mientras, que el de inglés emplea el castellano como metalenguaje para enseñar inglés. A este respecto Eco (1988) dice: "Hjelmslev explica la naturaleza de un metalenguaje, que es **una semiótica cuyo plano de contenido es una semiótica**". (p. 100)

Si miramos el aula de matemáticas, además este metalenguaje posee un **registro matemático**. Así, si hurgamos en cualquier diccionario de la lengua española podemos encontrar numerosos vocablos cuyo significado (o por lo menos uno de sus significados) es matemático. Así, tenemos que el vocablo **dos** es otra manera de representar la idea o significado encerrado en la representación **2**.

¿Qué ocurre con aquellas palabras del español que además de tener un significado matemático tienen otro(s) significado(s) en el lenguaje común? (e.g. función, matriz, cuerpo). Al ser usado uno de estos vocablos en un contexto escolarizado, ¿cuál significado le atribuirá el alumno: el significado matemático (el que pretende el profesor que sea evocado, construido o aprendido) u otro significado arraigado en él? ¿Qué ocurre cuando un objeto matemático posee más de una manera de ser representado? ¿Cómo maneja el alumno la sinonimia y la polisemia?

Todas estas interrogantes -y muchas más que podrían ser formuladas- son la base de una inmensa problemática, la más de las veces descuidada tanto por el docente como por los textos.

No en balde el proceso de creación de la simbología matemática fue un proceso largo y si se quiere hasta traumático, con avances y retrocesos. Así por ejemplo, la aceptación por parte de los matemáticos de los números negativos tardó siglos en producirse.

Tal vez estemos demasiado acostumbrados a escribir la matemática como se hace hoy en día, con la notación actual, y olvidamos que no siempre fue así.

¿Entendería usted la expresión matemática "12LM1QP48 aequalia 144M24LP2Q"?

---

[10] Usaremos aquí ambos términos como equivalentes, a pesar de que muchos autores establecen diferencias entre ambos.

Pero, ello no es todo:

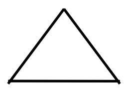
> otro rasgo que caracteriza el período histórico de la matemática, que tiene por escenario la India de los siglos V a XII: es la época que el historiador Smith calificó de `época de la poesía', pues esa ciencia se muestra revestida de un ropaje poético; todas las obras se escribieron en verso, y en ellas se usó un lenguaje metafórico que en especial se pone de relieve en el folklore matemático, donde se eligieron con preferencia aquellos temas que más se prestaban a ser expresados en forma poética. (Rey Pastor y Babini, 1985, p. 174).

A las anteriores interrogantes tendríamos que forzosamente agregar otra: ¿Cuál es el impacto de la tecnología en el simbolismo matemático? Por ejemplo, si tomamos una calculadora (claro esto dependerá de la marca y modelo) es posible que nos encontremos en alguna de sus teclas el símbolo π, y cuando lo activemos aparezca en pantalla **3.1415927** ¿Qué problemas didácticos podrían eventualmente aparecer en este proceso?

Analicemos un poco la situación dada: en primer lugar tenemos una expresión con un **número finito de decimales** como "equivalente" a π, lo cual puede inducir al alumno a establecer la igualdad **π=3.1415927**; pero, seguramente el docente ha insistido hasta la saciedad que **"pi es un número irracional y por lo tanto posee un desarrollo decimal ilimitado y aperiódico"**. Por otra parte, el resultado de la calculadora nos presenta un **punto** como **separador entre la parte entera y la decimal** de la expresión (a la usanza anglo-sajona), lo cual se contrapone a al norma de nuestra cultura hispánica de emplear a tal fin una **coma**.

Nótese que hemos presentado un ejemplo de la cotidianidad que además es muy sencillo, pero que puede encubrir verdaderos dolores de cabeza al docente si este no trabaja con cuidado estas situaciones y, si permanentemente no realiza las aclaratorias necesarias.

El proceso de representación en matemáticas es harto complejo y está lleno de **"representaciones prototípicas"**, las cuales van acompañadas -aunque el docente no se percate de ello- de significados secundarios, que cual una rémora impiden la cabal comprensión de muchos conceptos. A título de ejemplo, mencionemos la forma en que usualmente se representa el triángulo:

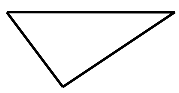


Como podemos observar, a primera vista este tipo de representación pareciera totalmente normal. Es digámoslo así la usual. Casi nadie se atrevería a decir que tiene algo de malo representar el triángulo de esa manera. Sin embargo, si miramos con cuidado, notamos que el triángulo semeja a uno isósceles: pero ésta es una característica adicional que sólo la poseen ciertos y determinados triángulos, no un triángulo cualesquiera. Por otra parte, uno de sus lados yace paralelo a la línea del suelo, lo cual tampoco es una característica intrínseca al concepto de triángulo. Además, sólo están señalados sus lados, mientras que su interior parecería vacío: es decir, el objeto triángulo está representado sólo por tres lados.

Estas características, a las que hemos aludido, parecen o pudieran parecer intrascendentes. No obstante pueden tener un impacto didáctico inmenso.

Si se dibuja un triángulo con los tres lados desiguales (triángulo escaleno), muchas personas al enfrentar a este objeto no se sienten cómodas con él.

No es poco frecuente encontrar un alumno para el cual la siguiente figura no sea un triángulo



pues ésta está colocada de punta y "si siempre los triángulos descansan sobre un lado, entonces algo que descanse sobre un vértice no será un triángulo."

Pero, la tercera característica que mencionamos tiene aún visos de mayor gravedad. Es usual la queja que los estudiantes confunden círculo con circunferencia, y tratamos de evitar tal confusión rellenando el interior del círculo, coloreándolo o rayándolo. Pero, no se mantiene este convenio con el triángulo. Entonces, ¿cuál es el significado que le atribuye el alumno a la solicitud del docente de calcular el área del triángulo? Obviamente, la única respuesta posible es la **aplicación mecánica de una fórmula (vacía de significado)**.

Si duda de lo que decimos, haga la prueba: pídale a diversas personas que dibujen un triángulo y observe qué producen.

Sin embargo, los problemas lingüísticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática no terminan aquí. Un área de la matemática, realmente crítica al respecto, lo constituye el álgebra.

Es traumática la forma en que los alumnos se ven obligados a manipular símbolos "vacíos de significado". Encomillamos la frase anterior por cuanto queremos destacar que el alumno, de alguna manera, le atribuye significados -extraídos las más de las veces- de sus experiencias anteriores, con la aritmética por ejemplo.

Es común encontrar errores como:

$$sen(x+y)=senx+seny.$$

Aquí, simplemente el alumno ha distribuido los símbolos que se encuentran fuera del paréntesis: mientras que para el docente sen represente un sólo símbolo que encierra la idea de una función trigonométrica, para el alumno sen es una simple concatenación de tres letras (s e n) y la concatenación a él se le ha recalcado que significa producto; y algo que multiplica a un paréntesis se distribuye.

Utilizamos (por economía) el mismo signo, +, para cualquier operación aditiva: sea ésta de números o vectores. ¡incluso dentro de una misma actividad!

No es difícil esperar entonces el gran cúmulo de malentendidos reportados en la literatura.

La dinámica del triángulo didáctico (saber-docente-alumno) está indudablemente intermediada por factores cognitivos y lingüísticos.

Un acercamiento al estudio de esta problemática puede ser hecho mediante el supuesto de negar la existencia de significados absolutos y que éstos dependan de la representación particular que se emplee. Podríamos ejemplificar esto a través del concepto de fracción: se conocen muchas formas de representarlas (tortas, material concreto, símbolos) o de interpretar el concepto (parte-todo, cociente indicado, razón, operador) a cada una de las cuales se le puede asociar un significado.

Hay autores como Kirshner que han empleado como base teórica los estudios de Chomsky para estudiar el lenguaje algebraico.

Otros trabajos como los de Beyer (1994) se apoyan en gran medida en el modelo comunicacional de Roman Jakobson y la teoría del signo de Saussure, conjugados con algunos elementos de la semiótica de Umberto Eco.

Rojano (1994) manifiesta que

> las variaciones que se observan en este panorama de investigaciones, por un lado obedecen a que las bases teóricas de éstas se corresponden con diferentes corrientes o escuelas de la psicolingüística y, por otro, son **una manifestación de la ausencia de un paradigma teórico para el estudio del sistema matemático de signos que**

> **abarque sus aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales**. [negrillas añadidas] (p. 54)

Por su parte, Godino y Recio (1998) señalan que "se debería progresar en el desarrollo de una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos." (p. 1).

Sin embargo, la creación de un paradigma teórico pasaría por el controvertido tema de definir qué es el significado. Este ha sido un tema elusivo incluso dentro de la semiótica general. A este respecto, la autorizada opinión de Ullmann (1976) nos dice:

> El "significado" es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje. En **The Meaning of Meaning**, Ogden y Richards recogieron no menos de dieciséis definiciones de él -veintitrés si se cuenta separadamente cada subdivisión-. Desde entonces, muchos nuevos usos, implícitos o explícitos, se han añadido a esta formidable fuente de ambigüedad, y en opinión de algunos tratadistas el término se ha vuelto inutilizable para los propósitos científicos." (p. 62)

No obstante, Godino y Batanero (1998) afirman: "creemos con Rotman (1988) que es posible y deseable desarrollar una semiótica específica de las matemáticas". (p. 1)

Respecto del significado Eco (1972) nos dice que

> desde el punto de vista semiótico [el significado de un término] no puede ser otra cosa que una **unidad «cultural»**. En toda cultura una «unidad» es, simplemente, algo que está definido culturalmente y distinguido como entidad. Puede ser una persona, un lugar, una cosa, un sentimiento, una situación, una fantasía, una alucinación, una esperanza o una idea. (p. 82)

Y más adelante agrega:

> Reconocer la presencia de estas unidades culturales (que más tarde serán los significados que el código hace corresponder con el sistema de los significantes), equivale a entender **el lenguaje como fenómeno social**. [Negrillas añadidas] (p. 83)

Mientras que Eco hace su observación en relación al lenguaje en general, para los constructivistas el significado es producto de un proceso de negociación el cual conduce al consenso y que éste no puede ser transferido de una persona a otra.

Para finalizar citaremos la opinión de Morris (1974) quien afirma que "el rasgo más sobresaliente de la investigación desarrollada en el campo de la Semiótica durante los últimos años ha sido el gran interés que se advierte por la diversidad de dimensiones de la significación y por la variedad de usos que desempeñan los signos." (p. 33).

Bibliografía

Beyer, W. (1994). **El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula**. Trabajo de Grado de Maestría, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas.

Beyer, W. (1998A). **La interacción comunicativa en el aula de matemática y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje**. Conferencia Paralela, III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas, 26 al 31 de julio.

Beyer, W. (1998B). **Una posible caracterización del lenguaje matemático y su repercusión en la dinámica comunicacional del aula**. Ponencia presentada en el Grupo de Trabajo "La Comunicación en el Aula", III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas, 26 al 31 de julio.

Callejo, Mª L. (1994). **Un club matemático para la diversidad**. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Chomsky, N. y Miller, G. (1976). **El análisis formal de los lenguajes naturales**. Madrid: Alberto Corazón Editor.

Eco, U. (1972). **La estructura ausente: Introducción a la semiótica**. Barcelona, España: Editorial Lumen.

Eco, U. (1988). **Signo**. Barcelona, España: Editorial Labor, S.A.

Godino, J. y Batanero, C. **El significado de los objetos matemáticos como unidad de análisis en didáctica de las matemáticas**. [Online] Available http://dalila.ugr.es/~jgodino/Osnabruk.htm. Enero, 1998.

Godino, J. y Recio, A. **Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática**. [Online] Available http://dalila.ugr.es/~jgodino/pme22.htm. Enero, 1998.

Morris, C. (1974). **La significación y lo significativo**. Madrid: Alberto Corazón Editor.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1985). **Historia de la matemática (Vol. 1)**. España: GEDISA.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. **Enseñanza de las Ciencias**. **12**(1), 45-56.

Saussure, F. de (1977). **Curso de lingüística general**. Buenos Aires: Editorial Losada, S.A.

Ullmann, S. (1976). **Semántica: Introducción a la ciencia del significado**. Madrid: Editorial Aguilar.

Vigotsky, L. S. (1998). **Pensamiento y lenguaje**. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

GEOMETRÍA DE PAPEL:
Una experiencia de uso de materiales matemáticamente potentes

Fredy E. González, fgonzalez@ipmar.upel.edu.ve
Universidad Pedagógica ExperimentalLibertador
Venezuela
Juan Vargas Brito
Escuela Básica e Industrial "Don Orione", Santiago
Chile

Educación Matemática; Enseñanza de la Geometría.

Resumen

En este trabajo se hace el relato de una experiencia llevada a cabo con estudiantes chilenos de educación básica con quienes se ensayó un Material Matemáticamente Potente para reforzar el conocimiento de conceptos geométricos básicos. Dicho material consistió en una hoja blanca de papel bond, tamaño carta (21,59 cm x 27,94 cm) a la cual se le aplicó una serie de acciones de doblado y rasgado llevadas a cabo siguiendo una secuencia de pasos explícita y previamente indicada a los alumnos. En el artículo se presenta el concepto de Material Matemáticamente Potente, la secuencia de pasos seguida y el reporte de respuestas proporcionadas por los estudiantes que intervinieron en la experiencia, la cual: (a) resultó ser motivadora; (b) permitió la aclaratoria de conceptos geométricos elementales; (c) hizo posible la introducción de conceptos geométricos nuevos; y, (d) posibilitó la relación entre Geometría, Algebra y otras áreas de la Matemática. El trabajo culmina con la proposición de recomendaciones para asegurar que tengan éxito los docentes que decidan replicar la experiencia que aquí se reporta.

Introducción

En el enfoque tradicional de la enseñanza de la Matemática, el papel del profesor se reduce a explicar el contenido previsto para cada clase, asignar los ejercicios a realizar y pedirle a los alumnos que trabajen; raramente utilizan otro recurso instruccional que no sea el libro de texto, la tiza o el borrador. Los alumnos se mantienen prácticamente atados a sus pupitres, no se les permite moverse alrededor, y mucho menos fuera, del aula de clases, ni que discutan con sus compañeros la actividad que realizan. En este caso, el docente: es considerado como la autoridad; hace la planificación; toma las decisiones; evalúa los esfuerzos de los estudiantes; y asume la responsabilidad del aprendizaje.

Con el fin de superar las insuficiencias del enfoque antes descrito, se ha comenzado a investigar el desarrollo de una enseñanza de la Matemática basada sobre las investigaciones y descubrimientos personales de los propios estudiantes. Se cree que estas investigaciones serán mucho mejores que los métodos de enseñanza tradicionales para: (a) generar entusiasmo y confianza en la Matemática; (b) enseñar a los estudiantes a usar su propio ingenio; y (c) relacionar las ideas y símbolos matemáticos con objetos reales.

Entre las opciones que se ensayan está la utilización de Materiales Matemáticamente Potentes (González, 1998), es decir, artefactos manipulables mediante los cuales los estudiantes exploran ideas matemáticas; las actividades pueden llevarse a cabo en un rincón del aula de clases; en un aula entera; un rincón en una biblioteca; un salón especial en el edificio de una escuela; o, un ambiente fuera de la escuela. Lo fundamental no es el ambiente físico sino el enfoque que se aplica al contenido matemático, según el cual los estudiantes aprenden Matemática mediante la exploración de conceptos, el descubrimiento de principios, o la aplicación de abstracciones matemáticas en situaciones concretas. De este modo los estudiantes adquieren destrezas, desarrollan habilidades, aprenden conceptos y principios matemáticos, llevando a cabo actividades manipulativas con objetos físicos y modelos matemáticos.

En este trabajo se hace el relato de una experiencia llevada a cabo con estudiantes chilenos de educación básica con quienes se ensayó un Material Matemáticamente Potente para reforzar el conocimiento de conceptos geométricos básicos. Dicho material consistió en una hoja blanca de papel bond, tamaño carta (21,59 cm x 27,94 cm) a la cual se le aplicó una serie de acciones de doblado y rasgado llevadas a cabo siguiendo una secuencia de pasos explícita y previamente indicada a los alumnos. En el artículo se presenta el concepto de Material Matemáticamente Potente, la secuencia de pasos seguida y el reporte de respuestas proporcionadas por los estudiantes que intervinieron en la experiencia, la cual: (a) resultó ser motivadora; (b) permitió la aclaratoria de conceptos geométricos elementales; (c) hizo posible la introducción de conceptos geométricos nuevos; y, (d) posibilitó la relación entre Geometría, Álgebra y otras áreas de la Matemática. El trabajo culmina con la proposición de recomendaciones para asegurar que tengan éxito los docentes que decidan replicar la experiencia que aquí se reporta.

Ideas Básicas Acerca de los Materiales Matemáticamente Potentes

Muchos profesores de matemática sostienen la creencia de que sus clases serían mejores si utilizaran materiales sofisticados. Algunos de ellos piensan que para hacer atractiva una clase de matemáticas tendrían que utilizar recursos tecnológicos de avanzada (calculadoras graficadoras o computadores de nueva generación). En principio, esto podría ser cierto; sin embargo, por ello no debe proscribirse el uso de otros recursos que no sean tan tecnológicamente avanzados como una calculadora o un computador, por cuanto, el que una clase sea matemáticamente rica y enriquecedora no depende del costo de los recursos didácticos que se emplee.

La experiencia que aquí se reporta tiene la intención de ofrecer indicios que permitan dar fuerza a la idea según la cual todo profesor de matemática está en posibilidades de vivificar sus clases, utilizando materiales que están al alcance de todos sus alumnos, son de bajo costo y, si son usados adecuadamente, pueden dar lugar al desarrollo de procesos matemáticos importantes. Un recurso que posea estas característica ha sido denominado Material Matemáticamente Potente, como tal se concibe a cualquier dispositivo cuyo uso contribuya a la activación de procesos de pensamiento propios del quehacer matemático.

Uno de los materiales matemáticamente potentes más sencillo consiste en una simple hoja de papel tamaño carta, de las que se usan corrientemente en cualquier oficina. Una manipulación conveniente de este tipo de hojas puede dar lugar a interesantes procesos matemáticos asociados con el manejo de conceptos geométricos elementales. Para tratar de confirmar esta afirmación se procedió a realizar una experiencia con estudiantes de educación básica en quienes se propició la adquisición de conceptos básicos de Geometría y el desarrollo del sentido del espacio.

Geometría de Papel: la Construcción del Tamgrama Chino

La experiencia que a continuación se relata fue desarrollada con cuarenta y cinco (45) alumnos de octavo básico de la escuela Don Orione, ubicada en Santiago de Chile, Comuna de Cerrillo; a cada uno de los alumnos se le hizo entrega de una hoja de papel bond, blanca, tamaño carta (21,59 cm x 27,94 cm), sobre la cual se llevaría a cabo un conjunto de acciones según la secuencia de pasos que se indica a continuación y que también fue entregada a cada estudiante junto con la hoja antes referida

SECUENCIA DE ACTIVIDADES A DESARROLLAR CON LA HOJA DE PAPEL

PASO 0: Analizar la hoja tamaño carta como una figura del plano

PASO 1: A partir de la hoja del Paso 0 y sin usar regla ni compás, construya el máximo cuadrado posible y analícelo al igual que la figura anterior.

PASO 2: Demuestre experimentalmente que al unir la mitad de un cuadrado con su otra mitad el resultado no siempre es el cuadrado original (efectúe el corte por una diagonal)

PASO 3: Forme la mayor variedad de figuras geométricas posibles a partir de dos mitades triangulares del cuadrado.

PASO 4: Divida un cuadrado en dos mitades triangulares; divida una de las mitades en dos triángulos congruentes; compare uno de estos dos nuevos triángulos con el otro que se obtuvo al dividir el cuadrado original. Escriba las observaciones hechas al efectuar las comparaciones. Formule conclusiones en relación con las áreas que quedan descubiertas cuando compara los dos triángulos (el grande y el pequeño) superponiéndolos uno sobre el otro.

PASO 5: Con el triángulo grande del Paso 4, marque el punto medio de la base de mayor longitud; luego, una el vértice opuesto al punto medio con éste punto; doble la pieza, desdóblela y corte por la línea resultante. Compare al triángulo resultante con los que ya tenía antes, ¿qué puede decirse?. Escriba sus observaciones y registre todos los términos geométricos que usted ha utilizado a lo largo de los cinco pasos llevados a cabo. ¿Cuántas figuras tiene ahora? ¿Qué formas tienen? ¿Qué puede decir de ellas?

PASO 6: Con la pieza no triangular resultante en el Paso 5, proceda del siguiente modo: (a) una uno de los vértices de la base mayor con el correspondiente punto medio; (b) recorte el triángulo resultante y compárelo con los que ya tiene. ¿Qué puede decir?

PASO 7: A partir de la pieza no triangular resultante en el Paso 6, obtenga un cuadrado doblándola por el punto marcado en el Paso 5; tome uno de los triángulos y haga coincidir su ángulo recto con uno de los ángulos rectos del cuadrado. ¿Cómo son las alturas del cuadrado y del triángulo más pequeño? ¿Cómo son las alturas del cuadrado y del triángulo mediano?

PASO 8: Compare el área del cuadrado con la del triángulo mediano. ¿Qué puede decirse?

PASO 9: Usted tiene una pieza que no es cuadrada ni triangular (la obtuvo en el Paso 7) ¿Qué forma tiene?. Identifique el vértice opuesto al del ángulo recto de la base mayor. Una estos dos vértices. Corte el triángulo resultante. ¿Qué forma tiene la otra figura?. ¿Cuántas piezas tiene ahora en total?. Indique sus formas. Compárelas. Escriba sus observaciones.

PASO 10: ¿Cuál era la forma de la pieza con la que usted trabajó en el Paso 2?. Reconstrúyala usando todas las piezas que ahora posee.

PASO 11: Cree figuras varias usando todas las piezas anteriores, con la única condición de que no se solapen unas con otras.

PASO 12: Formule por escrito todas las vivencias que haya experimentado durante este trabajo. Señale qué uso didáctico puede tener en el medio educativo donde usted se desempeña.

La secuencia de pasos fue aplicada a todos los alumnos a la vez, permitiéndose la participación espontánea y voluntaria de quienes quisieran efectuar sus aportes. El contenido de las intervenciones de los estudiantes fue registrado en el pizarrón y los alumnos anotaron en sus respectivos cuadernos, los aportes colectivos, y los descubrimientos geométricos que fueron realizando; además, cuando hizo falta el profesor intervino a los fines de efectuar aclaratorias relacionadas con conceptos y relaciones geométricas que ofrecían dudas a algún estudiante; también fueron registrados los diferentes aspectos afectivos que fueron vivenciados por los educandos durante el desarrollo de la experiencia.

Resultados

PASO 0: En este paso inicial pidió a los alumnos que analizaran la hoja tamaño carta como una figura del plano. La intención, en este caso, consistió en que cada alumno, de manera libre, tuviese la oportunidad de manipular y observar ampliamente la hoja, con la finalidad de descubrir en ello la mayor cantidad posible de nociones geométricas. Las respuestas aportadas por los estudiantes fueron las siguientes: "se trata de un rectángulo; posee cuatro ángulos rectos. los lados opuestos son paralelos; es un paralelogramo; tiene dos diagonales; las diagonales se dividen; las diagonales forman cuatro triángulos de igual forma y tamaño y además son isósceles"; aprovechando esta última observación, el profesor incorporó el concepto de congruencia de figuras del plano.

PASO 1: A partir de la hoja del Paso 0 y sin usar regla ni compás, construya el máximo cuadrado posible y analícelo al igual que la figura anterior. Con este paso se comienza la manipulación propiamente dicha de la hoja. La acción fundamental consiste en determinar por dónde debe hacerse el doblez de manera tal que pueda obtenerse un cuadrado con el área mayor posible. En este caso, el 90 % de los alumnos no tuvo problema alguno para efectuar el doblez y corte adecuado a la hoja. El resto de los alumnos efectúa dobleces inadecuados, los cuales rectifican al observar cómo lo había hecho sus otros compañeros. Al solicitárseles que expresaran sus observaciones en relación con la figura que acaban de obtener, expresaron lo siguiente: "la figura es un cuadrado; posee los cuatro ángulos rectos, los lados opuestos son paralelos; es un paralelogramo; tiene dos diagonales; las diagonales se dimidian; las diagonales son perpendiculares; las diagonales dividen al cuadrado en cuatro triángulos congruentes, los cuales son rectángulos isósceles".

PASO 2: Demuestre experimentalmente que al unir la mitad de un cuadrado con su otra mitad el resultado no siempre es el cuadrado original (efectúe el corte por una diagonal). Para este momento, la hoja original ha quedado dividida en dos partes (una cuadrada y otra rectangular). Se comenzaría a trabajar con el cuadrado teniendo presente que la reflexión a partir de la manipulación de objetos concretos constituye una de las vías para la formación de conceptos abstractos. Ante las dudas suscitadas en algunos estudiantes, el profesor explica que cuando se pide "demostrar algo experimentalmente" significa encontrar ejemplos de lo que se pide. En este caso, los alumnos "cortaron" el cuadrado a través de su diagonal principal, obteniendo con ello un par de triángulos, éstos formaron las dos "mitades" del cuadrado que debían ser manipuladas para obtener otras figuras que no fueran un cuadrado, a pesar de que habían sido obtenidas de una figura que originalmente tenía esta forma. Como respuestas, los estudiantes señalaron las siguientes: "forman un triángulo rectángulo isósceles; forman un rombo"

PASO 3: Forme la mayor variedad de figuras geométricas posibles a partir de las dos mitades triangulares del cuadrado. En este paso se invitó a los alumnos a dar rienda suelta a su imaginación, a seguir manipulando material concreto; se procuraba con ello que visualizaran la mayor cantidad posible de figuras geométricas planas; en este caso, quizá no se introdujeron conceptos nuevos, pero sí se recordaron los nombres de algunas figuras que previamente habían sido estudiadas; entre las figuras formadas por los estudiantes estuvieron las siguientes: Triángulo; Rombo; Pentágono; Hexágono; Cuadrado.

PASO 4: Divida una de las mitades del cuadrado en dos triángulos congruentes; compare uno de estos dos nuevos triángulos con la otra mitad triangular del cuadrado (el otro triángulo que se obtuvo al dividir el cuadrado original). Escriba las observaciones hechas al efectuar las comparaciones. Formule conclusiones en relación con las áreas que quedan descubiertas cuando compara los dos triángulos (el grande y el pequeño) superponiéndolos uno sobre el otro. Este paso requería de un mayor nivel de observación; la exigencia reflexiva en esa oportunidad va más allá del material manipulable que se tiene a la vista; el alumno debe hacer comparaciones y conexiones conceptuales que probablemente no podrían lograrse a través de una exposición oral de los conceptos geométricos involucrados. Este paso resulta particularmente fructífero en relación con la consolidación del concepto de área de una figura plana. Las respuestas dadas por los alumnos fueron las siguientes: "el área mayor resulta el doble de la menor; el área menor es la mitad de la mayor; al hacer coincidir los ángulos rectos, el área descubierta permite establecer que los lados respectivos mayores resultan ser paralelos; también, si hacemos coincidir otro vértice, el área descubierta posee los lados que no coinciden en ninguna extensión, respectivamente paralelos; las figuras sin ser del mismo porte tienen la misma forma". Esta parte de la experiencia resultó especialmente oportuna para que le profesor introdujera el concepto de semejanza de triángulos.

PASO 5: Con el triángulo grande del Paso 4, marque el punto medio de la base de mayor longitud; luego, una el vértice opuesto al punto medio con éste punto; doble la pieza, desdóblela y corte por la línea resultante. Compare al triángulo resultante con los que ya tenía antes, ¿qué puede decirse?. Escriba sus observaciones y registre todos los términos geométricos que usted ha utilizado a lo largo de los cinco pasos llevados a cabo. ¿Cuántas figuras tiene ahora? ¿Qué formas tienen? ¿Qué puede decir de ellas?. Al llegar hasta aquí, la actividad ha adquirido un mayor carácter lúdico y los alumnos se hayan completamente integrados al trabajo; las exigencias se hacen cada vez mayores a medida que se avanza en la secuencia, y los estudiantes se muestran interesados en participar ya que la respuesta que les es exigida amerita por parte de ellos un esfuerzo de reflexión y atención no trivial. En este caso las respuestas obtenidas fueron las siguientes: "su área corresponde a la mitad de los triángulos mayores congruentes; es la octava parte del cuadrado; todos los triángulos se relacionan por semejanza o congruencia; el cuadrado original está dividido en cuatro figuras; las figuras son dos triángulos congruentes, un triángulo semejante a los dos congruentes y un trapecio isósceles; se puede establecer relación entre sus áreas". Debido a que la acción cognitiva básica que aplicaron los alumnos fue la comparación entre un todo y sus diferentes partes, el profesor aprovechó este paso para reforzar el concepto de fracciones.

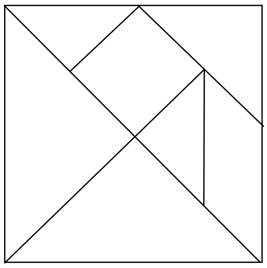
PASO 6: Con la pieza no triangular resultante en el Paso 5, proceda del siguiente modo: (a) una uno de los vértices de la base mayor con el correspondiente punto medio; (b) recorte el triángulo resultante y compárelo con los que ya tiene. ¿Qué puede decir?. Al llegar a este punto, los alumnos ya han manejado varios conceptos y relaciones geométricas básicas; en este paso se refuerzan las mismas. La respuestas obtenidas fueron las siguientes: "su área es la mitad del triángulo menor anterior y la cuarta parte de los triángulos mayores congruentes; todos los triángulos siguen siendo isósceles rectángulos, el triángulo resultante tiene de área 1/16 del área del cuadrado original".

PASO 7: A partir de la pieza no triangular resultante en el Paso 6, obtenga un cuadrado doblándola por el punto marcado en el Paso 5; tome uno de los triángulos y haga coincidir su ángulo recto con uno de los ángulos rectos del cuadrado. ¿Cómo son las alturas del cuadrado y del triángulo más pequeño? ¿Cómo son las alturas del cuadrado y del triángulo mediano?. Aquí se introduce el concepto de altura que antes no había sido trabajado explícitamente; las respuestas obtenidas fueron las siguientes: "las alturas están en razón de 3 es 4 con el triángulo intermedio; las alturas están en razón de 1 es 2 con los triángulos mayores congruentes; las alturas están en razón de 1 es 1 con el triángulo menor".

PASO 8: Compare el área del cuadrado con la del triángulo mediano. ¿Qué puede decirse?. Las respuestas obtenidas fueron: "la áreas resultan ser iguales; se verifica visualmente la fórmula del área de un triángulo". Esta última observación fue particularmente interesante puesto que permitió mostrar un resultado fundamental de la Geometría del plano en una forma no convencional.

PASO 9: Usted tiene una pieza que no es cuadrada ni triangular (la obtuvo en el Paso 7) ¿Qué forma tiene?. Identifique el vértice opuesto al del ángulo recto de la base mayor. Una estos dos vértices. Corte el triángulo resultante. ¿Qué forma tiene la otra figura?. ¿Cuántas piezas tiene ahora en total?. Indique sus formas.

Compárelas. Escriba sus observaciones. Respuestas Obtenidas: "la figura corresponde a un trapecio rectángulo; la figura resultante después del corte se trata de un romboide; se visualizan sus lados opuestos paralelos; se cuenta con siete piezas; se pueden describir como cinco triángulos isósceles, un cuadrado y un romboide".



PASO 10: ¿Cuál era la forma de la pieza con la que usted trabajó en el Paso 2?. Reconstrúyala usando todas las piezas que ahora posee.

PASO 11: Cree figuras varias usando todas las piezas anteriores, con la única condición de que no se solapen unas con otras. Con las piezas del paso 10, los alumnos formaron variadas figuras geométricas ocupando para cada caso todas las piezas, algunas de las cuales están descritas en el paso 3.

PASO 12: Formule por escrito todas las vivencias que haya experimentado durante este trabajo. Señale qué uso didáctico puede tener en el medio educativo donde usted se desempeña. Respuestas obtenidas: "se trata de un trabajo motivador; permite aclarar conceptos geométricos en forma concreta; genera la posibilidad de incorporar nuevos conceptos durante su desarrollo, que resultan evidentes; permite comprobar visualmente varios teoremas y/o propiedades; se puede asociar al trabajo de fracciones y sus equivalencias; se establece claramente la diferencia entre congruencia y semejanza; entrega una nueva herramienta para que el alumno pueda trabajar otros teoremas a partir de la construcción en papel de lo que se pide demostrar; le facilita el trabajo de disertaciones, las cuales apoya con figuras que permiten ver en forma concreta las propiedades, relaciones o teoremas a presentar.

Recomendaciones

Las apreciaciones hechas por los estudiantes en el PASO 12 son indicadoras de la calidad que como recurso instruccional tiene esta actividad; sin embargo, a los fines de incrementar la probabilidad de éxito en su aplicación, se recomienda que el profesor domine el desarrollo de toda la secuencia y pueda estar al tanto de las posibilidades que ofrece cada uno de los pasos, de manera tal que pueda obtener el mayor provecho del mismo en función del contenido y de los objetivos programáticos que estén contemplados en la unidad de geometría; además, de acuerdo con el nivel de formación e información previa que posean los estudiantes, el profesor puede hacer preguntas más retadoras o pedir que los alumnos vayan más allá de la comprobación; por ejemplo, algunos pasos de la secuencia se prestan para verificar visualmente, teoremas relativos a los ángulos internos de un triángulo.

Por otro lado, se puede comprobar que el trabajo desarrollado en forma secuencial como lo establece la experiencia se extiende durante más de una clase y toca muchos tópicos de la geometría, por ello, el docente debe planificar cada clase en función de los temas en los que desea profundizar

Otro aspecto importante es que los profesores, antes de aplicar la secuencia a sus alumnos, la experimenten en forma personal de manera que puedan tomar conciencia de todo a su riqueza heurística y de los conceptos y relaciones geométricas que surgen en cada paso, a los fines de poder sacarle el mayor provecho pedagógico posible.

Referencias bibliográficas

González, F. (1998). Procesos cognitivos y Metacognitivos que Activan los Estudiantes Universitarios Venezolanos Cuando Resuelven Problemas Matemáticos. **Educación Matemática 10**(3), 172-181.

La Exposición de los Estudiantes como una Técnica de Aprendizaje Cooperativo en Matemática [*]

Niurka Ramos Rodríguez
nramos@usb.ve
Universidad Simón Bolívar
Venezuela

Resumen

El objetivo de esta investigación fue determinar si la técnica de exposición podía ser aplicada como una herramienta para coadyuvar el aprendizaje de la Matemática y fomentar el trabajo cooperativo entre los estudiantes. El aprendizaje cooperativo puede ser definido como una estrategia que promueve una interdependencia positiva entre los aprendices (Levitt, 1999). Su aplicación al principio puede involucrar mas tiempo y trabajo que una clase expositiva, no tanto por la revisión de los contenidos sino por el diseño de una estructura de contenidos efectiva (Jewett,1996). Varias investigaciones confirman la efectividad del trabajo cooperativo en Educación Superior, si se compara con la enseñaza centrada en exposiciones del profesor, tareas y evaluaciones competitivas. Las ganancias, cuando se promueve el aprendizaje cooperativo, son diversas índole: cognoscitivas, afectivas y de manejo de los cursos. (Astin, 1993; Cooper et al., 1990; Goodsell et al. , 1992; Johnson et al. , 1991; McKeachie, 1986 citados por Felder y Brent, 1994). Antes de iniciar el curso, cada estudiante se presentó ante la clase para que se conocieran entre ellos. Los estudiantes fueron divididos en grupos para asignarles los tópicos que debían exponer, en forma progresiva, dentro de la secuencia de instrucción; así como, el procedimiento a seguir en cada exposición. Todo se planificó: contenidos, tiempo de exposición, actividades, evaluación individual y grupal, entre otros. También se establecieron tres estilos de **exposición** de acuerdo al tipo y complejidad de contenidos: a) la **introductoria**, b) de **ejercitación** y c) la **auto-contenida**. Se hicieron anotaciones diarias de cada actividad y del desempeño grupal e individual. La metodología utilizada para el registro y análisis de los datos fue cualitativa, por lo tanto se realizaron observaciones, entrevistas y videos grabados en clases. Al final del curso los miembros de la clase evaluaron la metodología aplicada, esta actividad fue grabada en video. Los principales resultados de la aplicación de la exposición como método de aprendizaje fueron: a) Un alto rendimiento individual y grupal (92,1% aprobados, n = 38); otras ganancias cognitivas fueron una comprensión más profunda de los contenidos teóricos y una mayor destreza para resolver problemas; 2) desde el punto de vista afectivo hubo gran satisfacción con el desarrollo del curso, una actitud positiva hacia el área y hacia sus compañeros, desarrollo de habilidades para comunicarse, entre otras. La exposición de los estudiantes puede ser una técnica interesante para la enseñanza de la Matemática y para la formación de futuros profesionales, vale la pena seguir explorando el área.

Introducción

La evolución de la línea de investigación sobre el trabajo cooperativo de los estudiantes y la construcción del conocimiento, en el área de Matemática, ha propiciado varios ensayos metodológicos en el aula, cuyos resultados son motivadores. Este es uno de ellos.

El área de Matemática por tradición ha dependido de la pizarra, la tiza, el borrador y un profesor que explique. En los últimos años, después del impacto que han tenido la Tecnología en la Instrucción (TI), el desarrollo de las comunicaciones y la computación y la tecnología de la información, se puede encontrar en la Web diferentes sitios relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemática. Pero Tecnología de la Instrucción va

---

[*] Dedicatoria: A todos los estudiantes de Matemática II del trimestre Abril-Julio de 1999

Agradecimiento: *A la Sede del Litoral de la Universidad Simón Bolívar, su personal, programas y ambiente, con fe en su recuperación después de la destrucción sufrida durante las inundaciones de Diciembre de 1999.*

Motivación: Dar a conocer lo que los estudiantes son capaces de hacer, aprender, compartir y transmitir.

mas allá del uso de los medios informáticos en la educación, es el desarrollo de técnicas de enseñanza con un fin determinado, que de una manera planificada y deliberada se aplican para mejorar la instrucción. Según Fardanesh (2000), la TI es un proceso sistemático que presenta soluciones, procedimientos, estrategias y modelos para ejecutar la instrucción para diferentes aprendices en una gran variedad de situaciones.

Es así como se desarrolla este modelo: el uso de las exposiciones de los estudiantes como una herramienta para fomentar la interacción entre ellos, a fin de obtener un mejor aprendizaje con altos niveles de satisfacción. (También conocidas como presentaciones orales en la literatura revisada)

Objetivo

El objetivo de esta investigación fue determinar si la exposición de los estudiantes podía ser aplicada como una herramienta para coadyuvar el aprendizaje de la Matemática y fomentar el trabajo cooperativo entre los estudiantes, en el primer año en los programas de formación para Técnico Superior Universitario, de la Universidad Simón Bolívar en su Sede del Litoral.

Antecedentes

La importancia de las destrezas para expresarse en publico son necesarias en cualquier disciplina, es importante que todo profesional pueda exponer sus ideas claramente. En tal sentido, hay todo un conjunto de recomendaciones para desarrollar destrezas de presentación oral. (Cohen y Jensen, 1995) Cuando la presentación es por grupo, hay que hacer el ajuste del tiempo dedicado a las exposiciones y un plan de observación y ponderación que permita distinguir los diferentes desempeños dentro de cada grupo. En este curso se les ofreció a los estudiantes la oportunidad de trabajar en equipo y exponer sus aprendizajes con distintos fines: incrementar sus logros cognoscitivos, fomentar el trabajo cooperativo y mejorar sus destrezas de expresión oral, ya que las habilidades de comunicación están estrechamente ligadas al procesamiento de información y aprendizaje.

El aprendizaje cooperativo es un término genérico que incluye aquellos procedimientos de instrucción interactivos para pequeños grupos (Millis, 1996). Levitt (1999), por su parte, lo describe como una estrategia que promueve una interdependencia positiva entre los aprendices. Diversos autores hablan de las bondades del trabajo cooperativo y de como contribuye al aprendizaje de los estudiantes (Johnson & Johnson, 1998; Panitz, 1999 y Felder & Brent, 1994). Su planificación involucra más tiempo y trabajo que una clase expositiva, no tanto por la revisión de los contenidos sino por el diseño de una estructura de contenidos efectiva (Jewett, 1996). Varias investigaciones confirman la efectividad del trabajo cooperativo en Educación Superior, si se compara con la enseñaza centrada en exposiciones del profesor, tareas y evaluaciones competitivas. Las ganancias, cuando se promueve el aprendizaje cooperativo, son diversas índole: cognoscitivas, afectivas y de manejo de los cursos. (Astin, 1993; Cooper et al., 1990; Goodsell et al. , 1992; Johnson et al. , 1991; McKeachie, 1986 citados por Felder y Brent, 1994).

Metodología

El presente estudio corresponde a una investigación de tipo etnográfica. La metodología utilizada, para el registro y análisis de los datos, fue de tipo cualitativo.

Sujetos:

Estudiantes de Matemática II pertenecientes a los programas de formación de Técnicos Superiores. Se trabajó con un grupo intacto, constituido por 38 sujetos, que fueron asignados al azar por una inscripción en línea.

Fases del trabajo:

Planificación:

Primero se analizó la secuencia de instrucción que establecía el programa de la asignatura, para decidir cuales eran los tópicos que los estudiantes podían desarrollar en clase. Ello llevó a diseñar tres modelos de exposición, de acuerdo al tipo y complejidad de contenidos: a) la **introductoria**, b) de **ejercitación** y c) la **auto-contenida**.

- ***Introductoria***: Se le asignan a los estudiantes un conjunto de contenidos teóricos, que han visto en cursos anteriores y que son los conocimientos previos de la clase que van a iniciar. El profesor cierra la clase tomando todos esos contenidos y los usa para desarrollar el contenido nuevo. (Anexo 1)
- ***Ejercitación***: En este caso el profesor introduce los contenidos teóricos, explica ejemplos, otros ejemplos los resuelven algunos estudiantes en clase y los grupos se encargan de hacer la actividad práctica, ellos exponen modelos para resolver problemas, los explican y proponen ejercicios a sus compañeros. (Anexo 2)
- ***Auto-contenida***: En este caso se trata de contenidos muy sencillos que el estudiante puede desarrollar con independencia, tanto la teoría como la práctica. El profesor asigna los contenidos y da las orientaciones para su exposición. (Anexo 3)

Ejecución:

El primer día de clases se les inform**ó** a los estudiantes todo lo relativo al desarrollo del curso. La primera actividad fue hacer una breve presentación de todos los miembros a fin de que se conocieran unos a otros. Para ello el profesor preparó una guía de preguntas para que el conjunto de respuestas fuera homogéneo, de todas las respuestas se tom**ó** nota (Anexo 4). Este primer cuestionario público pretendía diagnosticar algunos datos sociodemográficos, vocacionales y afectivos del estudiante. Esta presentación facilitó el acercamiento de los miembros del curso. Luego se procedió a explicar: a) como se llevaría a cabo cada una de las actividades, b) cual era el objetivo de que ellos hicieran exposiciones y c) cual era la meta. También se les comentó como sería el proceso de evaluación y el peso que cada nota tendría en la calificación definitiva. La mejor manera de empezar el proceso fue verlo como una actividad donde todos tratarían de hacerlo bien y disfrutar con el trabajo realizado. Por último se formaron los grupos de acuerdo a empatía y facilidades para reunirse.

Evaluación del proceso:

Se evaluaron: el aprovechamiento de los estudiantes (pruebas de lapso), el trabajo de los estudiantes (observaciones y notas de campo) y la metodología aplicada (entrevista grupal).

Estrategia* de *evaluación de los estudiantes:

Se hicieron anotaciones diarias de cada actividad y del desempeño grupal e individual. La evaluación del aprovechamiento de los estudiantes incluyó varios aspectos:

- ***Exposición Individual*.** (En cada sesión todos los miembros del grupo tenían una oportunidad de exponer, se les evaluaba el dominio de su tópico, claridad, habilidad para comunicarse, integración con su grupo)
- ***Presentación del grupo*.** (Se les evaluaba la coordinación de las exposiciones, la secuencia y si realmente habían trabajado en grupo)
- ***Trabajo escrito*.** Cada equipo tenía que presentar, de su exposición, un trabajo escrito incluyendo las fuentes de consulta. Se tomaron en cuenta: presentación, calidad de los contenidos, secuencia, elección de los ejemplos expuestos, estilo, entre otros.
- ***Evaluación de pares*:** Cada equipo evaluaba a sus compañeros con una prueba corta. Esta prueba la diseñaban los estudiantes, el profesor la revisaba y reproducía; y finalmente, los estudiantes la aplicaban, corregían y entregaban sus calificaciones con las pruebas corregidas al profesor. Estas evaluaciones al final de la clase garantizaban la atención de la audiencia, solo las exposiciones introductorias no incluían pruebas cortas.
- ***Prueba de lapso*:** Se hicieron tres pruebas de lapso, que evaluaba de manera integral todo lo visto en cada sección de la asignatura. Estas eran diseñadas, aplicadas y corregidas por el profesor.

El peso porcentual de cada tipo de evaluación es presentado en el Cuadro 1. La calificación del rendimiento de los estudiantes era sobre 20 puntos. En los casos en que había varias notas, estas eran promediadas. Cada estudiante hizo tres exposiciones, tres trabajos escritos y dos pruebas cortas.

CUADRO 1

Programa de evaluaciones y peso porcentual

Pruebas de Lapso (PL)			Exposiciones (EX)	Pruebas cortas (PC)	Trabajos Escritos (TE)	Total de porcentajes	Ajuste definitivo
PL1 Total	PL2 Total	PL3 Total	Promedio	PC Promedio	TE Promedio	Total	Def.
20%	20%	10%	20%	10%	20%		

RECOLECCION DE LOS DATOS

Las técnicas utilizadas para la recolección de los datos fueron: notas de campo, entrevistas y grabaciones en video.

- ***Notas de campo:*** Se hicieron dos tipos de notas en clase: a) las generales que trataban de recabar información útil acerca del ambiente en el salón de clases y de aspectos generales en la evolución del curso y b) las listas de chequeo, que se utilizaban durante y al final cada exposición. (Anexo 4)
- ***Entrevista:*** El primer día de clases se entrevistó a cada estudiante, esta primera entrevista fue realizada con una guía de forma tal de obtener la misma información de cada estudiante. (Anexo 5)
- ***Grabaciones:*** Con una video cámara se grabaron algunas sesiones de exposiciones y la evaluación final que hicieron los estudiantes del curso. Se chequeó con los estudiantes que la cámara no fuera un objeto perturbador, ellos sabían que la información que se estaba recolectando era para mejorar los procesos de enseñanza de la Matemática. Los estudiantes se rotaron los turnos como camarógrafos, eso les dio mayor confianza en lo que se estaba haciendo.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

- El análisis de las *notas* se hizo mediante la revisión de los manuscritos y la identificación de las observaciones de desempeño. En las *entrevistas* se revisó la información escrita y se hicieron análisis de frecuencia de los datos sociodemográficos demandados. Los *videos* fueron observados varias veces para extraer aquella información que contribuía a reforzar las notas de campo. En el caso de la entrevista final, se transcribieron las opiniones de los estudiantes para su posterior análisis de frecuencia.

Resultados:

- ***Entrevista inicial:***

Expectativas con respecto al curso: a) Pasar la asignatura: 94,2 % y b) Aprender: 5,8 %.
Historia en Matemática: a) Repitientes: 34,28% y b) Cursando por primera vez: 65,71%.
Los datos sociodemográficos más importantes son:
Lugar de residencia: a) Caracas (Capital): 18; b) Litoral: 15 y c) Interior del país: 2
Cohabitan: a) con familia nuclear: 26; b) en residencia estudiantil: 8 y c) otra: 1
Estudiantes que trabajan: Total = 5; a) Jornada Completa: 0 y b) Por Horas: 5
Estado Civil: a) Casado: 2 b) Soltero: 33 y c) Otro: 0

- ***Evaluación del curso (por el Profesor)***

En cuanto al rendimiento: De 38 estudiantes registrados en la nomina del curso, dos se retiraron al inicio del trimestre por coincidencias de horario y uno nunca asistió al curso; por lo tanto, hubo 92,1% aprobados, n = 38. La media de las calificaciones fue de 14.4 puntos, para los 35 estudiantes que aprobaron la asignatura.

En cuanto a la valoración apreciativa del profesor: Todos los estudiantes evidenciaron un alto nivel de compenetración con el grupo, se observó integración, compañerismo, camaradería entre los miembros de cada grupo. La competencia en los grupos era interna, por hacerlo cada vez mejor. Hubo mejora en la expresión oral, en la actitud hacia el área de Matemática y en el desempeño ante la clase.

La evaluación de los trabajos escritos permite emitir los siguientes juicios: fueron de una alta calidad, que reflejaban el compromiso del grupo, la investigación realizada y la participación e integración de los diferentes miembros.

Resumiendo, hubo ganancias cognoscitivas (mayor numero de aprobados con una media alta, si se compara con el histórico de notas) y afectivas (desarrollo de actitudes positivas hacia Matemática y aprendizaje con altos niveles de satisfacción).

- ***Evaluación del curso (por los Estudiantes)***

De 35 estudiantes activos, participaron en la evaluación final del curso 27 (77%). En los próximos análisis n = 27. El siguiente cuadro muestra los factores más importantes y su frecuencia. Algunos comentarios textuales serán reseñados como muestra de las respuestas de los estudiantes.

CUADRO 2

Resultados de la Evaluación final de los Estudiantes

ASPECTO O FACTOR	N = Total (%)	Positivo	Negativo	Expresiones textuales de ejemplo
Sentimientos aflorados sobre su experiencia en el curso	18	16	2	“Fue un curso de Matemática divertida” “ Estoy muy satisfecha” “Fue algo demasiado grande...” “Es la mejor manera de ver las Matemática” “No sentí presión” “Al principio me pareció difícil”
Comentarios sobre la integración en los grupos y relaciones de amistad	17			“El grupo fue bien unido” “Nos ayudamos mutuamente” “Mucho compañerismo” “Éramos un todo” “Hubo cohesión entre nosotros”
Expresiones sobre el aprendizaje alcanzado	14			“Aprendí!” “Aprendimos todos” “ Aprender un tema, dominarlo y explicarlo: eso es aprendizaje”
Opiniones sobre la metodología aplicada	12			“La metodología me hizo abrir los libros” “Esto es una nueva pedagogía” “Es un método muy rico” “ El método me pareció perfecto!” “Es un método muy interactivo”
Evocaciones sobre su historia pasada en Matemática.	12	4	8	“No fue como otras veces..” “Yo nunca había abierto un libro de Matemática” “ Antes solo estudiaba para los parciales” “No te daban la oportunidad de analizar... de procesar”
Opiniones acerca de las exposiciones en clases	9	5	4	“Las exposiciones me motivaron” Las exposiciones nos obligaron a aprender” “Exponer me pareció absurdo” “Era traumático pensar en exponer”
Agradecimientos y felicitaciones al profesor	8			“Debemos felicitar a la profesora por tratar de innovar” “Me gustó su manera de ser tan amplia y abierta”
Interacciones generadas entre alumno-alumno y profesor –alumno.	7			“Había mucha interacción entre nosotros” “Todos interactuábamos Profesor-alumno y alumno –alumno”
Comentarios sobre el curso en general	6			“Esto fue un curso de Matemática divertida” “ Fue un curso bastante

				interesante y dinámico" " Eliminar el abuso del lápiz y papel fue lo más positivo"
Apoyo brindado por el grupo	6			"Mis compañeros me apoyaron" "El grupo me apoyo muchísimo"
Recomendaciones para usar la metodología a futuro	5			"Aplique otra vez la misma metodología" " Si vuelve a dar el curso, la mejor forma es esa"
Apoyo brindado por el profesor	4			"La profesora siempre estuvo con nosotros" "Siempre estuvo dedicada a sus estudiantes"
Estudiar, aprender, para explicar.	4			"Tenia que aprender para mí y luego poder explicarles a mis compañeros"
Comentarios de personas externas al curso	2			"Le comenté a otro profesor que iba a exponer en Matemática, le gustó la idea y dijo lo que iba a poner en práctica..."
Pérdida del miedo escénico.	2			'Uno pierde el miedo escénico"

N =27

NOTA:

1. Los factores fueron ordenados por la frecuencia de respuesta de mayor a menor
2. Cuando hubo valoración afectiva en las opiniones positivas y negativas, se separaron los datos. La falta de separación indica que todas las respuestas eran positivas o neutras.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Es interesante como un grupo intacto, heterogéneo y con diferentes historias en Matemática se integraron para producir estos resultados. De acuerdo con los testimonios de los propios estudiantes, ellos aprendieron no solo contenidos sino a estudiar, analizar, procesar información, resolver problemas, trabajar en equipo y expresarse públicamente, entre otros. Adicionalmente, las evocaciones que ellos hacen de su pasado reflejan que hubo ganancias en el plano afectivo, ya que mejoraron sus percepciones y actitudes sobre el área de Matemática y desarrollaron su proceso de aprendizaje con altos niveles de satisfacción, ya que se desempeñaron sin presiones ni stress. También se observó máxima dedicación e interés entre los miembros de la clase. Se puede resumir que el método contribuyó a convertir a los estudiantes en aprendices más independientes.

La mayor parte de las opiniones de los estudiantes son positivas. Las negativas están asociadas a su experiencia pasada en Matemática, en algunos casos, y en otros, estaban relacionadas con su arraigado miedo a las exposiciones o presentaciones en clase, independientemente de la asignatura.

Hubo respeto por cada presentación en clase porque todos sabían que todos serían expuestos al mismo desempeño. Los estudiantes hicieron sus presentaciones con mucha seriedad.

Por la calidad de los trabajos escritos se puede inferir que los estudiantes se comprometieron con la tarea e hicieron con esmero sus asignaciones.

Los resultados presentados evidencian que las exposiciones pueden convertirse en una actividad cooperativa. Sólo es conveniente comentar que este enfoque difiere de la concepción de los autores revisados. La mayoría de los autores que han trabajado con grupos cooperativos, establecen ciertos criterios de organización y funcionamiento. En este caso, hubo mucha planificación y orientación pero no hubo reglas rígidas, todo se desarrollo de manera natural y espontánea. Por otro lado, los grupos fueron más numerosos de lo tradicionalmente recomendados (4-5 estudiantes).

Una debilidad de este trabajo fue que no se entrenó a los estudiantes sobre como hacer las presentaciones en clase. Una nueva aplicación se pudiera mejorar dando algunos directrices sobre las técnicas de exposición oral. En cualquier caso, ellos trataron de imitar al profesor.
Finalmente, vale la pena replicar el trabajo en otros niveles y con otros contenidos, para descartar que estos resultados sean un efecto puntual.

Referencias bibliográficas

Cohen, J y Jensen, D. (1995) ***Oral Presentation Skills***. Search Master International. http://www.bio.com/hr/search/f-oral.html

Fardanesh, H. (2000). ***Instructional Technology and its exigency.*** Journal of Instructional Science and Technology. Vol. 3, No 3. March 2000. Pp. 2-7. http://www.usq.edu.au/electpup/e-jist/Vol3No3/index.html

Felder, R. y Brent, R. (1994) ***Cooperative Learning in Technical Courses; Procedures. Pitfalls and Payoffs***.
http://www2.ncsu.edu/unity/lockers/f/felder/public/Papers/Cooprepot.html

Jewett, T., (1996) ***A Cooperative Learning Approach to Teaching Social Issues of Computing***. http://www.engr.csulb.edu/~jewett/social/cql96.html

Johnson, D. Y Johnson, R. (1998) Cooperative Learning and Social Interdependence Theory. Social Psychological Applications to Social Issues. http://www.cooplearn.org/pages/SIT.html

Levitt, G. (1999) **Learning Theories.** *Teacher Explorer Center.*
http://ss.uno.edu/SS/Theory/InstTech.html

Millis, B. (1996) **Cooperative Learning**. *The University of Tennessee at Chattanooga. http://www.utc.edu/Teaching-Resource-Center/CoopLear.htlm*

Panitz, T. (1999) **Using Cooperative Learning 100 % of the time in mathematics classes establishes a Student-Centered, Interactive Learning Environment**. *http://www.capecod.net/~tpanitz/tedspage/tedsarticles/coopmath.htm*

Un Análisis Comparativo de las Actitudes de Estudiantes de Primero de Ingeniería hacia el uso de Ordenadores y Programas de Cálculo Simbólico para el Aprendizaje de los Conceptos de Cálculo

Matías Camacho Machín
Depto. de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife, España.
Ramón Depool Rivero.
UNEXPO "Antonio José de Sucre", Barquisimeto-Estado Lara
Venezuela.

Resumen

En este trabajo se presenta el análisis de una escala Likert sobre las actitudes hacia las Matemáticas y el uso del ordenador suministrada a un grupo de 58 estudiantes del Primer Semestre de los Estudios Generales y Básicos de las carreras de Ingeniería que imparte la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre". Vicerrectorado Barquisimeto. del Estado Lara en Venezuela. Se eligieron catorce estudiantes (grupo experimental) con los que se desarrolló una secuencia de enseñanza para el aprendizaje del concepto de integral definida con DERIVE, impartiéndose a los cuarenta y cuatro restantes las clases con el método habitual (grupo control), los dos grupos tenían conocimientos sobre el manejo del software DERIVE. De los resultados obtenidos se puede observar que el uso del ordenador en general y el uso de **DERIVE**, en particular, influye positivamente en el cambio de actitud de los estudiantes tanto hacia las matemáticas como hacia la seguridad, confianza, motivación y compromiso del estudiante con el trabajo matemático.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías y en particular, el uso de los ordenadores, se empiezan a vislumbrar en esta década como creadores de entornos de aprendizaje útiles para la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en los niveles de enseñanza secundaria y universitaria. En general, las investigaciones basadas en secuencias de aprendizaje desarrolladas con ordenadores no suelen distinguir los aspectos actitudinales de los que están exclusivamente relacionados con la adquisición de los conocimientos que se imparten con determinados softwares informáticos, aunque en los últimos años se han desarrollado algunas investigaciones que tienen que ver con el dominio afectivo de los estudiantes. Investigadores tales como McLeod (1993), Artigue (1997), Gómez (1997) Mayes (1998), Galbraith (1998) destacan la importancia de los aspectos del dominio afectivo de los estudiantes y la relación existente con el uso de nuevas tecnologías.

Este trabajo es parte de una investigación que se desarrolla en la actualidad en colaboración con la Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre", Vicerrectorado de Barquisimeto en el Estado Lara (Venezuela) cuyos objetivos de investigación se centran en torno a dos aspectos principales que denominamos "curricular" y "actitudinal".

Con relación a este primer aspecto, se tratará de establecer una modificación del currículo dedicado al Cálculo Integral que habitualmente se imparte, tanto metodológico como de contenido. Esto es, se pretende introducir, previo al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de integral definida como área bajo una curva desde una perspectiva gráfica y numérica utilizando para ello el Programa de Cálculo Simbólico ***DERIVE*** y analizar la viabilidad de esta modificación, así como las posibles dificultades que surgen en su implementación.

El segundo aspecto, que hemos denominado "actitudinal" va dirigido a analizar los posible cambios (o conservación) de las actitudes de los estudiantes que utilizan secuencias de aprendizaje desarrolladas utilizando este software.

En el trabajo que presentamos, nos centraremos en este último objetivo de investigación. Tratamos en definitiva de presentar los resultados obtenidos, en una primera fase (exploratoria), al suministrar como instrumento de análisis un test de actitudes basado en una escala Likert que ha sido elaborado por los investigadores y que nos permitirá sentar las bases para un estudio posterior.

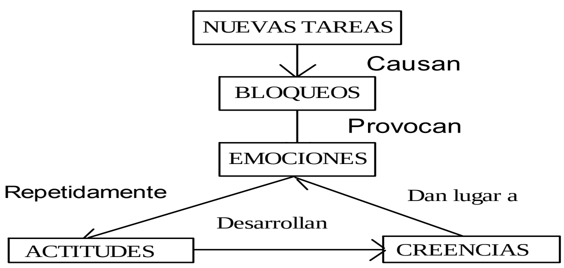
El dominio afectivo. Consideraciones generales

El dominio afectivo ha sido tomado en cuenta, últimamente, como una parte importante de la cognición dentro de la Educación Matemática. Uno de los pioneros en estas investigaciones es Mandler (1989) quien en sus trabajos trata de clarificar a qué debemos referirnos cuando hablamos del dominio afectivo de nuestros estudiantes. McLeod (1992) resume la teoría de Mandler de la siguiente manera:

Primero, los estudiantes poseen ciertas creencias sobre las matemáticas y sobre sí mismos que juegan un papel importante en el desarrollo de sus respuestas afectivas a situaciones matemáticas. Segundo, a partir de interrupciones y bloqueos que son una parte inevitable del aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes experimentarán emociones positivas y negativas cuando aprenden matemáticas, estas emociones se notan más probablemente cuando las tareas a realizar son nuevas. Tercero, los estudiantes desarrollarán actitudes positivas o negativas hacia las matemáticas cuando encuentran repetidamente situaciones matemáticas iguales o semejantes. (p. 578)

Como señala Mayes (1998), su visión sobre el dominio afectivo, planteada desde la sicología del desarrollo, es análoga a la visión constructivista sobre el dominio cognitivo.

Los estudiantes experimentan emociones, que se desarrollan en actitudes, las cuales son usadas para construir sus propias creencias. En el siguiente esquema se sintetiza la idea de Mandler:



Nos basaremos entonces, desde una perspectiva teórica, en este modelo propuesto por Mandler-Hart, considerando como dimensiones del dominio afectivo a las creencias, las actitudes y las emociones. De esta manera: *La creencia* refleja un juicio sobre cierto conjunto de conceptos; *la actitud* representa una reacción emocional sobre un objeto, sobre una creencia sobre un objeto o sobre un comportamiento hacia el objeto; *la emoción* significa una reacción intensa creada por algún estímulo.

McLeod sintetiza las dimensiones de creencias, actitudes y emociones como representando una implicación afectiva creciente, una implicación cognitiva decreciente, intensidad creciente y estabilidad decreciente, esto es, si comparamos las actitudes con las creencias, las actitudes tienen una implicación afectiva mayor una implicación cognitiva menor más intensidad y menos estabilidad que las creencias.

Si comparamos las actitudes con las emociones, las primeras tienen una implicación afectiva menor, una implicación cognitiva mayor, menor intensidad y mayor estabilidad. (de ahí la definición de actitud). De esta forma, consideramos las ACTITUDES como ***el resultado***

de reacciones emocionales que han sido internalizadas y automatizadas para generar sentimientos de intensidad moderada y estabilidad razonable.

En nuestro trabajo, no hacemos una separación taxativa entre los distintos constructos que son considerados desde la perspectiva teórica, sino que nos moveremos entre las dimensiones de creencias-actitudes de la clasificación anterior, más que en la dimensión de emociones.

Antecedentes

En un trabajo preliminar "**Actitudes hacia las matemáticas y hacia el uso de los ordenadores en primer curso de ingeniería"** (pendiente de publicar) desarrollado en la UNEXPO con una muestra de 331 estudiantes de primer semestre de Ingeniería, de una población de 641 estudiantes, utilizando una escala de actitud hacia la matemática tipo Likert, de 38 ítem, adaptándola de Depool (1991), con categorías similares a la de Galbraith y Haines; permitió establecer cuatro dimensiones, tres en relación con las actitudes hacia la matemática y una al uso de los ordenadores: Seguridad y confianza del estudiante en el trabajo matemático (9 ítem). Motivación del estudiante hacia el trabajo matemático (12 ítem). Compromiso del estudiante con el trabajo matemático (11 ítem). Uso del ordenador en las actividades matemáticas (6 ítem).

Entre las conclusiones se destaca que: La actitud de los estudiantes, tanto hacia las matemáticas como hacia el uso de los ordenadores es medianamente positiva. Los estudiantes valoran la utilidad del ordenador en las clases de matemáticas; en este aspecto conviene señalar que los repetidores tienen un valor actitudinal mayor que los de nuevo ingreso. Pensamos que no es suficiente para analizar la actitud de los estudiantes hacia el trabajo con el ordenador situarlo como una única dimensión dentro de un análisis de las actitudes hacia las matemáticas.

Esta última conclusión motivó el desarrollo de un instrumento más completo, que cubriera las dimensiones anteriormente señaladas, pero relacionadas con el ordenador, con la finalidad de lograr el segundo objetivo mencionado en la introducción.

El análisis de la escala de actitudes utilizada y los resultados, nos llevó a establecer una categorización por indicadores del instrumento, a partir de las tres primeras dimensiones, relacionadas con el uso del ordenador la cual quedará establecida en el siguiente párrafo.

Metodología

Para llevar a cabo el estudio se tomó una muestra de 58 de los 331 estudiantes, divididos en dos grupos, uno de 14 estudiantes (7 de nuevo ingreso (NI) y 7 repetidores (RE)), y otro de 44 estudiantes (34 de nuevo ingreso y 10 repetidores); el primero se le denominó grupo experimental (GE) y el segundo grupo control (GC)

Con el GE se desarrolló, en una sala con 15 ordenadores, un trabajo de formación con DERIVE, utilizando un módulo instruccional, mediante el cual se trataba de que los alumnos estudiaran el concepto de integral definida desde una perspectiva gráfica y numérica (véase Camacho y Depool, 2000 para más detalles).

El GC, siguió la enseñanza con los métodos habituales: definición, ejemplo, teorema y ejercicio.

Ambos grupos tenían conocimientos básicos del uso del software DERIVE. Al finalizar la experiencia se les aplicó un cuestionario. El procesamiento de los datos se realizó con el software SYSTAT. Para la confiabilidad del instrumento se utilizó el Alfa de Cronbach; la cual fue de 0,824873.

La escala de actitudes utilizada se elaboró adaptándola del cuestionario de Artigue y Lagrange (1997), conservando la **categorización** hecha inicialmente. El cuestionario consistió en un conjunto de 32 ítem, agrupados en tres dimensiones y sus respectivos indicadores, los cuales se muestran a continuación.

it	***Dimensión: Seguridad y confianza del estudiante en el trabajo matemático y en el uso del ordenador/DERIVE.***	***it***	***Dimensión: Motivación del estudiante por el trabajo matemático y por el uso del ordenador/DERIVE.***	***it***	***Dimensión: Compromiso del estudiante con el aprendizaje matemático y con el uso del ordenador/DERIVE***
	Indicador: Nivel de logro.		**Indicador: Sentimiento de agrado**		**Indicador: Participación en actividades matemáticas y del uso del odenador**
24	Trabajar con *DERIVE* no sirve para nada, ya que, en los examenes, es necesario escribir los cálculos y las demostraciones.	8	Trabajar con *DERIVE* es más aburrido que oir una clase de Matemática.	1	Me gustaría que en las clases de Matemática se usara una computadora.
28	*DERIVE* , lo complica todo y no ayuda a aprender Matemática.	14	Los programas para computadora ayudan a comprender las Matemáticas.	4	En las clases de Matemática se debería explicar el uso de la computadora.
29	Cuando *DERIVE* , no da una respuesta, es que el problema no tiene solución.	15	Los programas para computadora hace ver la Matemática de otra manera.	9	Sí me proponen otra clase utilizando *DERIVE* me gustaría participar.
	Indicador: Autoconcepto referente a su capacidad.	21	No me gusta utilizar los programas para computadora en clases de Matemática, por que no me gustan las computadoras.		**Indicador: Autoconcepto referente a su capacidad**
2	Para trazar gráficas de funciones, no es necesario una computadora.		**Indicador: Autoconcepto referente a su capacidad**	13	Me gusta utilizar los programas para computadora, en clases de Matemática, por que se diferencian de los cursos habitules.
6	Cuando uso una computadora, me siento más seguro de los resultados.	10	*DERIVE* me estimula la imaginación y creatividad.	17	Utilizar los programas para computadora en clase de Matemática, ahorra tiempo.
23	Con *DERIVE* , no hay que aprender a calcular, él lo hace todo.	18	Utilizar los programas para computadora en clase de Matemática es inútil, porque no prepara para los exámenes.		**Indicador: Manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos.**
	Indicador: Manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos.	20	Usar la computadora en clases de Matemática, es menos cómodo que las calculadoras.	3	Los Profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos.
5	Entiendo mejor las clases cuando las explican en la Pizarra, que utilizando *DERIVE* .	26	Con *DERIVE* , da deseos de hacer matemática.	12	Cuando uso el *DERIVE* entiendo mejor los conceptos que me dan.
7	Cuando visualizo la gráfica de una función en la pantalla de la computadorala entiendo mejor que dibujada en la Pizarra.	30	*DERIVE* hace ver la Matemática de otra manera.	25	Cuando uno usa *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, por que de otra manera se pierde mucho tiempo.
11	El procedimiento que se utiliza en *DERIVE* no lo entiendo.	27	*DERIVE,* ayuda a entender la Matemática.	31	*DERIVE* esta bien por que uno puede trabajar al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos.
32	Si se introducen correctamente los datos en *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados.		**Indicador: Utilidad para realizar trabajos y para estudios posteriores**		
		16	Utilizar programas para computadora en clase de Matemática, sirve para aprender a usar la computadora.		
		19	Utilizan los programas para computadora en clase de Matemática, es perder el tiempo.		
		22	No me gusta utilizar los programas para computadora en clases de Matemática por que no son interesantes.		

Análisis e interpretación de resultados.

Para el análisis e interpretación de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia el uso de los ordenadores se consideró el promedio de respuesta por ítem (PRI), construyendo una escala tomando el mayor y el menor PRI obtenido en el test, de tal manera que si el PRI está en el intervalo $[2{,}100;\,3{,}050]$ se considera una categoría baja y si está en el intervalo $[3{,}051;\,4{,}000]$ se considera una categoría alta.

Dimensión 1: Seguridad y confianza del estudiante en el uso del ordenador/ *DERIVE*

Al analizar los PRI en esta dimensión se observa que mientras el GE tienen una alta confianza y seguridad, la del GC es baja, esto nos lleva a pensar que la enseñanza desarrollada con los estudiantes del GE logra una mayor confianza y seguridad en el uso de las nuevas tecnologías, y pese a que ambos grupos conocen el manejo del ordenador, consideramos que la secuencia específica preparada resulta decisiva para ello. En cuanto a los indicadores, el GE asigna un valor alto al manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos y el GC un valor bajo; los dos grupos tienen un bajo autoconcepto referente a su capacidad y un alto nivel de logro, excepto para los NI de GC que es bajo. En el GE al comparar los NI con los RE se observa poca diferencia, lo cual indica que la condición de NI o RE no es determinante para delimitar la confianza y seguridad. Los estudiantes del GE con alta confianza y seguridad creen que *DERIVE* sirve para los exámenes, ayuda a aprender matemática, se sienten más seguros de los resultados al usar un ordenador, cuando visualizan la gráfica en el ordenador la entienden mejor que dibujada en la pizarra, entienden los procedimientos que se utilizan en *DERIVE*, si se introducen los datos correctamente en *DERIVE* se puede estar seguro de los resultados. En tanto que los que tienen bajo confianza y seguridad creen que cuando *DERIVE* no da una respuesta, el problema no tiene solución; con *DERIVE* no hay que aprender a calcular, él lo hace todo; y entienden mejor las clases explicadas en la pizarra que utilizando *DERIVE* (ver tabla 1)

Tabla 1

		GRUPO EXPERIMENTAL			GRUPO CONTROL		
ítem	*Indicador*	N I y R	N I	RE	N I y R	N I	RE
24	Nivel de logro.	3,214	3,143	3,286	3,045	3,000	3,200
28		3,500	3,857	3,143	3,341	3,265	3,600
29		2,857	2,714	3,000	2,773	2,794	2,700
	Promedio por indicador	3,190	3,238	3,143	3,053	3,020	3,167
2	Autoconcepto referente a su capacidad.	2,500	2,429	2,571	2,136	2,147	2,100
6		3,643	3,714	3,571	3,068	3,059	3,100
23		2,714	2,571	2,857	2,886	2,853	3,000
	Promedio por indicador	2,952	2,905	3,000	2,697	2,686	2,733
5	Manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos.	2,929	2,857	3,000	2,205	2,176	2,300
7		3,714	3,714	3,714	3,227	3,235	3,200
11		3,714	3,714	3,714	3,205	3,147	3,400
32		3,857	4,000	3,714	3,409	3,294	3,800
	Promedio por indicador	3,554	3,571	3,536	3,012	2,963	3,175
	Promedio por dimensión	3,264	3,271	3,257	2,930	2,897	3,040

Dimensión 2: Motivación del estudiante por el trabajo matemático y por el uso del ordenador/ *DERIVE*

Al analizar los PRI en esta dimensión se observa que los dos grupos están altamente motivados por el trabajo matemático y por el uso del ordenador/ *DERIVE*. En cuanto a los indicadores: el sentimiento de agrado es alto; el autoconcepto referente a su capacidad también, y asignan una alto valor a la utilidad para realizar trabajos y para estudios posteriores. El PRI del GE es significativamente mayor que el del GC; esta diferencia también se observó en confianza y seguridad, por tanto resulta pertinente el estudio a través de la división en GE y GC, en las condiciones mencionadas en la dimensión anterior. En el GE al comparar los NI con los RE se observa una diferencia significativa entre los estudiantes NI y los RE lo cual nos lleva pensar que los NI se sienten más motivados que los RE; esta diferencia no existe entre los NI y los RE del GC. De estos resultados se concluye que el tratamiento experimental es más motivante que el habitual. Los estudiantes con alta motivación creen que trabajar con *DERIVE* no es aburrido; les ayuda a comprender las matemáticas; les estimula la imaginación la creatividad; les da deseos de hacer matemática; y hacen ver la matemática de otra manera (ver tabla 2)

Tabla 2

		GRUPO EXPERIMENTAL			GRUPO CONTROL		
It	*Indicador*	N I y R	N I	RE	N I y R	N I	RE
8	Sentimiento de agrado	3.857	3.714	4.000	3.364	3.294	3.600
14		3.714	3.857	3.571	3.364	3.324	3.500
15		3.643	3.857	3.429	3.295	3.294	3.300
21		3.643	3.857	3.429	3.568	3.559	3.600
	Promedio por indicador	3.714	3.821	3.607	3.398	3.368	3.500
10	Autoconcepto referente a su capacidad	3.643	3.857	3.429	3.364	3.500	2.900
18		3.143	3.429	2.857	3.432	3.500	3.200
20		3.429	3.857	3.000	3.159	3.118	3.300
26		3.500	3.429	3.571	2.864	2.853	2.900
30		3.429	3.714	3.143	3.250	3.206	3.400
27		3.214	3.286	3.143	3.295	3.265	3.400
	Promedio por indicador	3.393	3.595	3.191	3.227	3.240	3.183
16	Utilidad para realiazar trabajos y para estudios posteriores	3.786	3.857	3.714	3.568	3.559	3.600
19		3.286	3.571	3.000	3.705	3.706	3.700
22		3.643	3.857	3.429	3.432	3.412	3.500
	Promedio por indicador	3.572	3.762	3.381	3.568	3.559	3.600
	Promedio por dimensión	3.600	3.726	3.393	3.398	3.389	3.428

Dimensión 3: Compromiso del estudiante con el aprendizaje matemático y con el uso del ordenador/ *DERIVE.*

Al analizar los PRI en esta dimensión se observa que los dos grupos se sienten altamente comprometidos con el aprendizaje matemático y con el uso del ordenador/ *DERIVE*; existe poca diferencia en el PRI entre los dos grupos, lo cual evidencia una homogeneidad en cuanto a su compromiso. Con relación a los indicadores se observa que la participación en actividades matemáticas y del uso del ordenador es alta, el autoconcepto referente a su capacidad también, y asignan una alto valor al manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos. En el GE al comparar los NI con los RE tampoco se observó diferencia significativa entre los PRI; esto también se destaca en los PRI de los NI y los RE del GC. Los estudiantes que se sienten altamente comprometidos creen que si le proponen una clase utilizando *DERIVE* les gustaría participar; cuando usan *DERIVE* entienden mejor los conceptos que le dan; cuando usa *DERIVE* es necesario organizar el trabajo bien, porque de otra manera se pierde mucho tiempo; *DERIVE* esta bien porque se trabaja al mismo tiempo en las ecuaciones y gráficos (ver tabla 3)

Tabla 3

It	*Indicador*	GRUPO EXPERIMENTAL N I y R	GRUPO EXPERIMENTAL N I	GRUPO EXPERIMENTAL RE	GRUPO CONTROL N I y R	GRUPO CONTROL N I	GRUPO CONTROL RE
1	Participación en actividades matemáticas y del uso del ordenador	3,571	3,571	3,571	3,545	3,559	3,500
4		2,857	3,000	2,714	3,182	3,147	3,300
9		3,857	3,857	3,857	3,545	3,618	3,300
	Promedio por indicador	3,428	3,476	3,381	3,424	3,441	3,367
13	Autoconcepto referente a su capacidad	3,643	3,857	3,429	3,409	3,412	3,400
17		3,857	4,000	3,714	3,386	3,412	3,300
	Promedio por indicador	3,750	3,929	3,572	3,398	3,412	3,350
3	Manejo de conocimientos y procedimientos matemáticos.	3,286	3,000	3,571	3,068	3,147	2,800
12		3,429	3,143	3,714	3,250	3,206	3,400
25		2,571	2,143	3,000	2,909	2,824	3,200
31		3,643	3,714	3,571	3,341	3,294	3,500
	Promedio por indicador	3,232	3,000	3,464	3,142	3,118	3,225
	Promedio por dimensión	3,470	3,468	3,472	3,321	3,324	3,314

Conclusiones y recomendaciones.

Limitando nuestras consideraciones a un análisis exclusivamente cuantitativo podemos concluir que:

- En líneas generales, el uso de un PAS (Programa de Álgebra Simbólica) con secuencias de aprendizaje específicas crean un entorno de aprendizaje útil para la enseñanza de las matemáticas.
- Utilizar materiales concretos elaborados con *DERIVE* para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, sin olvidar la influencia que ejercen los contenidos propios que se enseñan, pueden resultar determinantes para separar los aspectos actitudinales de los procedimentales.
- Los estudiantes se sienten altamente motivados y comprometidos. No obstante la confianza y seguridad no es la deseada, hay que mejorar el autoconcepto referente a su capacidad. La condición de nuevo ingreso o repetidores no es un elemento fuertemente significativo, no así el someter a los estudiantes a situaciones de aprendizaje que involucren nuevas tecnologías. Es recomendable utilizar la alta motivación y compromiso para mejorar la confianza y seguridad de los estudiantes; así como también diseñar estrategias en donde se utilicen software como *DERIVE* en el estudio de los conceptos matemáticos.
- Los valores observados en las dimensiones e indicadores ratifican lo mencionado por Mcleod en cuanto a que las creencias sobre la matemática y sobre sí mismo juegan un papel importante en el desarrollo de respuestas afectivas a situaciones matemáticas; además las emociones que ellos experimentan al someterlos a un tratamiento donde se utilicen nuevas tecnologías son positivas.
- Aunque los estudiantes se sienten motivados y comprometidos, los valores obtenidos, por ejemplo en autoconcepto referente a su capacidad, reflejan reacciones emocionales que han interiorizado y automatizado generando sentimientos de intensidad moderada y que a pesar de que han sido tratados con un nuevo método de enseñanza han mantenido cierta estabilidad.
- Debemos profundizar más en nuestra investigación con el objetivo de indagar más sobre las razones que provocan los valores obtenidos en las dimensiones e indicadores señalados, para lo cual se deben complementar los aspectos cuantitativos desarrollados con aspectos cualitativos basados en entrevistas con los alumnos, las cuales nos podrán permitir obtener algunas orientaciones para mejorar, en definitiva, la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos de universidad.

Referencias bibliográficas

Camacho, M.; Depool, R. (2000). Un programa de utilidades para la enseñanza del concepto de integral definida para futuros ingenieros. Ejemplos de aplicación. *Universidad, Ciencia y Tecnología.* (Aceptado para su publicación)

Depool R., (1991). Actitud hacia la matemática en los alumnos de sexto y noveno grados de educación básica y segundo año del ciclo diversificado. Tesis de grado.

Galbraith P., Haines C. (1998). Attitudes to Mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics* 36, 275-290.

Gómez P., (1997). Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes. Universidad de Los Andes. Bogota Colombia. 20 Pp.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: causes and consequences of emotional interactions, en McLeod, D. y Adams, V.M. (eds) *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, pp. 3-19 New York. Springer Verlag.

Mayes, R. L. (1998) ACT in Algebra: Student attitude and belief. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol 5, 1 pp. 3-14.

McLeod, D. (1992) Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 575-596. New York. Macmillan.

Artigue M., Lagrange J. (1997). Pupils Learning Algebra with *DERIVE*.ZDM, No.5, October, pp105-112.

GRUPOS DE DISCUSIÓN Y TRABAJO

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

La Enseñanza de la Matemática y la Globalización

Dra. María Lucía Brito Vallina
Lucy@mecanica.ispjae.edu.cu
Dra. Beatriz Deiros Fraga
bdeiros@mecanica.ispjae.edu.cu
Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría"
Cuba.

Superior
Informática

Resumen

La Globalización es un fenómeno cuyas consecuencias para la educación todavía se han de dejar sentir, por lo menos en aquellos países que se encuentran en vías de desarrollo. No obstante creemos que ella está transformando, poco a poco, la órbita de las preocupaciones en materia educativa pues los problemas y las oportunidades empiezan con mayor frecuencia a ser los mismos en todas partes. Entonces la solución a los problemas y el adecuado uso de las oportunidades para el futuro son temas que debemos abordar de manera colectiva.

El objetivo de este trabajo es reflexionar en torno a la incidencia que el actual proceso de Globalización, en el que están inmersos nuestros países respectivos, tiene sobre la práctica educativa y en particular en la enseñanza de la matemática. Se deben precisar cuales son las oportunidades que debemos aprovechar y cuales los retos a los que debemos enfrentarnos.

Preguntas como las que siguen han sido objeto de trabajo y discusión:

¿ La matemática educativa debe favorecer la preparación de los estudiantes para acceder a las oportunidades de la Globalización?, ¿ Están nuestros profesores preparados para aceptar los retos inherentes a este proceso?, ¿ El uso de las NTI en nuestras asignaturas puede favorecer el acercamiento de los estudiantes a los procesos de Globalización?. ¿ Cómo se modifican los contenidos, objetivos y métodos por la presencia de las NTI?, ¿ Debemos iniciar un proceso de convergencia de las asignaturas de matemática en los diferentes niveles educativos?.

Nuestra posición es que precisamente la matemática es una de las asignaturas que más incidencia puede tener con vistas a facilitar la inserción en el mundo actual. Pero aun predomina de manera notable el esquema de clase tradicional que en tal sentido puede ser objeto de transformación. En tal dirección, podemos pensar en elaborar un proyecto de superación para profesores de matemática que tenga en cuenta no solo el propio estudio de las características de diferentes sistemas informáticos, sino además y de manera muy importante, la influencia que su uso tendría en la adecuación de la praxis educativa a las exigencias del mundo actual posibilitando que el perfeccionamiento del profesorado no se limite al «cursillo», sino que surja dinámica y continuamente desde la propia práctica en las aulas. También puede parecer necesario que, a nivel de programa de nuestras asignaturas en los distintos niveles educativos, trabajemos de manera colectiva por abordar diseños curriculares con los requerimientos actuales y que respondan a las características e intereses de nuestros países.

Introducción

La Globalización es un fenómeno complejo que, hasta hoy, aún no ha sido objeto de una adecuada formalización, no habiendo, por consiguiente, un concepto que merezca una aceptación general. Algunos autores no obstante, como es el caso del Grupo de Lisboa y de Manuel Castells, han lanzado propuestas conceptuales dotadas de un notable grado de consistencia.

Para el Grupo de Lisboa, “es el resultado de la extensión y profundización de los múltiples vínculos e interconexiones que unen a los Estados y a las sociedades y contribuyen a la formación del sistema mundial actual”. .

También la Globalización agrupa los procesos según los cuales los acontecimientos, decisiones y actividades ocurridos en un determinado lugar del planeta, repercuten de forma importante sobre los individuos y colectividades ubicados lejos de ese lugar. El futuro de cada uno de nosotros se decide, cada vez más, lejos de nosotros.

Tal vez por esto, podríamos estar de acuerdo en que se trata de un fenómeno muy desigual en su extensión y muy diferenciado en sus consecuencias.

Siendo portadora de innegables potencialidades que puedan favorecer la vida en sociedad, no parece garantizar que el mundo futuro va a estar más unido políticamente, va a ser más equitativo económicamente, socialmente más solidario y culturalmente más rico.

Impacto en la educación

Importancia del conocimiento

Probablemente, uno de los principales efectos de la Globalización consiste en situar a la educación en la órbita de las prioridades políticas a corto y a medio plazo en todo el mundo. Dos razones permiten comprender este resurgir educacional:

- ❖ La primera es que los procesos de Globalización colocan en primer plano el valor - incluso económico - del conocimiento y, por consiguiente, de los mecanismos que permiten su progreso y su diseminación, de la investigación y de la educación en suma. En efecto, una economía en la que el conocimiento puede llegar a ser el principal recurso productor de riqueza plantea a las instituciones de educación nuevas y exigentes demandas de eficacia y responsabilidad.
- ❖ La segunda razón es que los procesos de Globalización no serían posibles, con el ritmo y extensión con que hoy se están dando, sin la concurrencia de la tecnología, incluso porque la capacidad de aprovechamiento y de desarrollo tecnológico de un país depende estrechamente de la formación de sus recursos humanos.

Ambas razones ubican a la educación en uno de los elementos cruciales para sacar el mayor partido posible en las actuales circunstancias. Y ambas exigen la configuración de sistemas educativos flexibles y adaptables a demandas y a contextos rápidamente cambiantes. Incluso es posible que, gracias a los beneficios de las redes, se contribuya al desarrollo cuantitativo y cualitativo de la educación, poniendo al alcance de la población productos y servicios educativos que en parte completarán la labor de los métodos tradicionales de enseñanza y, en parte también, abrirán nuevos caminos.

Papel de las Nuevas Tecnologías de la información

El desarrollo sin precedentes de las tecnologías de la información y la creación de INTERNET dio un nuevo impulso al proceso de Globalización, constituyendo para algunos teóricos, el propio núcleo de la misma.

Que las nuevas tecnologías conllevan implícitamente cambios constantes y vertiginosos es una afirmación obvia, pero repetida hasta la saciedad. Pero no se trata, ciertamente, de remozar una educación centrada en los recursos de información como soporte del conocimiento. Se trata de una educación orientada a tres logros fundamentales en las personas:

a) una cultura esencial extensiva o amplia,
b) una formación especializada intensiva y restringida a cierta área del conocimiento, y

c) una capacidad de aprendizaje para toda la vida o de largo alcance, antes reseñada parcialmente en la frase "aprender a aprender". El nuevo sistema universaliza la formación permanente en cuanto no existe prácticamente ninguna profesión donde no sea imprescindible una constante actualización de conocimientos. Si antes el periodo de formación terminaba en una edad concreta, ahora es de por vida.

Sin embargo, podemos preguntarnos si se ajustan las características de las nuevas tecnologías informáticas (NTI) a las necesidades de todos los países teniendo en cuenta que estas tecnologías y, lo que aún es más importante, los programas multimedia que se utilizan por medio de ellas son producidos en el marco de una economía globalizada y, probablemente por esta misma razón, poco predispuesta a aceptar la diversidad cultural. Más allá, incluso, podría llegarse a la convicción de que a través de estos productos y tecnologías se transmiten los valores y contenidos culturales propios de aquellos sistemas y sociedades en que se han diseñado y producido, y que no son siempre, necesariamente, valores o contenidos incontestados. Podemos entonces preguntarnos si lo más conveniente resulta crear nuestras propias herramientas.

Diseño curricular

En los últimos veinte años se ha producido un ingente movimiento de convergencia curricular cuyos principales componentes son los siguientes:

- la definición de áreas de contenidos equivalentes en todas las culturas, pero con un claro origen europeo o, más concretamente, eurocéntrico;
- la identificación de un cierto número de contenidos considerados patrimonio imprescindible de cualquier ciudadano en una economía globalizada como, por ejemplo, la lengua inglesa o la informática;
- la difusión de un marco psicopedagógico único, centrado en las actividades de enseñanza y aprendizaje concebidas como procesos esencialmente psicológicos que tienen lugar independientemente de las variables del contexto en que se producen, sean éstas culturales, sociales o económicas.

Se trata, sin duda, de un proceso que facilita la circulación de ciudadanos entre países distintos y el adecuado reconocimiento de las calificaciones ya alcanzadas. Parece entonces necesario que también a nivel de programa de nuestras asignaturas en los distintos niveles educativos trabajemos de manera colectiva por abordar diseños curriculares con los requerimientos actuales y que respondan a las características e intereses de nuestros países.

Pero además es imprescindible la consideración de las NTI como elementos integrados en las estrategias de apoyo a la innovación educativa. La informática y los medios audiovisuales se legitiman por su sometimiento a los procesos y dinámicas que definen el actual cambio del sistema educativo y la innovación curricular. Pero ¿que sistemas debemos incorporar a nuestros programas de matemática? , ¿ Cómo se modifican los contenidos, objetivos y métodos por la presencia de las NTI? . Esto comporta una capacitación metodológica adecuada al sistema globalmente considerado, y el cultivo de una actitud permanente de perfeccionamiento profesional.

Formación de los profesores

La renovación de la enseñanza de la ciencia y la tecnología, por vías formales e informales, no es posible sin una adecuada formación del profesor. La formación inicial y permanente de los docentes de ciencia y tecnología tendrá que vincularse crecientemente a los ámbitos de creación de sus respectivas disciplinas, pues su tarea esencial consiste en enseñar una ciencia dinámica (viva, incompleta y en permanente cambio)

La formación del profesor debe ser no sólo técnica, sino también teórica, puesto que el diseño, aplicación y evaluación —consciente y competente—así lo requieren. Aclaramos en este punto que el profesor debe ser capacitado no para ejecutar planes ajenos, sino para construir su propia práctica de enseñanza y definir los criterios en que se apoya, para justificarlos. Deberá, pues, valorar con sumo escrúpulo la relevancia social y cultural de las NTI, así como la pertinente función de estos medios tecnológicos en cuanto contribuyen al enriquecimiento de los modos de adquisición del conocimiento y actitudes de los alumnos.

Por eso consideramos que la formación inicial y el perfeccionamiento del profesorado son elementos fundamentales para una inserción de las NTI en el sistema educativo.

Debe tenerse en cuenta que, con la creación de Internet y la consiguiente interconexión de las personas e instituciones es posible que un estudiante (y por lo tanto un profesor y cualquier institución educativa) tenga acceso a la información mas reciente o a la persona mas destacada en el campo profesional, académico o de investigación, de cualquier lugar del mundo. Por otro lado, si bien el uso de la computación contribuye a que el alumno aprenda según su propio ritmo, ello mismo genera una altísima diversidad en un aula, diferente de la que tiene lugar en una clase tradicional. El profesor debe estar preparado para ello y significa un gran reto con respecto a su proceder actual. Sin embargo, en la formación profesional del docente no siempre se incluyen asignaturas específicas que aborden la didáctica y metodológicas del uso de las NTI en las aulas.

Sin embargo, otros autores señalan que el verdadero problema de la aplicación de las nuevas tecnologías en educación no consiste tanto en la falta de preparación de los docentes, sino en el hecho de que los planteamientos pedagógicos que se difunden en estos planes de formación no tienen sentido en entornos sociales y económicamente muy distantes de aquellos en los que los citados planteamientos fueron generados.

Por esta razón, es preciso insistir en la necesidad de explorar las potencialidades de las nuevas tecnologías en circunstancias y sectores críticos, antes que forzar la adopción de planteamientos descontextualizados. Y, sobre todo, dotar a las comunidades educativas de las herramientas necesarias para crear sus propios recursos de forma interconectada con otras comunidades del propio país, de la región o del mundo entero, algo que la tecnología, afortunadamente, cada vez hace más fácil.

Por otra parte, la enorme potencia que exhiben las tecnologías de la información y de la comunicación no deben acabar conduciendo la escuela a un horizonte en el que estas tecnologías todo lo pueden, sino a un modelo en el cual ellas están al servicio de las necesidades de las personas y en el que el conocimientos es el recurso mas preciado.

En cualquier caso, se debe pensar en diseñar un proyecto de superación para profesores de matemática que tenga en cuenta no solo el propio estudio de las características de diferentes sistemas informáticos, sino además y de manera muy importante, la influencia que su uso tendría en la adecuación de la praxis educativa a las exigencias del mundo actual. De este modo, se posibilita que el perfeccionamiento del profesorado no se limite al «cursillo», sino que surja dinámica y continuamente desde la propia práctica en las aulas.

El programa de perfeccionamiento, queda así sometido a los procesos que parecen definir cualquier cambio en el sistema educativo. Su finalidad fundamental es transformar la práctica de enseñanza incidiendo sobre el pensamiento y los modos de acción del profesor. De este principio fluyen los objetivos, contenidos y metodología.

La escuela se transforma

La escuela se ve con dificultades para asimilar este proceso y sigue anclada en la transmisión de conocimientos y patrones culturales a través del mensaje escrito. Estamos hablando de una escuela diseñada y pensada para una sociedad moderna, agrícola e industrial. Una escuela que debe conocer y sacar sentido educativo a unas herramientas que, como apuntan diversos analistas, están ya desarrollando nuevas formas de analfabetismo.

Por otra parte, muchas personas y no pocas instituciones han confundido a Internet como un inmenso e inagotable deposito de información, como una biblioteca electrónica, como "la lámpara maravillosa de la información" y muchos conciben a Internet como "un lugar que contiene todo". ¿ Desaparecerán los libros?

Si bien es cierto que las redes que están entrelazadas para formar Internet, contienen mucha información almacenada en sus discos duros, ello no define el carácter y filosofía de Internet. Se trata, por el contrario, de una vocación de servicio y de cooperación. Los recursos de información de los que unos disponen, son ofrecidos a una comunidad más amplia, así como otros hacen lo mismo para retribuir tales intenciones y potenciar este universo de recursos de información que esta conformado por documentos, personas e instituciones. El principio, entonces, es compartir.

Tenemos derecho social a "tomar" en correspondencia con nuestra obligación moral de "ofrecer". Y sobre todo, de informar acerca de nuestras características, de nuestro contexto y de nuestras dificultades. Donde hay un porciento alto de analfabetismo Internet puede no tener el nivel de prioridad en el sistema educativo que tiene en un país donde eso no constituye un problema.

Examinar las perspectivas generales de Internet y la educación, puede llevarse a cabo en cuatro dimensiones:

- la comunicación mediada por la computadora,
- la realización de experiencias de interconexión educativa,
- las actividades de información, investigación y publicación, y
- el desarrollo de proyectos de colaboración.

Conclusiones

Puede parecer que la Globalización es un fenómeno cuyas consecuencias para la educación todavía se han de dejar sentir, por lo menos en aquellos países que se encuentran en vías de desarrollo.

No obstante, creemos que ella está transformando, poco a poco, la órbita de las preocupaciones en materia de política educativa: no sólo los problemas empiezan con mayor frecuencia a ser los mismos en todas partes como también por efecto de la Globalización, el abanico de posibles respuestas desde la política educativa se va reduciendo.

No cabe duda que el auge de las NTI y la creación de Internet han sido decisivos en este proceso. Pero uno de los obstáculos que hay que salvar es el de la nueva colonización procedente de los países más desarrollados: el contenido mayoritario que circula en Internet está en inglés y responde a una concepción de la globalidad.

Internet también está aumentando, pese al esfuerzo de muchas organizaciones, las diferencias entre norte y el sur. Ya hay quien proclama que el acceso a la Red debería estar recogido en los derechos fundamentales de todo habitante del planeta: una cuestión complicada, sin duda. Debemos estar conscientes de la fractura social que puede provocar la desigualdad en el acceso a la tecnología. Las siguientes cifras son un ejemplo de ello:

- ❖ El 20 % más rico de la población mundial acapara el 93.3% de los accesos a esta red de redes.
- ❖ El tercer mundo, con el 80% de la población mundial, sólo tiene acceso al 40% de la radio, al 15% de los periódicos, teatros y libros, al 50% de los televisores, al 3% de Internet y al 6% de las líneas telefónicas.
- ❖ Más de la mitad de los terrícolas jamás ha hecho una llamada por teléfono y parece poco probable afirmar que lo harán en el siglo XXI.

En este contexto es evidente que la relación entre los procesos de Globalización y los sistemas educativos plantea importantes interrogantes, que han sido examinadas a lo largo del trabajo y que deben ser objeto de atención permanente. La matemática educativa y nuestros profesores pueden y deben jugar un papel importante con vistas a alcanzar el necesario cambio de paradigma en el terreno docente educativo que permita lograr un aprovechamiento eficaz en términos sociales y pedagógicos:

Quienes insisten en aprender "cada vez más" en lugar de "cada vez distinto", caminan mirando al pasado.

Referencias bibliográficas

Palomino Iparraguirre Luis. “Internet y Educación”. 1999.

Egurza Graciela”. La Computadora, el Docente, el Informático y el Niño”. 1999

Llorensi Cerdà Francesc.” La Gestión del conocimiento en entornos educativos”. Apuntes para el desarrollo de un modelo de comunicación basado en las tecnologías de la información. 1999.

Equipo Ciberaula. La Alfabetización y Sociedad de la Información. La Escuela. 1999. Aguaded Gómez José Ignacio. Grupo Pedagógico Andaluz «Prensa y Educación» Universidad de Huelva. “La Televisión, los Niños y las Aulas”. 1999.

Francesc Pedró - Rolo José Manuel. “Los sistemas Educativos Iberoamericano y la Globalización”. 1999.

Pérez, Beatriz. “Padres y niños”. 1999.

Barlamm Aspachs Ramón. Resituar la Escuela, ¿Hacia un Nuevo Modelo Educativo? Reflexiones en la Puerta del Milenio. 1999.

Manzelli Paolo. “Tiempo de la Computación”.1999.

Periódico Granma. República de Cuba. Marzo, 2000.

Grupo de Discusión con Profesores de Educación Primaria

Coordinado por María Leticia Rodríguez González
Cinvestav.- México

El espacio que brindó la Relme 14, para reunirnos maestros de educación primaria, nos permitió discutir y reflexionar sobre las dificultades y posibilidades para eficientizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En esta reunión participaron profesores de México, Panamá, Costa Rica y Chile, quienes después de compartir y confrontar las formas de enseñar matemáticas, concluimos:

1. Que en nuestros respectivos países los enfoques constructivas han primado a los proyectos educativos; sin embargo, el problema de la falta de actualización de los maestros ha obstaculizado que sean interpretados de acuerdo con su sustento teórico.
2. Los paradigmas que se han venido construyendo alrededor de la enseñanza en su sentido histórico, se han caracterizado por el cruzamiento de las prácticas tradicionales de enseñar con las nuevas propuestas metodológicas, lo que implica un compromiso de los maestros para buscar los espacios de actualización y capacitación por parte de los profesores.
3. Sin embargo, las estrategias de actualización se han ido implementando en diferentes formas y estrategias en cada país. Así, en algunos hay un gran apoyo, que les facilita a los maestros este ámbito de su formación pedagógica, mientras en otros, dicha capacitación tiene que ser subsidiada por los mismos docentes, motivo por el cual esta tarea resulta ser casi imposible.
4. En el caso concreto de México, se cuenta con una gran variedad de materiales bibliográficos, de apoyo como recursos materiales y otras estrategias que son puestas a disposición de los maestros a través de diferentes modalidades: cursos, talleres, conferencias, bibliotecas, grupos de trabajo, asesoría directa a los maestros; sin embargo, ésta última es más difícil por que la cantidad de asesores es insuficiente para cubrir esta necesidad.
5. En el uso de materiales didácticos, que fueron diseñados para poder auxiliar la tarea docente, es poco comprendida y explotada por los profesores de grupo. Afortunadamente el trabajo se ha iniciado, lo cual compromete al maestro a buscar los medios para usarlos y compartirlos. Además de que es importante involucrar a los directivos para que sean ellos quienes promuevan el avance de estos progresos pedagógicos.
6. El principal desafío al que se enfrenta la enseñanza, es el desarrollo vertiginoso de la tecnología, pues muchas de las veces lo ha sorprendido y a veces ha superado al maestro.
7. Todo lo anterior nos llevó a reflexionar que a pesar de las dificultades que generan los cambios de estos nuevos paradigmas, son procesos que se están dando lentos y complejos.

El Papel de la Sociocultura en la Didáctica de la Matemática

Francisco Cordero Osorio, Cinvestav-IPN, México
fcordero@mail.cinvestav.mx
Bronisuawe Czarnocha, EHCC, CUNY, EUA
Leonora Díaz, Pontificia Universidad Católica de Chile
Verónica Díaz, Universidad de los Lagos, Chile
Germán Muñoz, UACH. México
Alvaro Poblete, Universidad de los Lagos, Chile.

El Grupo de trabajo con la intencionalidad de ir conformando la identidad latinoamericana de la disciplina didáctica de las matemáticas, se sometió a un ejercicio: analizar la componente sociocultural en diferentes perspectivas teóricas en la didáctica de la matemática latinoamericana. El análisis se centró fundamentalmente en dos cuestionamientos: a) sobre la naturaleza del objeto de estudio y b) sobre los diferentes significados de la componente social. Ante la diversidad de las perspectivas se advirtió un interés común: la reorganización del contenido matemático escolar a la luz de la organización social y cultural que necesariamente se da en las instituciones educativas.

Introducción

El papel de la sociocultura en la didáctica de las matemáticas ha marcado una evolución en el campo. La incorporación de la componente social ha ayudado a entender que es insuficiente considerar al estudiante sólo como sujeto cognitivo, pero que tampoco basta tomarlo como sujeto epistémico, sino más bien hay que considerar, en la medida de lo posible, toda su complejidad humana del sujeto. Es decir, no basta con elaborar explicaciones de los procesos mentales cuando el estudiante está interactuando en un medio, sino también se requiere elaborar explicaciones que reconozcan la relación esencial entre esos procesos y sus escenarios culturales, históricos e institucionales.

Las aproximaciones teóricas que se han desprendido de esta premisa son muchas y distintas. La diferencia consiste en la forma de relacionar la componente social con los modelos teóricos ya existentes. Hay aproximaciones que formulan un cambio de marco teórico, donde la componente social es privilegiada por el modelo teórico, otras aproximaciones, formulan un modelo integracionista, donde la componente individual y social juegan el papel de una relación dialéctica. Sin embargo, aparecen otras aproximaciones, donde los modelos teóricos existentes son ampliados al incorporar la componente social como una dimensión.

Todo ello en conjunto brinda una nueva visión, la cual consiste, en primer lugar, en haber identificado que los aspectos cognitivos y epistemológicos son modelizaciones de la actividad matemática, pero que la incorporación de la componente social, en menor o mayor medida, quiere decir que los aspectos tanto cognitivos y epistemológicos deberían ser modelizaciones de la actividad humana. Este planteamiento lleva necesariamente a un cuestionamiento de las teorías de aprendizaje de las matemáticas, donde las tesis e hipótesis sobre la construcción del conocimiento matemático usualmente están sustentadas por el lenguaje de los objetos. El cuestionamiento es, si el lenguaje de los objetos se sostiene ante la modelización de la actividad humana o habrá que entender el lenguaje de la actividad humana que le ha permitido construir conocimiento matemático en los procesos escolares

El grupo de trabajo tuvo como tarea principal atender tal cuestionamiento considerando dos aspectos al seno de la disciplina: a) la naturaleza del objeto de estudio y b) los diferentes significados de la componente social que necesariamente se construyen. Esto a través de un programa de discusión que consideró inevitablemente perspectivas de corte piagetiano, vygotskiano y sociológico: con enfoques al aspecto social en las aproximaciones cognitivas de la didáctica de las matemáticas, la construcción social del conocimiento matemático y la dimensión sociocultural como una ampliación de la problemática de la didáctica de la matemática, respectivamente.

A continuación presentamos el contenido temático, en forma resumida, de los aspectos relevantes de la discusión.

Los contextos y la realidad social

La sociedad se vincula con el diario vivir y muchas de las vivencias que realizan nuestros alumnos para el aprendizaje de la matemática están en función a los contextos de situaciones o problemas que se presenten en el aula.

Los contextos se emplean en diferentes formas en la enseñanza de las matemáticas. De manera tradicional, se utilizan con los alumnos luego que han visto la matemática formal. Es este corte vertical que se da en la enseñanza, el alumno aprende primero matemática abstracta y formal, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en contexto. Los contextos, de hecho, deben ser presentados no sólo en la fase de aplicación, sino también en las fases de exploración y de desarrollo.

Los contextos motivan al alumno. Este comprende por qué las matemáticas son útiles y necesarias en la sociedad y en la vida diaria. Se dan cuenta por qué las aprenden y despiertan su curiosidad y creatividad.

Contextualización de los problemas matemáticos

Los contextos tienen relación con el ámbito que da contenido a la situación problemática planteada. Ellos hacen referencia al campo del conocimiento o de aplicación de la situación propuesta desde la perspectiva de la representación, está considerada en el sentido más amplio de esta palabra.

Contextualizar el conocimiento matemático no significa simplemente simularlo en el aula con cualquier actividad cotidiana, sino conocer las representaciones que de ese conocimiento se hacen los estudiantes y conocer el significado de sus concepciones, además de ver cómo las hacen funcionar en el ámbito elegido.

Este contexto puede ser descrito como un continuo entre dos extremos: contextos muy específicos, a menudo artificiales, carentes de significado e interés para el estudiante, que no pueden ser ampliados sin modificación importante del problema y *contextos o ámbitos muy amplios*, no necesariamente matemáticos, que con motivo de la resolución de problemas pueden ser elaborados o explorados y que son a menudo elementos de motivación para los alumnos o factores de integración de la actividad matemática en otras disciplinas.

Tradicionalmente, tanto en investigación psicológica como en la práctica pedagógica, se ha considerado que el conocimiento es independiente del contexto en el que se adquiere, y que una vez adquirido un determinado conocimiento, éste puede ser aplicado a cualquier situación. Sin embargo, trabajos de Lave y Scribner en el campo de la investigación sociocultural han puesto de manifiesto, por ejemplo, que las mismas personas que fracasan en tareas clásicamente escolares de matemáticas, pueden ser muy competentes en situaciones de la vida diaria que implican cálculos matemáticos idénticos. Es decir, el conocimiento se construye en estrecha relación con los contextos en los que se usa.

Esto conduce entonces a pensar que una causa por la que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de los problemas matemáticos, no tiene relación sólo con el carácter abstracto de la disciplina, sino más bien con la didáctica y la forma de enseñanza con que se proponen, a veces tan alejados de los contextos de uso y de toda actividad cotidiana.

Lo importante es investigar qué tipos de contextos presentar al alumno, cuando y cómo. En este sentido, la resolución de problemas y su relación con los contextos, es la que debe constituir uno de los objetivos claves del sistema escolar, habilitando a los alumnos a enfrentarse con tareas no previstas y a encontrar algún tipo de respuesta adecuada. Esta consideración respecto a la actividad de resolución, ha sido objeto de reconocimiento en diversas reformas educacionales en América Latina. En particular en Chile, constituye un elemento fundamental en la enseñanza actual de la matemática en los diversos niveles, ya que gran parte de su justificación la reciben de su necesidad de aplicación y utilidad en la vida cotidiana (Díaz, Poblete, 1999). Estas consideraciones a las concepciones de problema y sus relaciones con los contextos, ha sido posible ampliarla con una distinción entre tipos de problemas de contextos en las áreas de cálculo diferencial, álgebra y geometría.

Al respecto, hemos elaborado una clasificación que considera el contexto del problema y en función a ella, efectuamos una diferenciación y categorizamos los problemas según su contexto en problema Real, Realista, Fantasista y Puramente Matemático (Díaz, Poblete, Proyecto Fondecyt N°1990558, 1999).

Contextos de los problemas

Real: *un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del estudiante.*
Realista: *un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de ella.*
Fantasista: *un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.*
Puramente matemático*: un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.*

Matemática y Cultura

Se ha definido a la matemática como un sistema cultural, como una subcultura de la cultura de "nuestra aldea global" (Wilder, R. Mathematics as a cultural system, Oxford, Pergamon press, 1981), entendiéndose por cultura a "una colección de costumbres, rituales, creencias, instrumentos, entre otros, poseídos por un grupo de personas que están relacionados por algún factor asociativo, tales como pertenencia común a una tribu primitiva, contigüidad geográfica, u ocupación común"

De hecho, de acuerdo a esta definición, la matemática como todo sistema es cambiante. Los contenidos de enseñanza cambian y la didáctica toma posiciones respecto a ellos. Por ejemplo:

- El Bourbakismo de una época y su imposición del lenguaje conjuntista en forma hegemónica en detrimento de los lenguajes representacionales que alimentara o afinaran la interpretación geométrica.
- La repercusión que en la actualidad puede generar la aceptación del computador, como producto de representaciones visuales, si su empleo no va acompañado de lucidez crítica necesaria.
- Aceptaciones de nuevas formas en pruebas matemáticas (a través del computador u otras).
- Aparecimiento de nuevos elementos, lenguajes o conceptos que sean necesarios conocer y con interés de aprender (fractales, otros).
- La aproximación constructivista en la didáctica de la matemática desde el punto de vista epistemológico, o bien la propia etnomatemática como corriente de la sociología del conocimiento científico.

Estas transformaciones, consideradas como fenómenos culturales, juegan un papel relevante en la dinámica de los procesos de avance de la matemática, y en las necesarias regulaciones de su didáctica.

Matemática, escuela y sociedad

En el año 1900, Hilbert propuso diversos problemas a los matemáticos y la mayoría de ellos se ha ido resolviendo con el tiempo, ya sea por la demostración de su invalidez o de su imposibilidad.

La imposibilidad más importante fue la de Göedel con su teorema de la incompletitud, al afirmar que no hay ningún medio de demostrar todas las verdades y axiomas de las matemáticas.

Lo anterior, nos lleva a indicar la disciplina matemática como aquella, que al igual que otras, se inserta en nuestra cultura por creación del hombre y que posee fuertemente lazos con otras, para otorgar una necesaria formación al individuo. Al interior de los contenidos, esta es una de las características esenciales, la interdisciplinaridad.

Otra de las características con relación a la cultura, está en la exploración de nuevos aspectos aplicables a la formación. Entre estos destacan, la teoría de decisiones, la informática, la teoría del caos, el estudio de los fractales y otros. Luego, tenemos el lenguaje matemático, el cual continúa siendo un problema entre los individuos, el que es aplicado en la vida diaria y necesario en nuestra comunicación.

Respecto a su didáctica y formas de enseñanza que se insertan en la cultura y en situaciones de aula, se destacan desde las descubiertas de Polya hasta la heurística de Lakatos, que hace aflorar y utilizar el nivel consciente de la matemáticas conocidas a nivel inconsciente.

Por otra parte, aspectos relacionados con la cultura o la culturización del individuo, nos llevan a indicar que la imagen popular de las matemáticas es negativa, extraña para muchos ya sea en el ámbito profesional como personal. Se asocian a sentimientos de ansiedad, fracaso, actitud negativa, fobia. No obstante, se indica que cuando se habla de educación matemática, es algo muy importante para el individuo por su rol social que cumple, es paradójica.

Así en las escuelas y colegios continuamos dándole más énfasis al hacer que al pensar. Lo que sin duda necesitamos es formar a la persona, como individuo libre y autónomo en su accionar y nuestra disciplina, al igual que otras, debería ofrecer las oportunidades que los alumnos puedan aprender a aprender.

Mediación social en la didáctica del cálculo integral

Todo proyecto didáctico en tanto proyecto social (Chevallard, 1991) tiene asociado un contexto sociocultural contemporáneo específico, el cual por una especie de necesidad funcional intenta no sólo generar nuevo conocimiento científico sino también transmitir el conocimiento científico construido por generaciones anteriores. En ese sentido la Matemática Educativa en tanto disciplina científica se encarga de propiciar las condiciones para transmitir el conocimiento científico a través de la institución escolar. Sin embargo, esta tarea, tremendamente compleja, origina una serie de fenómenos que van desde la selección del conocimiento a enseñar hasta el predominio de ciertas relaciones entre profesor, estudiantes y saber matemático.

En Matemática Educativa un punto muy importante es su carácter interdisciplinario, lo cual es una condición necesaria en tanto disciplina científica, por ejemplo, para construir una Epistemología científica del conocimiento científico y para construir una Psicología científica de la conciencia humana, como se propusieron Piaget y Vygostki respectivamente, era necesario luchar siempre contra los reduccionismos y fronteras disciplinares. Sin duda esa visión es uno de los aspectos más relevantes de estos dos acercamientos.

En el sentido anterior, la unidad de análisis[1] juega un papel crucial. Por ejemplo, Wertsch (1993) toma como unidad de análisis a la "acción mediada" lo cual permite que sea un puente entre la Psicología y la Semiótica y, a través de la Semiótica, entre la Psicología y las demás Ciencias Sociales; sin embargo, la disciplina de referencia es la Psicología. La pregunta obligada es ¿cuáles podrían ser unidades de análisis en Matemática Educativa que permitan tender puentes con las disciplinas limítrofes?

Dentro de la Matemática Educativa una problemática fundamental consiste en caracterizar cuáles son las causas de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en el funcionamiento del sistema didáctico, con referencia al Cálculo integral (Muñoz, 1999c; Muñoz & Cordero, 1998). Y así poder investigar las condiciones para propiciar la relación. Al respecto la unidad de análisis nos advierte sobre el riesgo de realizar un análisis de lo conceptual y lo algorítmico por elementos y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación, lo cual podría conducir a ciertos errores. Nuevamente la pregunta obligada es ¿cuál es la unidad de análisis que permitiría tender un puente entre lo Conceptual y lo Algorítmico?. Esta pregunta implica mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica.

Nuestras investigaciones se han anclado fuertemente en la Epistemología genética y desde allí nos ha conducido, en cierto modo, a la misma visión; es decir, nos ha permitido alejarnos de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra), y enseguida buscar condiciones de relación a partir de los dos objetos. Más bien analizamos las relaciones a partir del objeto de conocimiento común[2] a lo Conceptual y a lo Algorítmico.

Nos estamos guiando por las siguientes hipótesis:

i) La relación entre lo conceptual y lo algorítmico que se presenta en la *génesis histórica* se conservará en lo que hemos llamado la *génesis contemporánea*, pero su naturaleza será distinta.
ii) El caracterizar, en lo más posible, la *génesis contemporánea* de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico permitirá identificar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial* de dicha relación, en el funcionamiento del sistema didáctico en tanto sistema abierto.

La primera hipótesis nos guiará en la pregunta: cómo se constituye un marco epistémico contemporáneo cuando los estudiantes interactúan con situaciones problema en tanto objeto de conocimiento común derivado del marco epistémico de Newton. Por lo cual es indispensable analizar la contribución que proviene de la componente social; la cual estudiaremos a través de caracterizar las prácticas sociales comunicativas que implica considerar como unidad de análisis a la *acción mediada* (en el sentido de Wertsch, 1993). Y la contribución que proviene de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo; la cual estudiaremos a partir de analizar las interacciones entre el objeto de conocimiento común y los estudiantes, tomando como unidad de análisis al *esquema* (en el sentido de Vergnaud, 1990a) que implica centrar la atención en la *acción.*

Sin embargo, no realizaremos un análisis por separado de la *acción* y la *acción mediada*, lo cual estaría en franca contradicción con nuestros supuestos teóricos, sino más bien pensamos que la noción de *mediación social* es la que nos permitirá analizar la interacción de

[1] "...Por *unidad* entendemos el resultado del análisis que, a diferencia de los elementos, *goza de todas las propiedades fundamentales características del conjunto* y constituye una parte viva e indivisible de la totalidad. No es la fórmula química del agua, sino el estudio de las moléculas y del movimiento molecular lo que constituye la clave de la explicación de las propiedades definitorias del agua. Así, la célula viva, que conserva todas las propiedades fundamentales de la vida, definitorias de los organismos vivos, es la verdadera unidad del análisis biológico..." (Vygostki, 1982, pp. 19-20).

[2] Muñoz, G. (1999a). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración*. Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. pp. 14-15. México.

la componente social con la componente intrínseca al sistema cognoscitivo, específicamente a través de caracterizar los tipos de mediación social, a saber:

a) Distinguir el papel de los instrumentos de conocimiento del papel de los instrumentos mediadores.
b) Distinguir mediación social vía la situación problema (en tanto objeto de conocimiento) de la mediación social vía la guía del profesor y la mediación social vía las interacciones de otros estudiantes con la situación problema.
c) La mediación social que se presenta de un escenario sociocultural (por ejemplo la educación formal) al plano interpsicológico y de allí al plano intrapsicológico.

Aun más en Matemática Educativa es necesario tener control de esas constituciones de marcos epistémicos en la sociedad contemporánea vía la institución escolar. Para lo cual, la segunda hipótesis nos guiará en el sentido que entre más precisemos los tipos de mediación social ganaríamos precisión acerca de: en que momento la intervención del profesor es necesaria, en que momento es necesaria la interacción estudiantes-situación problema y en que momento se le debe ceder el paso a los procesos comunicativos. Sin embargo, una pregunta obligada de importancia capital y tremendamente compleja es ¿Cómo llevar a cabo dichos tipos de mediaciones?.

De manera que, nuestros hallazgos implicarán para la Matemática Educativa una vez más la imposibilidad de construir métodos generales de enseñanza de la matemática porque la mediación social depende del objeto de conocimiento específico, de las prácticas sociales comunicativas específicas en un contexto sociocultural y de la naturaleza del proyecto didáctico en tanto proyecto social.

Por la naturaleza de este proyecto de investigación que trata sobre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del Cálculo integral ha sido necesario realizar una interacción, en sentido estricto, entre la Epistemología genética y una aproximación sociocultural a la conciencia humana al seno de la Matemática Educativa en tanto disciplina de referencia.

Las confluencias: los aprendizajes matemáticos

Lo que antes se separaba, ahora se inter-relaciona. En efecto ahora se visualizan sujetos que adquieren conciencia de sí mismos tanto como producto y, al mismo tiempo, como productores de la historia, de la cultura. Por su parte, el fenómeno educativo se visualiza como un conjunto de interacciones constituidas por los distintos actores sociales, que se relacionan entre sí, por medio de patrones culturales, discursos, representaciones y normas que los trascienden. Interacciones que movilizan una red de significaciones sociales que dotan de sentido a las acciones de los sujetos individuales, comprometiendo en este proceso, pensamientos, representaciones, sentimientos y acciones.

La realidad social se considera como construyendo una totalidad de sentido, una estructura de significaciones sociales, que se manifiesta en sus situaciones particulares, cristalización de múltiples determinaciones sociales, institucionales y personales. Lo particular, el hecho singular con el cual nos conectamos, se constituye en una síntesis –una cristalización- de todas esas determinaciones. De este modo un episodio encierra una trama de relaciones en la cual dicho episodio se encuentra inserto, y que explican su particular emergencia u ocurrencia. Objeto válido de investigar para las ciencias humanas lo constituye entonces conocer las epistemologías de las prácticas educativas. Ello es coherente con una concepción de realidad social donde los sujetos, por el hecho de formar parte de una trama compleja de interacciones, se encuentran involucrados en una estructura dinámica de significados sociales. Del mismo modo aparece válido indagar en las epistemologías de las nociones cotidianas que portan los estudiantes al ingresar al aula.

Cruzando los códigos de base macroscópica-microscópica y objetivo-subjetivo es posible construir cuatro ámbitos de análisis para los fenómenos humanos en sus distintos niveles de expresión, los que, en una perspectiva constructivista, se interactúan dialécticamente (Ritzer, 1993, p. 463). Estos son: lo macro-objetivo que tiene como propósito dar cuenta de la sociedad, el lenguaje, los sistemas educativos, el discurso matemático escolar; lo macro-subjetivo, responde a los patrones culturales, las normas y los valores; lo micro-objetivo, se ocupa de la epistemología de la práctica de los sujetos, esto es indaga en las pautas de conducta, en la acción y en la interacción de los sujetos, y lo micro-subobjetivo, que se ocupa de la construcción de la realidad que hacen los sujetos en sus distintas facetas.

Asumiendo el marco anterior, en un primer ejercicio tentativo, se plantean algunas preguntas que desafían a las nociones de objeto matemático y aprendizaje matemático. Por ejemplo, a) del escenario macro-objetivo: Vygostki releva el rol del lenguaje. A los objetos matemáticos del aula se acede desde un lenguaje cotidiano. Los cuestionamientos son: ¿cómo se estructura el lenguaje cotidiano que nuestros alumnos traen al aula y cómo interactua con el lenguaje de los objetos matemáticos?; b) del escenario macro-subjetivo: Patrones, normal y valores. Se cuestiona: ¿cuáles son las implicaciones sobre los objetos matemáticos en el aula?; c) del escenario micro-objeto: Las pautas de conducta, en la acción y en la interacción de los sujetos. El cuestionamiento es: ¿cuál son las relaciones entre el rol establecido por el docente y los propósitos del estudiante en el aula de matemáticas?, y d) del escenario micro-subjetivo: solo se cuestiona ¿construcciones de realidad de los estudiantes en la deriva del aula de matemáticas?

Consideraciones sobre Vygostki en el contexto del debate Piaget-Vygotski

Cada vez es más pronunciada la necesidad de establecer una síntesis (en tanto marco teórico) entre las aproximaciones psicogenéticas y socioculturales en la disciplina de la didáctica de la matemática del mundo, sobre todo existe un particular énfasis en los países anglosajones.

En ese sentido, se hace una reflexión tomando en cuenta, posiblemente, los rasgos más significativos que las hace diversas y aquellos que las hace comunes, y cómo éstos pudieran orientan la síntesis.

Aproximación psicogenética. Piaget postula que el lenguaje y la lógica constituyen formas de intercambio intelectual, que la realidad básica está fundamentada en las relaciones entre individuos. Sin embargo, las influencias recíprocas se pueden entender más fácilmente como una unión directa, “la suma total”, de las interacciones individuales. El elemento social de Piaget se limita al total de los elementos individuales. No alcanza la estructura sociocultural global sin el elemento individual tan estrechamente ligado al elemento social mismo. Eso constituye la limitación teórica del análisis psicogenético de Piaget, es decir, el elemento social que surge de cada análisis carece de elementos sociales como variable de análisis independiente. Por otra parte, Piaget postula que el lenguaje es necesario y es a través de éste que describimos los factores sociales. Sin embargo, lo que no pudo realizar, a través de este postulado, fue que el lenguaje mismo tendría un rol formativo recíproco en el desarrollo del individuo. Efectivamente, él vio el lenguaje como una herramienta de pensamiento, no vio la posibilidad de entender que el pensamiento podría ser originado en y a través del lenguaje.

Aproximación sociocultural. Vygostki introduce al elemento social como variable independiente del desarrollo vía el lenguaje, simultáneamente con la componente del individuo, también considerada como variable independiente. El niño no escoge el significado de sus palabras. Él no está libre para formar complejidades a voluntad. El significado de sus palabras es dado por él en sus conversaciones con el adulto. El niño recibe todos estos elementos desde su complejidad en una forma ya preparada, es decir, desde los discursos de otros.

Elementos para una síntesis. La aproximación psicogenética no reconoce que el elemento social en el desarrollo intelectual es independiente e implica ciertos principios sobre los cuales se desarrollan los conceptos. De la misma manera, la aproximación sociocultural, postula que la fuente de los conceptos plenamente desarrollados se encuentra en el ambiente lingüístico creado por la cultura. Tal tipo de sistemas no explica bien todas las posibilidades en el desarrollo conceptual, pues se ha perdido la relación dialéctica entre lenguaje y pensamiento. Se requiere entonces encontrar un balance entre estas dos fuentes necesarias del desarrollo intelectual, tal vez quitando la rigidez de la división entre situación experimental y de la vida real.

Comentarios finales

El análisis sobre la aproximación sociocultural del grupo de trabajo no trató de construir un estado del arte del mismo, sino intentó precisar sobre la naturaleza de la perspectiva de acuerdo a las problemáticas latinoamericanas planteadas, es decir, distinguió entre someterse a una aproximación sociocultural, reconocida en el mundo sólo como vygotskiana, y la incorporación de dimensiones, como la social y la sociológica, que a través de la cultura científica latinoamericana de la matemática educativa se construyen y reconstruyen significados necesarios para la teorización de las problemáticas.

Se presentaron reflexiones a la luz de investigaciones recientes que ejemplificaron las incorporaciones de tales dimensiones y la reconstrucción de significados como contribución a la disciplina que norma la organización social de investigadores latinoamericanos.

Referencias principales

Cantoral, R. y Farfán, RM (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon Número monográfico*. Revista de la SAEM (Thales). Num. 42 Vol. 14(3) España (pp. 353-369).

Cordero, F. (1994). “Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar”. Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Chapman, M. (1986). The structure of exchange: Piaget sociological Theory, Human Development 35, 306-315.

Díaz, V. y Poblete, A. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos ¿una habilidad inhabiltante? *Epsilon Número monográfico*. Revista de la SAEM (Thales). Núm. 42 Vol. 14(3) España (pp. 409-423).

Muñoz, G. (1999). “Análisis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en el aprendizaje y la enseñanza de la integración”. Actas de la Décima Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Clame. Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 96-103. *México.*

Piaget, J. & García R. (1994). “Psicogénesis e Historia de la Ciencia”. Siglo XXI, México, 6a. ed.

Vygostki, L. S. (1982). “Obras Escogidas II”. Incluye Pensamiento y Lenguaje, y Conferencias sobre Psicología. Ed. Visor. España.